

## 二维 EMD 分解方法的比较与改进

宋立新 高凤娇 郝朝晖

(哈尔滨理工大学电气与电子工程学院 哈尔滨 150040)

**摘要:** 该文给出了二维经验模态分解(BEMD)的实现方法, 针对实现二维 EMD 的两种常用插值方式——三角剖分插值和径向基函数插值, 通过理论和计算实践分析比较了两种插值方式的速度、视觉效果等, 提出两种方法相结合的 BEMD 实现方法。同时, 针对径向基函数插值方式提出了一种快速方法。该方法避免了求解大型线性方程组以及大矩阵的产生, 较好地降低了时间和空间复杂度, 提高了计算速度。实验结果证明了该方法的可行性和优越性。

**关键词:** 图像处理; 二维 EMD; 多尺度分析; 径向基函数

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)12-2890-04

## Compared and Improved Research of Bidimensional Empirical Mode Decomposition Method

Song Li-xin Gao Feng-jiao Xi Zhao-hui

(College of Electrical and Electronic Engineering, Harbin university of science and technology, Harbin 150040, China)

**Abstract:** In this paper, the implement process and application in image processing of bidimensional EMD are given. Two interpolation methods are analyzed and compared in arithmetic speed and visual efficiency with experiments and theory, Delaunay triangulation based cubic spline interpolation and radial basis function interpolation which are usually used. At the same time, a new fast decomposition based on radial basis function interpolation is suggested. Its superiorities are also analyzed. The results prove this method is feasible, and its superiorities are obvious.

**Key words:** Image Processing; Bidimensional Empirical Mode Decomposition(BEMD); Multi-scale analysis; Radial basis function

### 1 引言

近年来, 信号处理领域对于非线性非平稳数据的分析方法越来越关注。1998年, 美国科学家 Huang 等人创造性地提出了固有模态函数(Intrinsic Mode Function, IMF)概念和经验模态分解(Empirical Mode Decomposition, EMD)方法<sup>[1]</sup>。EMD 作为一种全新的多尺度分析方法, 显示其独特的优势。一维 EMD 现已应用到地球物理、生物医学、振动工程、机械工程、故障检测等多个领域。实践表明, 与依赖于先验函数基的 Fourier 分析和小波分析等方法相比, EMD 更适合处理非平稳信号, 是一种具有自适应性的时频局部化多尺度分析方法<sup>[2]</sup>。2003年, Nunes 将提出 BEMD 的思想, 使 EMD 的发展向前迈进了一步<sup>[3]</sup>。BEMD 的实现关键在于极值点的获取和包络曲面的拟合方式。基于三角剖分插值方法和基于径向基函数插值方法是目前研究人员常用的两种二维插值方法<sup>[3-9]</sup>。两种方法各有缺点。本文结合具体实例分析比较了这两种插值方法, 提出了一种针对径向基函数插值的分块和自然缝合相结合的快速方法。实验结果证明

了该方法的可行性和优越性。

### 2 二维 EMD 的实现

针对二维图像的 BEMD 方法的实现过程如下:

步骤1 对所给图像曲面求取局部极值点, 包括所有局部极大值和极小值。

步骤2 求取均值包络曲面。对极大值点和极小值点分别进行曲面拟合, 经插值后得到极大值点包络曲面和极小值点包络曲面, 将两曲面数据求平均得到均值包络曲面数据。

步骤3 用原曲面减去均值包络曲面。

步骤4 判断是否满足终止条件。与一维相似需计算终止条件, 计算终止条件:

$$SD = \sum_{x=0}^X \sum_{y=0}^Y \frac{[I_{k-1}(x, y) - I_k(x, y)]^2}{I_{k-1}^2(x, y)} \quad (1)$$

重复步骤1~步骤3, 直到满足给定的终止条件得到第1层二维固有模态函数 IMF1, 用原图像减去第1层模态函数得到第1层残差 residue1。对残差重复步骤1~步骤4, 依次得到图像的 N 层固有模态函数和第 N 层残差。

### 3 曲面拟合方式比较与融合

BEMD 的实现关键在于极值点的获取和包络曲面的拟

合方式, 即极值点的插值方式。获取极值点, 一种方法: 求出曲面上所有的比周围临近点都大或都小的点。这种方法计算量较大, 另一种方法采用形态学重建的方法, 使用结构元素对图像进行形态操作来得到图像的极值点, 速度快。形态学筛选极值点的方法较快, 且实现容易。

BEMD中通过对散乱分布的数据点插值得到拟合曲面, 最常用的方法是三角剖分结合线性插值或立方插值进行曲面拟合和径向基函数插值。两种插值方法都支持呈散射状分布的数据点的插值<sup>[8]</sup>。在二维空间情形, 三角剖分插值是将研究区域分割成简单的小三角形区域, 在每个小三角形中构造插值曲面, 再把这些曲面片拼接起来, 构造一张大的插值曲面; 径向基函数插值也是以图像的极值点作为重建曲面的离散数据点, 以得到光滑即能量尽量小(曲面的褶皱程度反映了曲面的能量大小)的插值曲面, 求得通解为

$$s(t) = p(t) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(\|t - t_i\|) \quad (2)$$

其中  $p(t)$  为一次多项式, 通过求解  $N+3$  元一次的大型线性方程组, 解得径向基函数的组合系数  $\lambda_i$  和多项式系数  $c_i$  的值, 进而代入所有点的坐标值得到整个插值曲面。

两种插值方法各有优缺点。首先, 从视觉效果看两种插值就有所不同。以二维图像为例, 图1(a)为一组二维图像上散乱分布的极值点, 两者的插值结果如图所示, 其中图1(b)为用径向基函数插值的结果, 图1(c)为用三角剖分插值的结果。以下对BEMD的分解速度、各层IMF的拟合的视觉效果、达到筛选停止标准的进程进行比较。

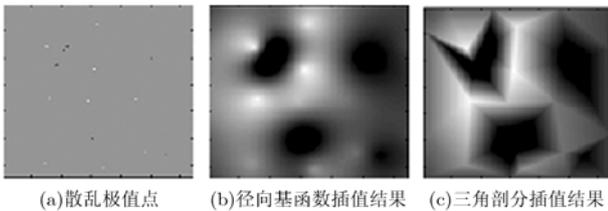


图1 径向基函数和三角剖分插值结果的对比

BEMD 将图像依次分解得到从低频到高频不同频率范围内的分量。基于两种插值方式对于图像的各层不同频率范围的极值点的插值效果不同, 所得的 IMF 分量的效果不同。图 2 和图 3 为  $256 \times 256$  lena 图像的 4 层 BEMD 分解结果, 图 2 使用的是径向基函数插值, 图 3 使用的是三角剖分插值。从完成整个 BEMD 过程的速度上看, 三角剖分插值较径向基函数插值快几百倍, 前者远远优于后者。从插值效果看, 对于极值点分布密集的对象, 两种插值效果都很好, 即得到的图像的高频成分 IMF1 差别不大, 如图 2(a)和图 3(a); 而对于极值点分布越稀疏的对象, 两种插值效果差别越大, 如图 2(b)、2(c)、2(d)和图 3(b)、3(c)、3(d)两种插值方式分别得到的 lena 图像的较低频成分 IMF2, IMF3, IMF4。

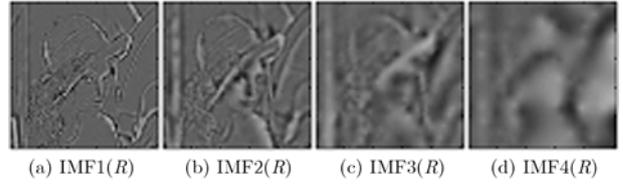


图 2 径向基函数插值下的 BEMD

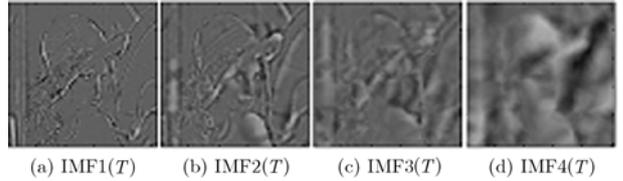


图 3 三角剖分插值下的 BEMD

对达到筛选停止标准的进程进行比较。如图 4 所示为在相同 SD 下的两种插值方法的 8 层 BEMD 分解的 sd 收敛曲线。从 sd 的收敛曲线上看, 径向基函数插值比三角剖分插值的收敛速度快近十倍(2500 次较 250 次)。径向基函数拟合优于三角剖分拟合, 剖分的拟合误差大。

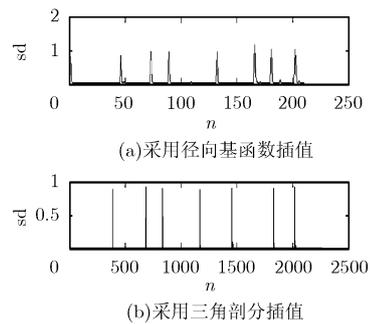


图 4 sd 收敛曲线

上述比较分析可以看出: 三角剖分插值实现速度快, 但对低频图像插值拟合的误差大, 同时存在边缘问题, 适于高频图像的高频层分解。径向基函数插值速度较慢, 但各层插值拟合的效果都比较好。当考虑速度问题时, 用径向基函数插值适合于所含极值点较少的低频对象或小图片。因此, 一幅图像的 BEMD 分解可以高频层采用三角剖分插值, 后面低频层采用径向基函数插值, 两种方法相结合。为了减少径向基函数插值的计算量, 本文提出一种针对径向基函数插值的快速 BEMD 算法。

#### 4 改进算法

径向基函数插值的速度慢, 主要因为需要求解大型的线性方程组、处理大型的矩阵, 计算量大。若图像有  $N$  个极大值点, 在一次筛分的极大值曲面拟合中, 需要求解  $N+3$  元一次线性方程组。采用高斯消元<sup>[10]</sup>求解  $n$  元一次线性方程组, 需要  $n(n^2 + 2n - 1)$  次乘除运算,  $(1/2)n(n-1)(n+3)$  次

加减运算。256×256的lena图像有超过3000个极值点，一次求解中要做超过 $2.7 \times 10^{10}$ 次乘除运算，运算量非常大。对于一幅图像，距离近的像素点相关性大，距离较远的相关性甚至可以忽略，所以可将极值点分区域做径向基函数插值。如果将图像分块分别做BEMD，各块的极值点相对少，避免求解大型的线性方程组、处理大型的矩阵，运算量大大减少。如图像被均4分块，在一次筛分的极大值曲面拟合中，加减、乘除运算量都减少了近16倍，对于整个BEMD过程来说，分解速度大大提高。图像进一步分块，分解速度会进一步提高。图5中给出了直接计算 $n$ 元方程组及将方程组拆成4组和16组所需乘法工作量的比较。

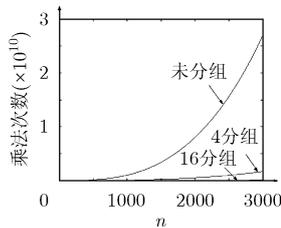


图5 乘法工作量比较

分块做BEMD使速度提高的同时也引起新的问题，即拼接处的不连续失真。为解决这一问题，首先，在分块时保持相邻小图像块之间有足够的重叠部分，以保证合并的图像不产生严重的失真。其次，对各层IMF的相邻块应用自然缝合算法<sup>[11]</sup>，使相邻图像重叠区域均匀过渡，算法思想为：将左图像和右图像(或上图像和下图像)的重叠区域按着一定的加权值合成新图像，其合成公式表示为

$$I_{\text{new}} = I_{\text{left}} \times (1 - \text{coef}) + I_{\text{right}} \times \text{coef} \quad (3)$$

其中 $I_{\text{new}}$ 为合成图像， $I_{\text{left}}$ 、 $I_{\text{right}}$ 分别为左、右图像的重叠部分，coef为加权系数，设重叠区域宽度为 $d$ ，则随着合成图像由左图像向右图像的过渡，coef以 $1/d$ 增量在 $[0,1]$ 内变化。

本文提出的快速分块加自然缝合的BEMD算法大体分为3步：

(1)将图像分块，通常分成 $4^k$ 个小块。相邻小图像块之间的重叠部分包含3个以上的极值点，以保证合并的图像不产生严重的失真。

(2)各子块分别进行BEMD分解。

(3)按着自然缝合算法思想将各块各层的IMF对应缝合。

## 5 实验结果

### 5.1 对图像分块做BEMD

以128×128的lena图像为例。将其分4块，水平和垂直方向都等分，得到64×64的4个图像块。每块图像再延拓8个像素，使相邻两块有16个重叠像素。将图像划分得

到4个72×72的图像块(分别为I, II, III, IV四分块)，如图6所示。对4块各自做4层BEMD，如图7所示。



图6 128×128的lena图像四分块

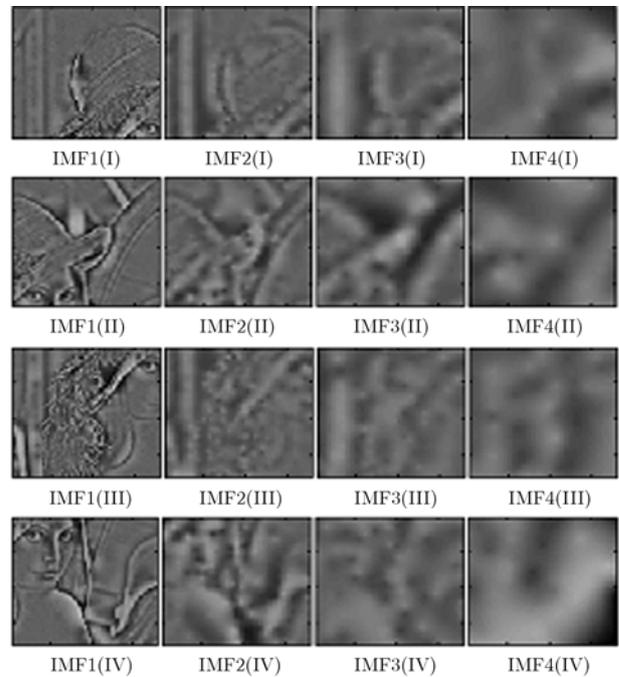


图7 lena分块的BEMD

### 5.2 图像的自然缝合

分别对4层IMF的相邻块应用自然缝合算法。重叠区域宽度 $d$ 为16，随着合成图像由左图像向右图像(或由上图像向下图像)的过渡，加权系数coef以 $1/16$ 增量在 $[0,1]$ 内变化，使相邻图像重叠区域的均匀过渡，实现了图像的自然缝合。拼接后BEMD结果如图8所示。本文方法很好地修正了接缝处的误差。如图9(a)是分块后直接拼接所得的图像的第1层IMF分量和未分块图像的第1层IMF分量的误差曲面；图9(b)是本文方法所得的图像的第1层IMF分量和未分块图像的第1层IMF分量的误差曲面。表1为直接拼接和本文方法的误差分析结果。

## 6 结束语

三角剖分插值和径向基函数插值是BEMD分解中两种

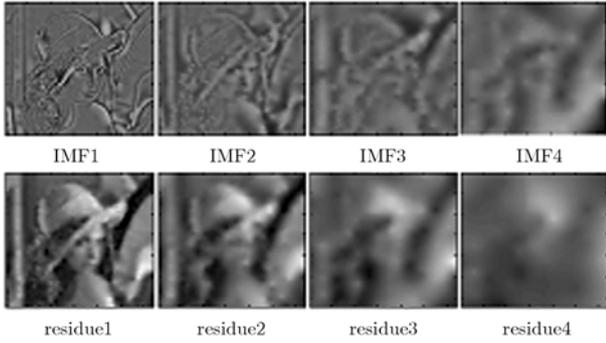


图 8 128×128 的 lena 图像经 4 分块、缝合后的四层 IMF 及其残差

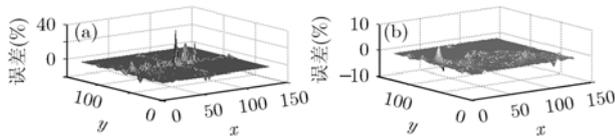


图 9 误差曲面

表 1 误差分析

	误差值		
	最大相对值	平均值	标准偏差
直接拼接	0.3578	-0.0186	2.2978
本文方法	0.0902	0.0153	0.9269

常用插值方法。两者各有优缺点。三角剖分插值的速度快，但插值误差大；径向基函数插值速度慢，但插值结果较剖分准确。对于含有较多极值点的高频图像，两者插值效果相近，可考虑三角剖分插值。但对于含有较少极值点的低频图像，径向基函数明显优于剖分。因此，针对图像的 BEMD 分解，给出三角剖分与径向基函数两种方法融合的 BEMD 分解思想。同时，提出针对径向基函数插值 BEMD 的改进方法。实验结果无论分解效果、速度、相对误差都显示其优势，验证了该方法的有效性。

参 考 文 献

[1] Huang N E, Zheng Shen, and Long S R, *et al.*. The empirical mode decomposition method and the Hilbert spectrum for

non-stationary time series analysis [D]. *Proc. R. Soc. London. Ser. A*, 1998, 9454(1971): 903-995.

[2] Huang N E and Zhaohua Wu. A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method [J]. *Proc. Roy. Soc. London. A*, 2004, 460: 1597-1611.

[3] Nunes J C, Niang O, and Bouaoune Y, *et al.*. Bidimensional Empirical mode decomposition modified for texture analysis. Scandinavian Conference on Image Analysis [C]. SCIA, June 29-July 2, 2003: 171-177.

[4] 宋舰平, 张杰. 二维经验模分解在海洋遥感图像信息分离中的应用[J]. 高科技通讯, 2001, 9: 62-67.

[5] 沈滨, 崔峰, 彭思龙. 二维EMD的纹理分析及图像瞬时频率估计[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(10): 2345-2352.

[6] Zhongxuan Liu and Silong Peng. Boundary processing of bidimensional EMD using texture synthesis [J]. *IEEE Signal Processing Letter*, 2005, 12(1): 33-36.

[7] Christophe Damerval, Sylvain Meignen, and Valérie Perrier. A fast algorithm for bidimensional EMD [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(10): 701-704.

[8] Linderhed A. 2D empirical mode decomposition in the spirit of image compression [J]. *Wavelet and Independent Component Analysis Application IX*, SPIE Processings. 2002, 4738: 1-8.

[9] Nunes J C, Guyot S, and Del' echelle E. Texture analysis based on local analysis of the Bidimensional Empirical Mode Decomposition [J]. *Machine Vision and Applications*, 2005, 16: 177-188.

[10] 谢国瑞线性代数[M]. 上海: 华东理工大学出版社, 1996, 第2章.

[11] 米兰, 许海波. 基于边缘提取的图像拼接[J]. 计算机应用研究, 2007, 25(5): 318-320.

宋立新: 男, 1963 年生, 博士, 教授, 研究方向为信号检测与数字信号处理.

高凤娇: 女, 1982 年生, 硕士生, 研究方向为非平稳信号分析、数字图像处理.

郗朝晖: 男, 1963 年生, 博士, 副教授, 研究方向为信号检测.