

选择性放大传送协同通信在 Nakagami 信道中的性能分析

方朝曦 单杭冠 王宗欣
(复旦大学通信科学与工程系 上海 200433)

摘要: 该文根据两个统计独立非负随机变量的调和平均值的概率密度函数在零点的变化特性, 分析了选择性放大传送协同协议在 Nakagami 衰落信道中的性能, 得出了高信噪比时系统误符号率的闭合表达式。理论分析和数值仿真结果表明, 在 Nakagami 信道中选择性放大传送协同协议可获得和传统放大传送协同协议一样的分集阶数, 并且具有更优的误符号率性能。

关键词: 协同通信; 选择性放大传送; 调和平均; 误符号率

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)02-0414-04

Performance Analysis of Selection Amplify-and-Forward Cooperative Communication in Nakagami Fading Channels

Fang Zhao-xi Shan Hang-guan Wang Zong-xin

(Department of Communications Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: The behavior of the probability density function of the harmonic mean of two independent distributed non-negative random variables at the origin is analyzed. This result is then applied to study the performance of selection amplify-and-forward cooperation protocol in Nakagami fading channel and closed-form expression of the Symbol Error Rate (SER) in high SNR region is also provided. Both analytical and numeric results show that the selection amplify-and-forward cooperation protocol maintains the same diversity order as the conventional amplify-and-forward protocol, and has better SER performance.

Key words: Cooperative communication; Selection amplify-and-forward; Harmonic mean; Symbol Error Rate (SER)

1 引言

在无线网络中, 多个终端之间采用一定的协议进行合作, 可以获得协同分集效果, 从而有效提高衰落信道中无线通信系统的传输质量^[1,2]。到目前为止, 人们已经提出了许多协同通信协议, 这些协议基本上可以分为解码传送(Decode-and-Forward, DF)协议和放大传送(Amplify-and-Forward, AF)协议两类^[2], 其中放大传送协同协议是一种非常简单并且可以获得满阶分集效果的协议。

在传统的放大传送协议中, 整个协议分为两个阶段^[2], 第 1 个阶段为广播阶段, 信源终端发送的信号同时被接收终端以及其余协同终端所接收。第 2 阶段为协同阶段, 参与协同的终端对接收信号进行适当放大后传送给接收终端, 由于所有的协同终端在这一阶段均参与协同, 因此这种放大传送协议也被称为全参与放大传送(All-Participate Amplify-and-Forward, AP-AF)协议。在 AP-AF 协议中, 每个协同终端都需要占用不同的时隙或者频段来传送信号, 因此当有多个终端参与协同时, 会导致系统传输效率大大降低。为了提高传输效率, 文献[3]提出了一种选择性放大传送(Selection

Amplify-and-Forward, S-AF)协议。与 AP-AF 不同, 在协同阶段, S-AF 协议只选择信噪比最好的一个终端参与协同, 这样整个协同阶段只需要一个时隙或者频段, 从而有效提高了系统的传输效率。

目前, 已有一些文献对 AP-AF 以及 S-AF 协同通信协议的性能进行了分析。在文献[4,5]中, Karagiannis 等利用调和平均值与几何平均值之间的不等式关系, 给出了采用 AP-AF 协议的多跳通信系统在 Nakagami 信道中的性能下限。文献[6]利用文献[7]中的参数量化方法分析了采用 AP-AF 协议的多协同终端与多跳协同通信系统在瑞利与 Ricean 衰落信道下的性能, 并给出了高信噪比时的误符号率闭合表达式。而文献[8]则分析了 S-AF 协议在瑞利信道下的误符号率性能, 结果显示, 在瑞利信道下 S-AF 可以取得和 AP-AF 相同的分集阶数, 并且误符号率性能优于传统的 AP-AF 协议。

对于 S-AF 协议在 Nakagami 信道下的性能, 目前还没有文献给出相应的分析。由于 Nakagami 信道的概率密度函数的复杂性, 无法利用文献[8]中的方法进行分析, 而且由于其 PDF 在原点不为零, 因此也无法直接利用文献[6]的分析结果。为此, 本文将首先分析具有任意概率密度函数的两个

统计独立非负随机变量的调和平均值的概率密度函数在零点的变化特性,以适合于更一般的信道。在此基础上,分析多协同终端的两跳无线通信系统采用选择放大传送协议时在 Nakagami 信道下的平均误符号率性能,并给出闭合的表达式。

2 系统模型

考虑一个具有 $K+2$ 个终端的无线协同网络,其中包含信源终端 s ,接收终端 d 以及 K 个协同终端 R_1, R_2, \dots, R_K 。协同终端对接收到的来自信源终端的信号进行适当放大后传送给接收终端,接收终端对来自信源终端以及所有协同终端的信号进行最大比合并,合并输出的信噪比可以表示为^[8]

$$\gamma = \gamma_{s,d} + \max_k \frac{\gamma_{s,k} \gamma_{k,d}}{\gamma_{s,k} + \gamma_{k,d} + 1} \quad (1)$$

其中 $\gamma_{s,d} \triangleq |h_{s,d}|^2 E_s / N_0$, $\gamma_{s,k} \triangleq |h_{s,k}|^2 E_s / N_0$, $\gamma_{k,d} \triangleq |h_{k,d}|^2 E_s / N_0$, E_s 是发送符号的能量, N_0 是噪声谱密度,而 $h_{s,d}$, $h_{s,k}$, $h_{k,d}$ 分别是信源终端到接收终端,从信源终端到第 k 个协同终端,以及从第 k 个协同终端到接收终端的信道变量。

在高信噪比时,即 $E_s / N_0 \gg 1$ 时,上式可近似为

$$\gamma = \gamma_{s,d} + \max_k \frac{\gamma_{s,k} \gamma_{k,d}}{\gamma_{s,k} + \gamma_{k,d}} \quad (2)$$

为了得到平均误符号率的闭合表达式,一种直接的方法是得到信噪比 γ 的概率密度函数 $p(\gamma)$ 的表达式,然后进行积分。但是从式(2)可以看到, γ 与多个随机变量有关,很难得到 $p(\gamma)$ 的精确的表达式。文献[7]为解决此类问题提供了另外一种方法,由于在信噪比较高时,一个系统的性能可以通过两个重要的参数进行刻画,即分集阶数与分集增益。因此通过考察瞬时信噪比的概率密度函数在零点附近的变化特性,就可以得到在高信噪比时的系统性能的近似表达式,这一方法可以表述为^[7]

引理 1 假设系统瞬时信噪比可以表示为 $\gamma = \beta \gamma_0$, 其中 γ_0 是个正常数,而 β 是与信道有关的非负随机变量,如果 β 的概率密度函数 $p(\beta)$ 在零点可以表示为

$$p(\beta) = a\beta^t + o(\beta^{t+\epsilon})$$

其中 a, ϵ 均为正常数, t 为非负常数, $o(\cdot)$ 表示高阶量。则在高信噪比时,对于 M -PSK 调制,系统的平均误符号率为

$$P_{E, \text{MPSK}} = \left[\frac{a\Gamma(t+1)}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2(\pi/M)} \right)^{t+1} d\theta \right] \gamma_0^{-(t+1)}$$

当采用 M -QAM 调制时,系统平均误符号率为

$$P_{E, \text{MQAM}} = \left[C(t) \left(\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2(t+1)} d\theta - \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \int_0^{\pi/4} (\sin \theta)^{2(t+1)} d\theta \right) \right] \cdot \gamma_0^{-(t+1)}$$

其中 $C(t) = \frac{4a\Gamma(t+1)\sqrt{M}-1}{\pi\sqrt{M}} \left(\frac{2(M-1)}{3} \right)^{t+1}$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ 。

3 性能分析

根据引理 1,为了得到高信噪比时采用选择性放大传送协议的协同通信系统的平均误符号率性能表达式,需要分析输出信噪比 γ 的概率密度函数 $p(\gamma)$ 在零点附近的特性,为此我们首先推导两个重要的数学定理。

定理 1 设统计独立的非负随机变量 X, Y 的概率密度函数分别为 $P_X(x), P_Y(y)$, 它们在零点可以展开为 $P_X(x) = ax^t + o(x^{t+\epsilon}), P_Y(y) = by^t + o(y^{t+\epsilon})$, 其中 $a > 0, b > 0, t \geq 0, \epsilon > 0$ 。现定义随机变量 Z 如下: $Z = \frac{XY}{X+Y}$, 则 Z 的概率密度函数在零点可以展开为 $P_Z(z) = (a+b)z^t + o(z^{t+\epsilon})$ 。

证明 设 X, Y, Z 的 CDF 分别为 $F_X(x), F_Y(y), F_Z(z)$, 由于随机变量的 CDF 是 PDF 的积分,因此 $F_X(x), F_Y(y)$ 在零点可以展开为

$$F_X(x) = \frac{a}{t+1} x^{t+1} + o(x^{t+1+\epsilon}), F_Y(y) = \frac{b}{t+1} y^{t+1} + o(y^{t+1+\epsilon})$$

另一方面根据定义有

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P_Z(Z \leq z) = P\left(\frac{XY}{X+Y} \leq z\right) \\ &= P\left(X \leq z, Y \geq \frac{Xz}{X-z}\right) + P\left(X > z, Y \leq \frac{Xz}{X-z}\right) \end{aligned}$$

当 $X < z$ 时, $\frac{Xz}{X-z} < 0$, 由于 Y 是非负的随机变量,因此

$$P\left(X \leq z, Y \geq \frac{Xz}{X-z}\right) = P(X \leq z) = F_X(z)$$

而当 $z \rightarrow 0$ 时, $\frac{Xz}{X-z} \rightarrow z$, 因此在零点附近有

$$\begin{aligned} P\left(X > z, Y \leq \frac{Xz}{X-z}\right) &\approx P(X > z, Y \leq z) \\ &= P(X > z)P(Y \leq z) = (1 - F_X(z))F_Y(z) \end{aligned}$$

于是当 $z \rightarrow 0$ 时,

$$F_Z(z) = F_X(z) + (1 - F_X(z))F_Y(z) = \frac{a+b}{t+1} z^{t+1} + o(z^{t+1+\epsilon})$$

根据上式,随机变量 Z 的概率密度函数在零点可以展开为 $P_Z(z) = (a+b)z^t + o(z^{t+\epsilon})$ 。

定理 2 设 $X_k, k = 1, 2, \dots, K$, 为统计独立非负随机变量,其 PDF 在零点可以展开为 $P_{X_k}(x) = a_k x^{t_k} + o(x^{t_k+\epsilon})$ 。令随机变量 $Z = \max_k X_k$, 则其 PDF 在零点可以展开为

$$P_Z(z) = \left(\prod_{k=1}^K \frac{a_k}{t_k + 1} \right) \left(\sum_{k=1}^K (t_k + 1) \right) z^{\sum_{k=1}^K t_k + K - 1} + o\left(z^{\sum_{k=1}^K t_k + K - 1 + \epsilon} \right)$$

证明 设 X_k, Z 的 CDF 分别为 $F_{X_k}(x), F_Z(z)$, 根据 Z 的定义

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(\max_k X_k < z)$$

$$= \prod_{k=1}^K P(X_k < z) = \prod_{k=1}^K F_{X_k}(z)$$

根据随机变量的 PDF 与 CDF 的关系, $F_{X_k}(x)$ 在零点可

以表示为

$$F_{X_k}(x) = \frac{a_k}{t_k + 1} x^{t_k + 1} + o(x^{t_k + 1 + \varepsilon})$$

因此 $F_Z(z)$ 在零点可以表示为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \prod_{k=1}^K \left(\frac{a_k}{t_k + 1} z^{t_k + 1} + o(z^{t_k + 1 + \varepsilon}) \right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^K \frac{a_k}{t_k + 1} \right) z^{\sum_{k=1}^K (t_k + 1)} + o\left(z^{\sum_{k=1}^K (t_k + 1) + \varepsilon} \right) \end{aligned}$$

对上式微分, 原命题即得证。

下面将根据上述定理分析采用选择性放大传送协议的协同通信系统在 Nakagami 信道下的平均误符号率性能。设信道变量 $h_{i,j}$, $i, j = s, d, 1, 2, \dots, K$, 服从参数为 $(G_{i,j}, m)$ 的 Nakagami 分布, 其中 $G_{i,j}$ 是终端 i 与终端 j 之间信道的平均增益。

则 $\gamma_{i,j}$, $i, j = s, d, 1, 2, \dots, K$, 的概率密度函数为

$$P_{\gamma_{i,j}}(\beta) = \frac{m^m}{\Gamma(m)\Omega_{i,j}^m} \beta^{m-1} e^{-\frac{m}{\Omega_{i,j}}\beta} \quad (3)$$

其中 $\Omega_{i,j} = G_{i,j}E_s/N_0$, $i, j = s, d, 1, 2, \dots, K$ 。在零点 $P_{\gamma_{i,j}}(\beta)$ 可以表示为

$$P_{\gamma_{i,j}}(\beta) = \frac{m^m}{\Gamma(m)\Omega_{i,j}^m} \beta^{m-1} + o(\beta^m) \quad (4)$$

令 $\tilde{\gamma}_k = \frac{\gamma_{s,k}\gamma_{k,d}}{\gamma_{s,k} + \gamma_{k,d}}$, 根据定理 1, $\tilde{\gamma}_k$ 的概率密度函数在

零点可以表示为

$$P_{\tilde{\gamma}_k}(\beta) = \frac{m^m}{\Gamma(m)} \left(\frac{1}{\Omega_{s,k}^m} + \frac{1}{\Omega_{k,d}^m} \right) \beta^{m-1} + o(\beta^m) \quad (5)$$

令 $\gamma_{\max} = \max_k \tilde{\gamma}_k$, 根据定理 2, γ_{\max} 的概率密度函数

在零点可以表示为

$$P_{\gamma_{\max}}(\beta) = \frac{Km^{mK-K+1}}{\Gamma^K(m)} \times \prod_{k=1}^K \left(\frac{1}{\Omega_{s,k}^m} + \frac{1}{\Omega_{k,d}^m} \right) \times \beta^{mK-1} + o(\beta^{mK}) \quad (6)$$

由于 $\gamma = \gamma_{s,d} + \gamma_{\max}$, 根据拉普拉斯变换的初值定理^[6], γ 的概率密度函数在零点可以表示为

$$\begin{aligned} P_{\gamma}(\beta) &= \frac{Km^{mK+m-K+1}\Gamma(mK)}{\Gamma^K(m)\Gamma(mK+m)\Omega_{s,d}^m} \times \prod_{k=1}^K \left(\frac{1}{\Omega_{s,k}^m} + \frac{1}{\Omega_{k,d}^m} \right) \\ &\quad \times \beta^{mK+m-1} + o(\beta^{mK+m}) \end{aligned} \quad (7)$$

为了便于和传统的 AP-AF 协议性能进行比较, 令 E_t 为所有协同终端以及信源终端的总发射功率, 由于在 S-AF 协议中, 只有一个协同终端参与协同, 因此 $E_t = 2E_s$ ^[8]。由于 $\Omega_{i,j} = G_{i,j}E_s/N_0$, 因此上式也可以表示为

$$\begin{aligned} P_{\gamma}(\beta) &= \frac{2^{mK+m} m^{mK+m-K+1} K \Gamma(mK)}{\Gamma^K(m) \Gamma(mK+m)} \\ &\quad \times \frac{A_1}{\bar{\gamma}^{mK+m}} \times \beta^{mK+m-1} + o(\beta^{mK+m}) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $A_1 = \frac{1}{G_{s,d}^m} \times \prod_{k=1}^K \left(\frac{1}{G_{s,k}^m} + \frac{1}{G_{k,d}^m} \right)$, $\bar{\gamma} = E_t/N_0$ 。至此我们已经得到了协同通信系统瞬时信噪比 γ 的概率密度函数在零

点的展开式, 于是根据引理 1, 当采用 M -PSK 调制时系统的平均误符号率为

$$P_{E,M\text{-PSK}}^{\text{S-AF}} = \frac{2^{mK+m} m^{mK+m-K+1} K \Gamma(mK) A_1}{\pi \Gamma^K(m) \bar{\gamma}^{mK+m}} \int_0^{(M-1)\pi/M} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2(\pi/M)} \right)^{mK+m} d\theta \quad (9)$$

类似地可以得到当采用 M -QAM 调制时的系统平均误符号率。从上式可以看到, 选择性放大传送协同协议的平均误符号率与 $\bar{\gamma}$ 的 $(mK+m)$ 次方成反比, 这意味着在 Nakagami 信道中, 选择性放大传送协同协议可以获得 $(mK+m)$ 阶分集效果。

4 计算机仿真

在仿真中, 假设终端之间的信道是独立同分布的, 具有相同的信道增益: $G_{s,k} = G_{k,d} = G_{s,d}$, $k = 1, 2, \dots, K$ 。信源终端发送的每一帧数据包包含 128bits, 信道在每一数据帧持续时间内保持不变, 数值仿真结果图中的信噪比定义为: $\text{SNR} = E_t G_{s,d} / K_C N_0$, 其中 K_C 为每个数据调制符号含有的比特数。

图 1 和图 2 中给出了数值仿真所得的系统平均误符号率与信噪比 SNR 的关系曲线, 其中协同终端数目为 2 个, Nakagami 信道 m 参数分别取为 $m=0.5, 1$ 和 2。图 1 中数据调制方式为 QPSK, 图 2 中为 16QAM。为便于比较, 图中还给出了通过理论分析所得的 S-AF 协议的误符号率理论曲线以及通过数值仿真所得的 AP-AF 协议的误符号率曲线。从图中可以看到在高信噪比时, 本文分析所得理论结果与数值仿真结果基本一致, 较好地反应出采用选择性放大传送协议的无线协同通信系统在不同情况下所获得的分集增益与分集阶数。例如对于具有两个协同终端的系统, 信道参数 $m=1$, 当 $\text{SNR} > 10\text{dB}$ 时, 数值仿真与理论分析结果之间的差距在 0.5dB 以内, 而当 m 较大时, 由于此时分集阶数较高, 因此理论曲线与仿真所得曲线需在较高信噪比时才表现出一致性。从仿真结果看, 在各种情况下, S-AF 协议的误符号率均低于 AP-AF 协议, 例如图 1 中, 信道参数 $m=1$, 误符号率为 10^{-5} 时, S-AF 协议取得了约 1dB 的性能改善, 可见 S-AF 是一种性能更好的协同协议。

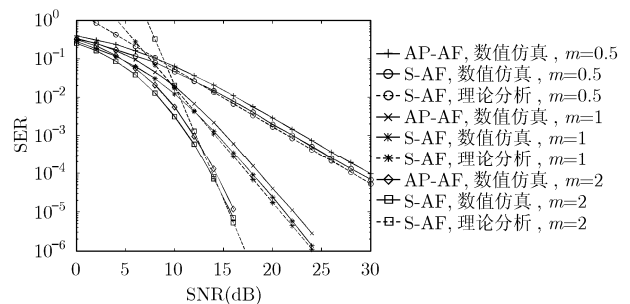


图 1 QPSK 调制, 2 个协同终端时的系统性能

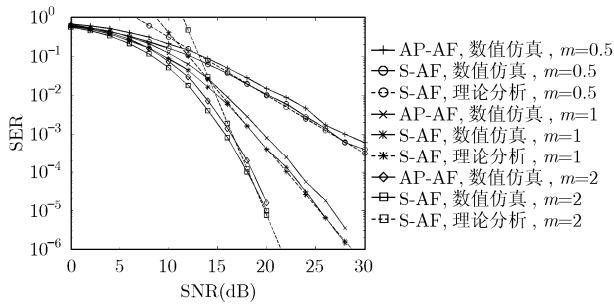


图2 16QAM 调制, 2 个协同终端时的系统性能

5 结束语

本文首先分析了两个统计独立非负随机变量的调和平均值的概率密度函数在零点的变化特性, 在此基础上, 采用参数量化方法, 推导了无线协同通信系统采用选择性放大传送协同协议时的性能, 并以 Nakagami 信道为例, 给出了系统的平均误符号率在高信噪比时的闭合表达式。数值仿真结果显示, 本文分析结果在高信噪比时和数值仿真结果基本一致。

参考文献

- [1] Nosratinia A, Hunter T E, and Hedayat A. Cooperative communication in wireless networks. *IEEE Commun. Mag.*, 2004, 42(10): 74-80.
- [2] Laneman J N, Tse D N C, and Wornell G W. Cooperative diversity in wireless networks: Efficient protocols and outage behavior. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 2004, 50(12):

3062-3080.

- [3] Zhao Yi, Adve R, and Lim T J. Improving amplify-and-forward relay networks: optimal power allocation versus selection. *IEEE International Symposium on Information Theory*, Washington, USA, 2006.
- [4] Karagiannidis G K, Tsiftsis T A, and Mallik R K. Bounds for multihop relayed communications in nakagami-m fading. *IEEE Trans. on Commun.*, 2006, 4(1): 18-22.
- [5] Karagiannidis G K, Tsiftsis T A, and Mallik R K, *et al.* Closed-form bounds for multihop relayed communications in Nakagami-m fading. *IEEE International Conference on Communications*, Seoul, Korea, May 2005, 4: 2362-2366.
- [6] Ribeiro A, Cai Xiaodong, and Giannakis G B. Symbol error probabilities for general cooperative links. *IEEE Trans. on Wireless Commun.*, 2005, 4(3): 1264-1273.
- [7] Wang Zhengdao and Giannakis G B. A simple and general parameterization quantifying performance in fading channels. *IEEE Trans. on Commun.*, 2003, 51(8): 1389-1398.
- [8] Zhao Yi, Adve R, and Lim T J. Symbol error rate of selection amplify-and-forward relay systems. *IEEE Commu. Letters*, 2006, 10(11): 757-759.

方朝曦: 男, 1982 年生, 博士生, 研究方向为多址接入、协同通信。

单杭冠: 男, 1982 年生, 博士生, 研究方向为无线传感器网络。

王宗欣: 男, 1940 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事移动通信、智能天线等研究。