

基于多尺度几何分析的复杂网络压缩策略

王晓华^① 杨新艳^{①②} 焦李成^①

^①(西安电子科技大学智能信息处理研究所 西安 710071)

^②(苏州大学电子信息学院 苏州 215021)

摘要: 自然界许多系统都具有多尺度效应,人们对系统的观察或测量也往往是在不同尺度上进行的。复杂网络可视为描述复杂系统的抽象模型,多尺度几何分析提供一种有效刻画复杂系统结构由粗到细的显微镜策略。该文从多尺度几何分析的角度对复杂网络压缩问题进行了有益的尝试,提出一种有效的网络压缩策略。策略分析及通过对不同拓扑类型的网络仿真表明基于多尺度几何分析的复杂网络压缩策略是可行的,能有效地帮助人们通过尽可能少的信息来分析、刻画大型复杂网络,实现网络数据及结构的稀疏表示。

关键词: 复杂网络; 多尺度几何分析; 网络压缩; 稀疏表示

中图分类号: TN711; O231.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)04-0968-05

Compression of Complex Networks Based on Multiscale Geometric Analysis

Wang Xiao-hua^① Yang Xin-yan^{①②} Jiao Li-cheng^①

^①(Institute of Intelligent Information Processing, Xidian University, Xi'an 700071, China)

^②(School of Electronics and Information Engineering, Soochow University, Suzhou 215021, China)

Abstract: Many systems are characterized by multiscale features in nature, and the systems are frequently observed and measured in different scales. Complex networks can be regarded as the refined model for describing complex systems. The multiscale geometric analysis provides a powerful microscopy to observe the structures of complex systems. Consequently, complex networks can be analysed via multiscale geometric analysis. Keeping in mind this idea, a compression strategy based on multiscale geometric analysis is proposed for depicting the structure of complex networks with the small amount of information. The analysis and the experiments indicate that the proposed method is feasible, and performs as a sparsely representing for successfully understanding and compressing networks, which can be useful for analyzing networks with the small amount of information.

Key words: Complex networks; Multiscale geometric analysis; Network compression; Sparse representation

1 引言

自然界中的大量复杂系统由微观层次上的海量个体所组成,个体之间又彼此存在着互相作用,将个体抽象为节点,而个体之间的互相关系抽象为边,则这些复杂系统可用网络来描述^[1-4]。作为复杂系统的抽象描述,复杂网络突出强调了系统结构的非确定复杂性,如何有效理解、刻画网络也自然成为关注的问题。过去几年,统计物理学理论为描述网络提供一系列可行的方法^[1],在复杂网络研究中涌现出一些典型的结构模型及相关概念,如小世界效应^[2]、无标度特性等^[3]。然而从本质上讲,网络自身的复杂性使得人们对其统计特性、行为表现等清晰地了解还是很困难,这往往也导致人们很难对复杂网络进行全局规划和管理,也难以挖掘网络中丰富的信息资源。

对于规模不大、交互关系简单的小型网络,自然可通过直接观察去认识。随着网络规模不断增大,复杂网络更是在微观层次上海量个体及个体之间相互关系的宏观表现,此时依然采用简单观察认识网络恐怕是一项不可能完成的任务,于是如何对复杂网络有效定性或定量分析也显得十分重要。另外复杂网络的庞大数据对存储、处理和传输都提出了不小的挑战。而如果能提供一种有效的网络压缩策略,人们就可通过较小信息去理解网络,并有助于挖掘隐藏在网络内部有价值信息,同时实现数据及结构的稀疏表示。不过,虽然说有效的网络压缩显得比较重要,然而也许因为复杂网络自身的复杂性使得网络压缩中如何保留最大有用的信息变得极其困难,目前国内外有关复杂网络压缩方面的研究还基本没有展开。

受自然界许多系统都具有多尺度特征或多尺度效应以及人们对系统的观察及测量也往往是在不同尺度上进行等现象的启发,同时借承多尺度几何分析这一有效刻画系统结

2007-12-03 收到, 2008-05-05 改回

国家 863 计划项目(2006AA01Z107)和国家部委科技项目(XADZ 2008159)资助课题

构由粗到细的显微镜工具, 本文从多尺度几何分析的角度对复杂网络压缩问题进行了有益的尝试, 旨在提出一种网络压缩策略, 使得通过尽可能少的信息来分析复杂大型网络变为可能。

2 基于多尺度几何分析的复杂网络压缩策略

2.1 多尺度几何分析与网络压缩思想

20世纪80年代以来, 以非线性科学为主线的许多新颖的分析工具逐渐渗透到数据信息处理方法之中, 使得相关理论变得多元化。其中, 尤其以小波为代表的多尺度分析的信息处理手段, 继承和发展了 Fourier 分析, 将函数论和逼近论完美结合, 迅速完成了理论构建过程, 并应用在各学科领域中, 成为数据信息分析的一大有力工具^[5-9]。

本文选择多尺度小波作为几何分析的工具, 简单描述如下: 输入为 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N \times N}$, 在尺度 r 上, 平移 b , 母小波是 ψ 时的两维小波变换 $(\bullet)W_A^r(b)$ 为

$$\begin{aligned} (\bullet)W_A^r(b) &= \mathbf{A}(p_1, p_2) * (\bullet)\psi_b^r(p_1, p_2) \\ &= \sum_{p_1=1}^N \sum_{p_2=1}^N \mathbf{A}(p_1, p_2) (\bullet)\psi_b^r(p_1, p_2) \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $b = \{1, 2, \dots, N/2^r\}$, (\bullet) 表示逼近或细节系数, $*$ 表示卷积运算。则子带分解为

$$\mathbf{A} \Rightarrow {}^{(LL)}W_A^r(b) + {}^{(LH)}W_A^r(b) + {}^{(HL)}W_A^r(b) + {}^{(HH)}W_A^r(b) \quad (2)$$

这里通过对 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N \times N}$ 采用小波分解, 在水平和垂直方向使用高通滤波器(H)和低通滤波器(L), 分别产生3个方向的选择高通子带 HH, HL 和 LH, 及一个低通子带 LL, 对 LL 子带重复该分解即可产生下一层分解。

本质上讲, 几何多尺度分析的目的是为了表示、处理某些高维空间复杂数据, 这些空间主要特点是数据的重要特征集中体现在其低维子集中^[6-8]。复杂网络自身具有显著的局部稠密而整体稀疏的特点^[1], 可以说网络结构的复杂性并不能掩埋网络整体连接的稀疏性, 网络信息中势必存在较多的冗余细节。依据多尺度几何分析的思想, 其主要连接特征完全也可以通过其粗尺度的低维子集来表现。

小波变换具有较好的能量紧束性。一般而言, 系统大部分能量集中在最低频子带, 高频子带仅包含很少的能量甚至没有能量。Fan 和 Wang 在小世界网络分析中首先引入小波分析^[5], 利用小波变换很好的能量紧束特性, 对小世界网络的连接矩阵进行多分辨分析, 提供一种有效的由粗到细的多分辨表示, 而小世界特性可较容易地从小波分解的最低分辨率子空间对应的粗粒化描述得到。思考该过程, 如果将网络的描述矩阵视为网络的图像化表示, 并选择有效的多尺度几何分析工具进行多尺度几何分解, 去除高频子带中较多的冗余细节信息, 提取连接特征集中的低维子集作为原始网络的稀疏表示, 即可实现网络的压缩。

2.2 复杂网络压缩过程

给定 N 节点复杂网络 G , 假设采用连接矩阵 $\mathbf{A} =$

$(a_{ij})_{N \times N}$ 为网络的描述矩阵, 即如果节点 i 和 j ($i \neq j$) 有边相连, 有 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$, 同时 $a_{ii} = 0$, 即对角元素为 0。物理意义为网络中每一节点对的互相关系视为图像中一像素点, 灰度值表示节点对的连接状态。以网络 G 的连接矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N \times N}$ 为输入, 对 \mathbf{A} 进行分级小波分解得到一系列分解子带, 将最低频子带 $({}^{(LL)}W_A^r)$ 包含的信息看作为原始复杂网络的粗颗粒度刻画, 其他子带对应更高分辨率子空间, 描述网络在其他尺度上的细节信息; 然后去除高频子带中较多的冗余细节信息, 提取连接特征集中的最低频子带 $({}^{(LL)}W_A^r)$ 矩阵作为刻画压缩网络的描述矩阵 \mathbf{A}^* ; 最后依据网络描述矩阵 \mathbf{A}^* 得到对应压缩网络 G^* , 进而实现复杂网络的压缩。图 1 简单示意了对原始复杂网络通过 2 尺度小波分析移除冗余细节信息实现压缩的过程。

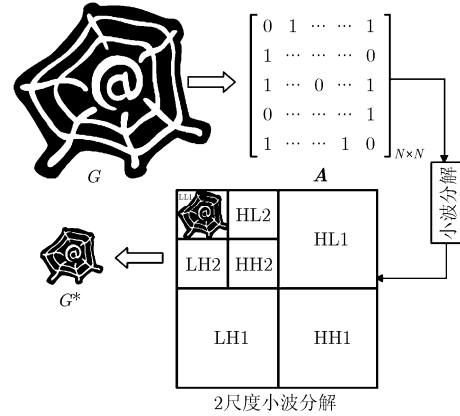


图 1 基于 2 尺度小波分析的网络压缩示意

3 复杂网络压缩策略分析

复杂网络的压缩过程, 可看作将原始网络 N 个节点分为 $N/2^r$ 个组, 每组包含 2^r 个顺序排列的节点, 其中第 i 组节点顺序排列为 $\{2^r(i-1)+1, 2^r(i-1)+2, \dots, 2^r i\}$, $i = 1, 2, \dots, N/2^r$, 进而实现原始网络一组节点对应压缩网络一个节点的映射过程。记低频子带 $\mathbf{A}^* = ({}^{(LL)}W_A^r(b)) = (\tilde{a}_{ij}^r)_{2^r \times 2^r}$, 这里 $(-)$ 表示 r 层小波变换。假设采用 Haar 小波变换, 根据 Haar 小波基^[9], 则有

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij}^r &= \frac{1}{2}(\tilde{a}_{2i-1, 2j-1}^r + \tilde{a}_{2i-1, 2j}^r + \tilde{a}_{2i, 2j-1}^r + \tilde{a}_{2i, 2j}^r) \\ &= \frac{1}{2^r} \sum_{s=2^r(i-1)+1}^{2^r i} \sum_{t=2^r(j-1)+1}^{2^r j} a_{st} = \frac{1}{2^r} E_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2^r \end{aligned} \quad (3)$$

这里 E_{ij} 定义为第 i, j 组之间存在连接的数目 ($i \neq j$), 则 E_{ii} 为第 i 组内部的连接数目。因此对描述压缩网络的 \mathbf{A}^* 来说, 对角元素 \tilde{a}_{ii}^r 表示原始网络第 i 组内部边的数目, 非对角元素 $\tilde{a}_{ij}^r, i \neq j$ 表示组 i, j 之间边的规范化数目, 规范化因子为 2^r 。多尺度低频子带的能量集中性决定矩阵 \mathbf{A}^* 具有明显的非稀疏性。从网络的表现形式上讲, \mathbf{A}^* 矩阵所刻画的网络为一权值网络。物理意义上权值 \tilde{a}_{ij}^r 刻画第 i, j 组之间互相关联的程度, \tilde{a}_{ii}^r 则刻画了组内部网络的连通程度。

图2简单描述了 $N=8$ 节点的简单拓扑网络,通过2尺度小波分解得到低频子带矩阵所刻画的权值压缩网络。原始网络被分为4个组,压缩网络中节点A~D分别表示原始网络A~D组。压缩网络中节点A~D点权为1,表示原始网络对应组内部边数为1。而不同的边权则刻画不同组别之间连接活性的差异,如组A与组B之间存在 1.5×2 条边,而A与C之间则存在 0.5×2 条边,这里2为规范化因子。

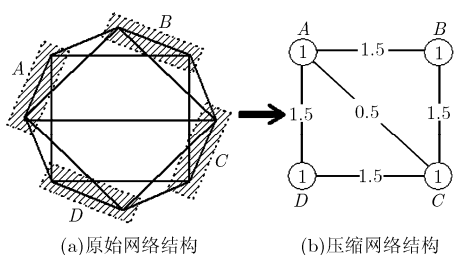


图2 原始网络与压缩网络稀疏映射关系

一般来说,对于复杂网络,可通过聚类特性以及平均路径长度来刻画网络拓扑特征。

假设网络中一个节点 i 有 k_i 条边将它和其他节点相连,对应 k_i 个节点就称为节点 i 的邻居。显然,在 k_i 个节点间最多可能有 $k_i(k_i-1)/2$ 条边,定义 k_i 个节点间实际存在的边数 E_i 与总最大可能边数之比为节点 i 的聚类系数 $C_i = E_i / \{k_i(k_i-1)/2\}$,整个网络聚类系数则定义为所有节点聚类系数的平均值。对于低频子带所描绘的权值压缩网络来说,其聚类特性可通过对比矩阵 \mathbf{A}^* 中对角元素与非对角元素之间关系得到刻画。如果 \mathbf{A}^* 中对角元素比非对角元素大的多,则说明网络中组内部的边将比组之间的边多的多,这意味着网络具有很好的聚类特性。复杂网络另外一个主要特性为平均路径长度 L ,定义为任意两个节点之间距离的平均值,即 $L = \sum d_{ij} / \{N(N-1)/2\}$,其中 N 为网络节点数, d_{ij} 为连接节点 i 和 j 的最短路径上的边数。记原始网络的平均路径长度为 L ,压缩网络的平均路径长度为 L_c ,明显有 $L \leq L_c + 2 \max L_{ij}$, L_{ij} 为第 i 组第 j 个节点的平均路径长度,定义为该节点与该组其他节点之间的平均距离, $\max L_{ij}$ 则表示第 i 组内最大距离半径。因此对刻画网络特征的聚类特性及平均路径长度来说,压缩网络和原始复杂网络之间均存在着强关联作用,原始网络的拓扑特征可以通过压缩网络来刻画。这样在保持与原始网络拓扑特性强关联的情况下,却通过网络压缩引起网络规模的缩减,极大地降低了人们对大型复杂网络理解的难度。

另外需要指出的是:由于多尺度小波分析自身的优势,整个网络压缩过程的每步变换处理均是可逆过程。因此我们说基于多尺度几何分析的网络压缩同时也具有很好可逆特性,对原始网络的重构,只需要采用逆小波变换^[9],然后通过子带分级合成即可,这也为通过尽可能少的数据信息来记录复杂大型网络提供方便。

4 实验仿真

本文通过对3类具有不同拓扑特性的网络进行仿真实验来验证该策略的有效性,分别为两个不同参数的小世界网络,一个全耦合网络和两个真实网络拓扑。

4.1 不同网络压缩仿真

4.1.1 小世界网络 典型的小世界网络为由Watts和Strogatz提出的WS网络^[2]:从一个有 N 节点的最近邻耦合网络出发,其中每个节点和它最近邻的 k 个节点连接 k 条边,通过以概率 p 随机化重连网络中每条边,进而构造出具有小世界特性的网络。该网络是从规则网络向随机网络过渡的中间网络形态,具有从规则到随机的连通过渡性^[2],既具有与规则网络类似的较大聚类系数,又具有与随机网络类似的较小平均路径长度。这里采用两个不同参数的小世界网络作为实验对象,分别为节点数 $N=20$,重连概率 $p=0.2$, $k=4$ 的WS网络,尺度 $r=1$;另外一个选择 $N=256$, $p=0.1$, $k=32$ 的WS网络,尺度 $r=4$ 。实验中采用连接矩阵为对应网络的描述矩阵,图3、图4给出了不同参数的小世界拓扑网络的压缩表示。

4.1.2 全耦合网络 全耦合网络具有最短平均路径长度及最大聚类系数的特点,该类网络在网络同步研究中有很好的应用,这里选择网络节点 $N=1024$ 和 $N(N-1)/2$ 条边的全耦合网络作为研究对象。全耦合网络具有相比普通网络的非稀疏特性,因此如果采用连接矩阵作为网络的描述矩阵,对应网络图像中点的差异性必然较小,为了多尺度几何分析的方便,这里采用其拉普拉斯矩阵 \mathbf{A} 来作为全耦合网络的描述矩阵^[10]。定义为:如果节点 i 和 j ($i \neq j$)有边相连,那么 $a_{ij} = 1$,否则 $a_{ij} = 0$ 。定义对角元素 $a_{ii} = -\sum_{j=1}^N a_{ij}$,为第 i 个节点的负度数,这样 $\sum_{i,j=1}^N a_{ij} = 0$ 。针对全耦合网络在不同尺度上进行压缩结果如图4所示。

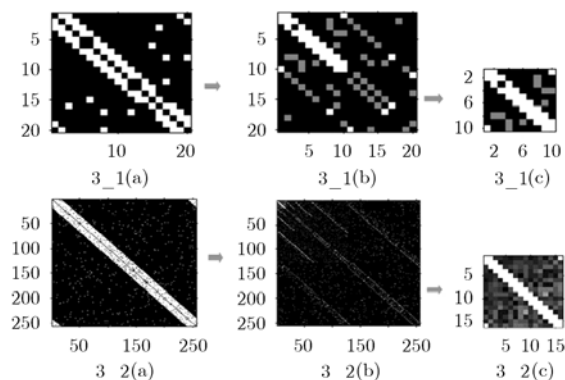


图3 不同参数小世界网络在不同尺度上压缩结果。其中:3_1对应参数为 $N=20$, $p=0.2$, $k=4$, $r=1$;3_2对应参数为 $N=256$, $p=0.1$, $k=32$, $r=4$;(a)小世界网络的描述矩阵 \mathbf{A} ;(b)输入网络描述矩阵的几何 r 尺度分解;(c)通过多尺度几何分析得到的压缩网络的描述矩阵 \mathbf{A} ;图中坐标分别表示对应矩阵的 i 和 j (下同)。

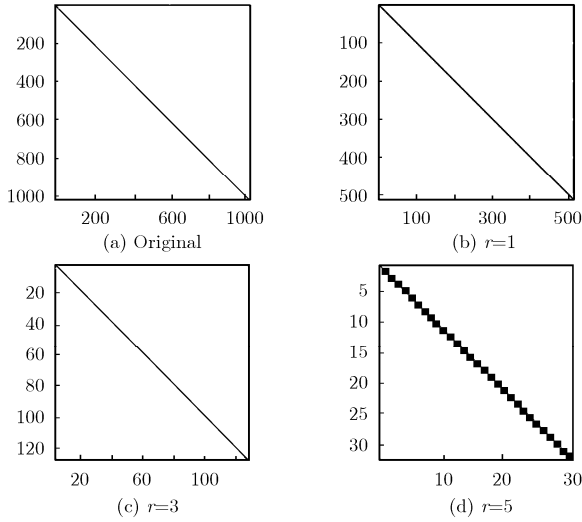


图 4 不同尺度下全耦合网络的压缩结果：(a)原始全耦合网络描述矩阵(规模 1024×1024)；(b)尺度 r 为 1 时的低频子带 LL；(c)尺度 r 为 2 时的低频子带 LL；(d)尺度 r 为 5 时的低频子带 LL。其中(b)(c)(d)分别为刻画全耦合网络在不同尺度下压缩网络的描述矩阵。

4.1.3 客观真实网络 这部分实验选择爵士音乐家网络^[11]和高校 e-mail 网络^[12]为代表的真实网络作为研究对象(对应网络数据集可在文献^[13]获得)，进行基于多尺度几何分析的压缩仿真。这些真实网络已经被证明具有高度的结构复杂性，对该类真实网络有效地处理，势必在分析复杂的网络拓扑结构中起到很好的作用。这里采用网络连接矩阵为对应描述矩阵，仿真实验结果如图 5 所示。

4.2 复杂网络压缩性能实验

为了便于了解网络压缩性能，这里首次引出网络能量的概念，用于刻画网络拥有的信息量度，定义为

$$E(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^2 = \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \quad (4)$$

其中 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N \times N}$ 为网络连接矩阵， N 为网络规模。这里针对网络节点、边以及能量在压缩前后进行定量分析，期望在拥有不错的网络能量保持情况下，具有较高的网络压缩率。针对网络中节点、边以及能量在压缩前后的压缩率，定义为

$$\text{Ratio} = \|F^*\| / \|F\| \quad (5)$$

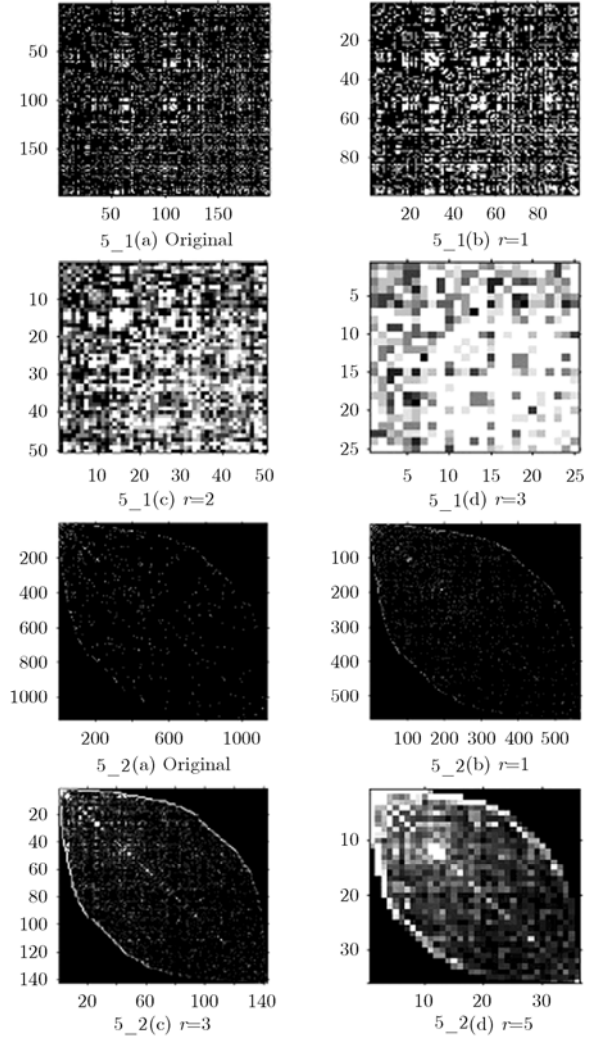


图 5 不同真实网络在不同尺度上压缩结果。其中：5_1 对应不同尺度下爵士音乐家网络的压缩结果；5_2 对应不同尺度下高校 e-mail 网络的压缩结果；(a)为真实网络的描述矩阵，(b)(c)(d)分别为不同尺度下压缩网络的描述矩阵。

其中 $\|\cdot\|$ 为 1 范数， F^* , F 表示网络对应分析量(如节点、边及能量)，而 Ratio 表示对应分析量压缩前后的差异情况，显然 $\text{Ratio} \in (0, 1]$ 。

实验对小世界网络、全耦合网络及真实网络在尺度 $r=1$ 时的网络压缩进行分析，结果如表 1 所示。

表 1 不同网络压缩性能实验结果

	原始网络 G			压缩网络 G^*			网络压缩性能(尺度 $r=1$)		
	节点 N_0	边 M_0	能量 E_0	节点 N^*	边 M^*	能量 E^*	点压缩率	边压缩率	能量保持率
WS ^①	20	40	80	10	16	48.5	50%	40%	60.6250%
WS ^②	256	4096	8192	128	1412	6788.5	50%	34.4726%	82.8674%
GCN	1024	523776	1047552	512	130816	1047040	50%	24.9756%	99.9511%
Jazz	198	2742	5484	99	1906	3273	50%	69.5113%	59.6827%
E-mail	1133	5451	10903	567	4514	5712	50.0441%	82.8105%	52.3893%

注：其中 WS^①, WS^②, GCN, Jazz 和 E-mail 分别表示图 3_1, 图 3_2, 图 4, 图 5_1 和图 5_2 对应的网络拓扑。

4.3 实验结果分析

通过对小世界网络、全耦合网络及真实网络等不同拓扑类型网络的压缩实验及性能分析,可以有效地验证基于多尺度几何分析网络压缩策略的有效性。

图3描述了两个不同参数的小世界网络通过多尺度分析得到压缩网络的实验结果。小世界网络的聚类特性可以通过压缩网络的描述矩阵得以分析,由图3可明显地看出其对角元素和非对角元素的差异,表明了压缩网络同样有大聚类系数的特点,即具有很好的聚类特性。另外,小世界网络平均路径长度 L 表现为节点规模 N_0 的对数增长,即 $L = c \ln N_0$, c 为常量因子。考虑 $N_* = N_0 / 2^r$ 个节点构成的压缩网络,每节点表示原始网络 2^r 个节点构成的组,则组与组之间存在连接的概率比原始网络节点之间存在连接的概率大了许多,即 \mathbf{A}^* 中 $\tilde{a}_{ij}^r = 0$ 的元素变的更少,有压缩网络的平均路径长度 $L_c \leq L$, 即 $L_c \leq c \ln N_0 = c \ln(N_* \times 2^r) = q + c \ln N_*$, $q = cr \ln 2$ 。因此可以称实验所得到的压缩网络的平均路径长度依然表现为节点规模的对数增长。基于上述聚类特性和平均路径长度的分析,可以得出低分辨率子空间所表示的压缩网络依然很好地刻画原始小世界网络的两个最基本特征,即具有大的聚类系数和短的平均路径长度。

另外观察图3至图5,可以很明显看到:针对不同类型网络拓扑,原始网络和压缩网络之间均具有很好的相似性,不同尺度下得到的压缩网络皆具有高度相似于原始网络的特点,可以说复杂网络在不同几何尺度上是比较鲁棒的。这也使得人们仅利用网络粗颗粒度上的较少的拓扑信息,即可很好地从全局理解不同类型的复杂网络。

最后不同网络类型的压缩性能实验由表1给出了结果,通过原始网络和压缩网络有关节点、边以及网络能量等方面的比较,可以明显地看出:在压缩网络保持较高的网络能量情况下,却在网络边与节点方面实现了较好的压缩,使得网络结构复杂性大规模降低。这也表明了本文网络压缩策略在保持较好的网络信息保持情况下,具有很好的结构压缩性能。

5 结束语

复杂网络已经被证明可作为描述从技术到生物直至社会各类开放复杂系统的骨架,其高度的结构复杂性使得人们有效地分析或记录网络信息造成很大的困难。本文从多尺度几何分析的角度对网络压缩问题进行了有益的尝试,提出了一种网络压缩策略,为通过尽可能少的信息来分析及记录复杂大型网络提供方便。

通过研究分析及仿真实验,验证了基于多尺度几何分析的网络压缩策略是有效的,结论如下:(1)复杂网络结构的复杂性并不能掩埋整体连接的稀疏性,其主要连接特征可通过其粗尺度的低维子集来表现。(2)网络压缩使得在保持较好的网络信息情况下,却具有很好的结构压缩性,这也使得在不

改变网络特征期望前提下,减少了网络中的冗余细节信息,进而使得通过较少的信息来分析刻画复杂大型网络变为可能。(3)无论何种类型的复杂网络,原始网络和压缩网络之间均具有很好的相似性,同时不同尺度上得到的压缩网络皆具有高度相似于原始网络的特点。(4)多尺度小波分析的重构优势使得压缩网络通过多尺度重构过程很容易得到原始复杂网络的细节信息,即基于多尺度几何分析的网络压缩同时也具有很好可逆特性。

参考文献

- [1] Albert R and Barabás A L. Statistical mechanics of complex networks [J]. *Rev. Mod. Phys.* 2002, 74(1): 47-97.
- [2] Watts D J and Strogatz S H. Collective dynamics of small-world networks[J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440-442.
- [3] Barabás A L and Albert R. Emergence of scaling in random networks [J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509-512.
- [4] Wang X F and Chen G R. Complex networks: small-world, scale-free and beyond[J]. *IEEE Circuits & Systems Magazine*, 2003, 3(1): 6-19.
- [5] Fan J and Wang X F. A wavelet view of small-world networks[J]. *IEEE Trans. on Circuits and Systems-II*, 2005, 52(5): 238-241.
- [6] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation[J]. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, 11(7): 674-693.
- [7] Do M N and Vetterli M. The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 2005, 14(12): 2091-2106.
- [8] Le P E and Mallat S. Sparse geometric image representation with bandelets [J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 2005, 14(4): 423-438.
- [9] Ingrid Daubechies 著. 李建平, 杨万年译. 小波十讲. 北京: 国防工业出版社, 2004, 17.
- [10] West D B. Introduction to Graph Theory. 2nd Edition, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Prentice Hall, 2001, Chapter II.
- [11] Gleiser P and Danon L. Community structure in Jazz[J]. *Advances in Complex Systems*, 2003, 6(4): 565-573.
- [12] Guimera R, Danon L, Diaz-Guilera A, Giralt F, and Arenas A. Self-similar community structure in a network of human interactions[J]. *Physical Review E*, 2003, 68: 065103.
- [13] <http://deim.urv.cat/~aarenas/presentacio/welcome.htm> .

王晓华: 男, 1979年生, 博士, 研究方向为复杂网络。

杨新艳: 女, 1978年生, 博士, 研究方向为多尺度几何分析与复杂网络。

焦李成: 男, 1959年生, 教授, 研究领域为智能信息处理、图像处理、机器学习与自然计算。