

## 一种新的间歇混沌信号 Poincaré 映像判别方法

谢涛 魏学业

(北京交通大学电子信息工程学院 北京 100044)

**摘要:** 针对混沌振子微弱信号检测中间歇混沌信号的判别问题, 该文分析了噪声对 Poincaré截面的扰动影响, 提出一种基于 Poincaré映像的新方法, 并通过数值仿真对该方法进行了验证, 结果表明在强噪声作用下, 即使相空间分量输出波形难以进行判别, 该方法仍然能够实现间歇混沌发生频率的有效判别, 且抑制了混沌振子自发的短时间周期振荡现象, 实现了强噪声背景下微弱周期信号的快速有效检测。

**关键词:** 混沌振子; 微弱信号检测; 间歇混沌信号识别; Poincaré截面; Poincaré映像

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)09-2166-04

## A New Method of Intermittent Chaotic Signal Identification Based on Poincaré Map

Xie Tao Wei Xue-ye

(School of Electronics and Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** In view of intermittent chaotic signal identification problem for chaotic oscillator weak signal detection, noise disturbing effect on Poincaré section is analyzed, a new identification method based on a Poincaré map is proposed and numerical simulation is done in order to validate this method. The result shows that this method archives effective identification to intermittent chaotic signal frequency, even when the output wave of phase component is hard to identify. The short-time periodic chaotic self-oscillation is restrained, a swift and validate weak signal detection under strong noise background is realized.

**Key words:** Chaotic oscillator; Weak signal detecting; Intermittent chaotic signal identification; Poincaré section; Poincaré map

### 1 引言

传统的微弱信号检测方法是基于线性的、确定性的系统, 而混沌理论的发展为微弱信号检测提供了新的信号提取方法。Duffing 振子方程在混沌到大尺度周期的分岔行为具有对小信号的敏感性和对噪声免疫的特性, 这种特性被广泛应用于微弱信号检测方法研究。Brown 等人首先提出了应用 Duffing 振子的传感机理<sup>[1]</sup>, Wang 对这种方法进行了改进, 通过弱周期信号引发的间歇混沌实现了一个频段内的微弱信号的检测<sup>[2]</sup>, 李月等人的研究则侧重于混沌振子对强噪声中极微弱固定频率信号的检测<sup>[3,4]</sup>。虽然这些检测方法的侧重点不同, 但都是基于混沌系统的相变进行微弱信号检测判别, 因此混沌系统相变判别成为这种检测方法实现的关键。基于间歇混沌信号则能够对一个频段内的信号进行检测, 而基于混沌到周期的相变检测方法可以实现更低信噪比条件下的信号检测, 仅从状态判别的角度来看, 间歇混沌信号的判别难度更大一些, 且适用于间歇混沌信号判别的方法也可实现单纯的混沌到周期的判别。目前研究主要集中于对混沌和周期状态的判别, 而对间歇混沌信号的判别问题研究较

少, 主要有 Lyapunov 指数的识别方法和双振子差分方法<sup>[5,6]</sup>, 但这些方法需要在求解微分方程后进行大量的计算以进行信号特性的判别。本文提出一种基于 Poincaré映像的新的间歇混沌状态判别方法, 仅需要时间点的抽取后进行简单判断即可在时域无法分辨间歇混沌特性的情况下进行有效判别, 且同样适用混沌到周期状态的判别。

### 2 Duffing 方程

本文采用与文献[2]相同的 Duffing-Holmes 方程进行研究, 方程形式如下:

$$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) - x(t) + x^3(t) = a \cos(t) \quad (1)$$

式中  $k > 0$  是阻尼系数,  $a \cos(t)$  是周期策动力。

图 1 显示了固定  $k = 0.5$ ,  $a$  从 0 到 1 增加时系统相空间分量  $x$  的分岔图。如图所示, 当  $k$  固定,  $a$  逐渐增加时, 该方程经历倍周期分岔、混沌、大尺度周期状态<sup>[7]</sup>, 且当  $a$  超过一定阈值时, 混沌吸引子突然消失, 迅速从混沌态变为大尺度周期态, 此时的相变对同频率的信号非常敏感, 微小的幅值增量即能促成相变的发生, 而对不同频率的信号和噪声具有很强的免疫力。从分岔图上可以直观地看出在一个临界点系统状态的快速变化, 由于分岔图显示一定时间轨迹的累加, 为了定量地分析分岔行为的突然变化, 此处引入最大

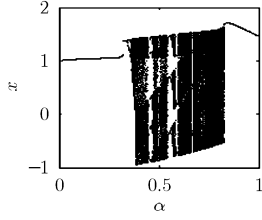


图1 分岔图

Lyapunov 指数, 最大 Lyapunov 指数表示了相轨迹的分离程度, 即混沌系统的最大 Lyapunov 指数大于零。利用 Wolf 方法计算方程的最大 Lyapunov 指数<sup>[8]</sup>, 图 2(a)表示了  $k = 0.5$ ,  $a$  从 0 到 1 增加时系统的最大 Lyapunov 指数的变化, 图中显示  $a$  超过一定阈值时最大 Lyapunov 指数迅速减小到小于零的状态, 实现混沌到周期的变化; 图 2(b)显示对周期策动力叠加强度为 0.3 白噪声时的最大 Lyapunov 指数的变化, 噪声对最大 Lyapunov 指数起到了平滑的作用, 但是一定噪声强度作用下没有改变系统的分岔行为的趋势, 当  $a$  超过一定阈值时, 最大 Lyapunov 指数迅速减小到小于零的状态, 实现混沌到周期的变化。

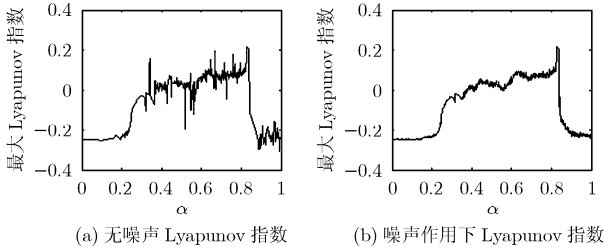


图2

### 3 Poincaré 截面

#### 3.1 Poincaré 截面

Poincaré 截面可将  $N$  维的连续动力系统化为  $N - 1$  维的离散动力系统研究, 所得截面上点的演化构成了 Poincaré 映像, Poincaré 截面的取法不是唯一的, 不同的截取方法表现了系统在不同角度下的动力行为, 将方程(1)变换为三维自治系统, 相空间扩展为  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_2 + x_1 - x_1^3 + a \cos(\theta) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (2)$$

定义 Poincaré 截面  $P: \Sigma_\theta \rightarrow \Sigma_\theta$

$$P: (x_1(0), x_2(0)) \rightarrow (x_1(T), x_2(T)) \quad (3)$$

其中  $T = 2\pi$ ,  $(x_1(t), x_2(t))$  为式(2)的解。

此处参考文献[9]的方法, 分析白噪声对所定义的 Poincaré 截面的影响, 设  $\Delta x(t)$  表示噪声对  $x(t)$  的小扰动, 从而得出在噪声存在的情况下式(1)的随机微分方程为

$$\begin{aligned} (\ddot{x} + \Delta \ddot{x}) + k(\dot{x} + \Delta \dot{x}) - (x + \Delta x) + (x + \Delta x)^3 \\ = a \cos(t) + n(t) \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $n(t)$  为噪声,  $E\{n(t)\} = 0$ 。

式(1)和式(4)联立, 得

$$\Delta \ddot{x} + k\Delta \dot{x} - \Delta x + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 = n(t)$$

由于  $\Delta x(t)$  很小, 所以可以略去  $\Delta x(t)$  的高阶无穷小, 并令  $c(t) = 1 - 3x^2$  得

$$\Delta \ddot{x} + k\Delta \dot{x} - c(t)\Delta x = n(t) \quad (5)$$

将上式写成矢量的形式:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (6)$$

$$\text{其中 } \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & -k \end{bmatrix}, \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ n(t) \end{bmatrix}.$$

它的解为

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, u)\mathbf{N}(u)du$$

其中  $\Phi$  是系统的状态转移矩阵, 由于第 1 项为暂态解, 将很快衰减为零, 故只考虑第 2 项, 因此得到

$$\mathbf{X}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, u)\mathbf{N}(u)du \quad (7)$$

进而得出所关心的两个量:  $\mathbf{X}(t)$  的均值为  $E\{\mathbf{X}(t)\} = 0$ ,  $\mathbf{X}(t)$  同一时刻的相关函数为  $\Gamma_{XX}(t+nT, t+nT) = \Gamma_{XX}(t, t)$ 。

从分析的结论可知, 白噪声作用下相空间中周期  $T = 2\pi$  的 Poincaré 截面上个的点均值为零, 方差相等, 亦即所定义 Poincaré 截面上的点具有相同的统计特性。

#### 3.2 数值仿真分析

设  $k = 0.5$ ,  $a = 0.82$ , 初值  $x_1(0) = 1.0$ ,  $x_2(0) = 0$ , 所定义的 Poincaré 截面如图 3(a)所示, 显示混沌吸引子的形状, 系统工作于混沌状态, 对周期策动力叠加强度为 0.3 白噪声, Poincaré 截面如图 3(b)所示, 噪声对 Poincaré 截面上的点具有扰动作用, 导致了分岔行为难以准确判断, 这与文献[10]的结论是一致的。在  $a = 0.83$ , 无噪声, 而其他参数不变的情况下, 系统处于周期态, Poincaré 截面收敛于一点, 位于图 3(c)中圆圈的中心, 而此时对周期策动力叠加强度为 0.3 白噪声, 噪声使其产生了分散的作用, 且在  $x_2$  分量上具有更大的分散性。

### 4 间歇混沌信号识别方法

为了适合不同频率信号的检测对式(1)进行尺度变换, 令  $x_1 = x$ ,  $x_2 = (1/\omega)(dx/d\tau)$ , 则变化后的方程加入待检测微弱正弦信号及噪声干扰可写成状态方程形式:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = \omega x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \omega(-kx_2 + x_1 - x_1^3 + a \cos(\omega\tau) + a_1 \cos((\omega + \Delta\omega)\tau) + \sigma n(\tau)) \end{cases} \quad (8)$$

式中  $a \cos(t)$  是参考信号,  $a_1 \cos((\omega + \Delta\omega)\tau)$  是待检测微弱周期正弦信号,  $n(t)$  是白噪声,  $\sigma$  为噪声强度。

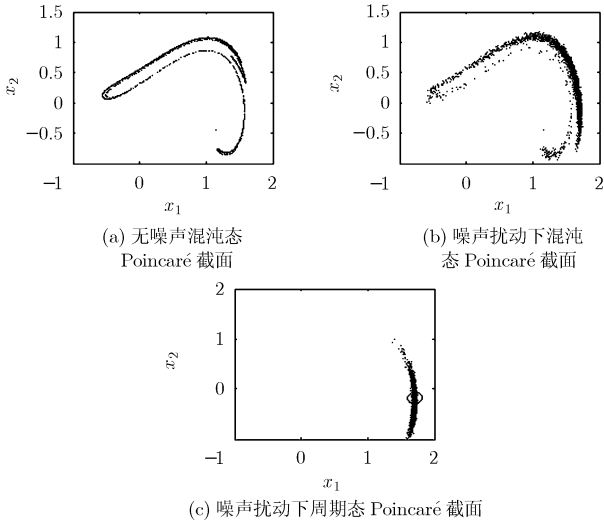


图3

设  $k = 0.5$ ,  $\omega = 1.0$ ,  $\Delta\omega = 0.02$ ,  $a = 0.82$ ,  $a_1 = 0.02$ ,  $\sigma = 0$ , 初值  $x_1(0) = 1.0$ ,  $x_2(0) = 0$ , 应用四阶 Runge-Kutta 法求解微分方程(每  $T = 2\pi/\omega$  周期取 100 个点),  $a_1$  和  $\Delta\omega$  的作用导致了间歇混沌状态的产生,  $x_1$  分量时域波形如图 4 所示, 由于间歇混沌的产生周期为  $2\pi/\Delta\omega$ , 所以通过测量间歇混沌的周期, 可得  $\Delta\omega$ , 进而得到待检测信号的频率值<sup>[2]</sup>.

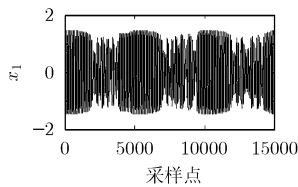


图4 间歇混沌信号

从上边的分析可知, 系统处于混沌和大尺度周期时其 Poincaré截面上的点分别处于奇怪吸引子的有界发散状态和一周期点的收敛状态, 这样可以利用 Poincaré截面对混沌和大尺度周期进行区分, 为了实现计算机的自动识别, 需要借助 Poincaré截面上点的变化, 即借助 Poincaré映像实现间歇混沌信号的识别. 令  $P : (x_1(\pi/2), x_2(\pi/2)) \rightarrow (x_1(T + \pi/2), x_2(T + \pi/2))$ , 取图 4 信号的 Poincaré映像如图 5(a)和图 5(b)所示, 两个分量都将混沌和周期的区域进行了明显

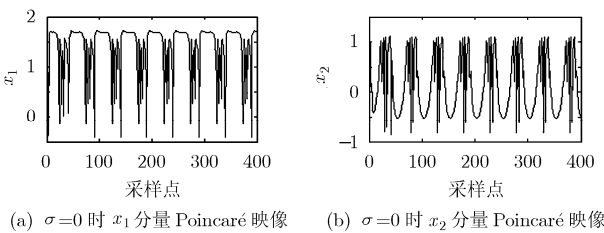


图5

区分, 在上一节的分析中指出在噪声作用下  $x_2$  分量具有更大的分散性, 且从图中可以看出  $x_1$  分量更易于计算机的自动处理, 因此选用第 1 个分量进行间歇混沌信号判别.

加入一定强度的白噪声, 令  $\sigma = 0.3$ , 其余参数同上边的仿真分析, 图 6(a)表示相空间中  $x_1$  分量的部分时域波形, 从图中可以看出, 在这种强度噪声作用下, 有些部分的混沌状态与周期状态已经难以区分, 另用 Poincaré映像进行分析, 输出如图 6(b)所示, 混沌和大周期得到了明显的区分. 由于  $(\omega + \Delta\omega)/\omega > 1.03$  时将难以产生间歇混沌状态, 则一个间歇混沌信号周期至少包含 33 个振荡周期, 在检测过程中可规定 Poincaré映像的值连续 15 个大于 1, 则该区段判为周期状态, 以滤除小区域的扰动信号. Duffing 振子中具有一个幅值较大的周期策动力, 即使处于混沌状态, 周期策动力的影响也是不可避免的, 在参考信号所设的临界状态可短时间出现周期振荡现象, 而此处所采用的滤波方法对短时间的周期振荡起到了抑制作用. 对图 6(b)的数据依据该方法处理结果如图 6(c)所示, 从图上可以看出, 在 400 个  $\omega = 1.0$  的信号周期内基本包含了 8 个整周期脉冲, 则  $\Delta\omega = \omega \times 8 / 400 = 0.02$ ,  $\Delta\omega$  的符号则需混沌振子阵列来确定<sup>[2]</sup>. 而在  $\sigma = 0.5$  时, 相空间分量的时域波形已经无法判别间歇混沌信号时, 图 6(d)显示该方法依然得到了较好的结果, 只是逐渐无法实现脉冲的等周期变化, 且产生了错位现象.

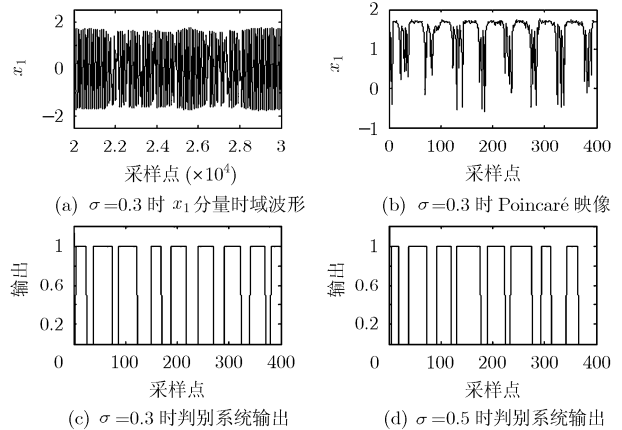


图6

该间歇混沌信号的判别方法在检测系统中便于实现, 在微弱信号检测过程中, 设定一定的时间门限, 计算门限时间内的脉冲数即可得到待检测周期信号与参考周期信号的频率差, 从而实现微弱信号的检测, 门限值越长检测精度越高, 但检测时间也越长. 这种方法是基于间歇混沌信号提出的, 但其同样适用于单纯的混沌系统相变的判别, 在第 3 节的分析中已指出所定义 Poincaré截面上的点具有相同的统计特性, 且均值为零, 所以可采用多点积分的方法实现对 Poincaré截面的噪声滤除, 实现更低信噪比条件下的相变判别.

## 5 结束语

文中提出了一种基于 Poincaré 映像的间歇混沌信号识别方法,解决了基于 Duffing 振子的微弱周期信号检测中间歇混沌状态难以判别的问题。数值仿真验证了该方法的有效性,结果表明,在强噪声作用下,即使时域波形已经难以区分混沌与周期的边界,该方法仍然可以实现状态的有效识别,并对混沌振子方程位于临界混沌状态时的短时间的周期振荡具有很好的抑制作用,且该方法在检测系统中易于实现。

## 参考文献

- [1] Brown R, Chua L, and Popp B. Is sensitive dependence on initial conditions nature's sensory device? [J]. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 1992, 2(1): 193-199.
  - [2] Wang Guan-yu, Chen Da-jun, and Lin Jian-ya, *et al.* The application of chaotic oscillators to weak signal detection. *IEEE Trans. on Industrial Electronics* [J]. 1999, 46(2): 440-444.
  - [3] 李月, 杨宝俊, 石要武, 等. 纳伏级正弦信号的混沌检测方法研究. *通信学报*, 2003, 24(4): 25-30.  
Li Yue, Yang Bao-jun, and Shi Yao-wu, *et al.* Study on chaotic detection method of nV-level sine signal. *Journal of China Institute of Communications*, 2003, 24(4): 25-30.
  - [4] 李月, 路鹏, 杨宝俊, 等. 用一类特定的双耦合 Duffing 振子系统检测强噪声背景中的周期信号 [J]. *物理学报*, 2006, 55(4): 1672-1677.  
Li Yue, Lu Peng, and Yang Bao-jun, *et al.* Applying a special kind of two coupled Duffing oscillator system to detect periodic signals under the background of strong colored noise. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(4): 1672-1677.
  - [5] 赵华, 尹成群, 尚秋峰, 等. 双振子差分混沌特性判断方法 [J]. *中国电机工程学报*, 2006, 26(23): 32-35.  
Zhao Hua, Yin Cheng-qun, and Shang Qiu-feng, *et al.* Two-oscillator-difference-chaotic-identification method [J]. *Proceeding of the CSEE*, 2006, 26(23): 32-35.
  - [6] 刘丁, 任海鹏, 李虎明, 等. 基于 Lyapunov 指数的弱周期信号检测 [J]. *仪器仪表学报*, 2005, 26(12): 1215-1243.  
Liu Ding, Ren Hai-peng, and Li Hu-ming. Weak signal detection based on Lyapunov exponents [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2005, 26(12): 1215-1243.
  - [7] Kao Yao Huang, Huang Jeun Chyuan, and Gou Yi Shun. Persistent properties of crisis in a Duffing oscillator [J]. *Physical Review A*, 1987, 35(12): 5228-5232.
  - [8] Wolf A, Swift J B, and Swinney H L, *et al.* Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. *Physica*, 1985, 16D: 285-317.
  - [9] 王冠宇, 陈大军, 林建亚, 等. Duffing 振子微弱信号检测方法的统计特性研究 [J]. *电子学报*, 1998, 26(10): 38-44.  
Wang Guan-yu, Chen Da-jun, and Lin Jian-ya, *et al.* The statistical characteristic of weak signal detection based on Duffing oscillator. *Acta Electronica Sinica*, 1998, 26(10): 38-44.
  - [10] Serletis A, Shahmoradi A, and Serletis D. Effect of noise on the bifurcation behavior of nonlinear dynamical systems [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 33(3): 914-921.
- 谢涛: 男, 1978年生, 博士生, 研究方向为信号处理、微弱信号检测技术。  
魏学业: 男, 1963年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性理论、无线传感网络及信号检测技术。