

## 最小范数准则在多目标 DOA 跟踪中的应用

张怀根 张林让 吴顺君 刘寅

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 该文分析了协方差矩阵的内部结构, 得到了一种具有较低运算量的基于范数最小准则的多目标 DOA 跟踪算法。进一步, 在其基础上通过解一组线性方程组得到了不同时间段各个目标的回波功率。此算法适用于各个目标的回波功率随时间变化的情况, 可以对各个目标的 DOA 和功率进行联合跟踪。仿真结果表明该算法具有较高的跟踪性能。

**关键词:** DOA 跟踪; 多目标跟踪; 联合跟踪; 最小范数

**中图分类号:** TP391

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2009)02-0279-04

## Tracking DOA of Multiple Targets Based on a Matrix Norm Minimization Technique

Zhang Huai-gen Zhang Lin-rang Wu Shun-jun Liu Yin

(National Lab of Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** Analyzing the inner configuration of the covariance matrix, a new multiple targets DOA tracking algorithm is presented based on a matrix norm minimization technique. Furthermore, by solving a set of linear equations, the power of each target is got at different time. This algorithm can be applied when the power of each target changes with time, and it can track the angles and power jointly. Simulation results show the method has high performance in tracking.

**Key words:** DOA tracking; Multiple targets tracking; Joint tracking; Norm minimization

### 1 引言

DOA 估计是阵列信号处理的重要内容, 其代表性算法有 MUSIC<sup>[1]</sup>, ESPRIT<sup>[2]</sup>等, 然而这些算法往往只用来分析当目标处于静止状态的情况。当目标的角度随着时间变化时, 由于这些算法要重复地对协方差矩阵进行特征值分解或奇异值分解, 因此从运算量上来讲这是不切实际的。为了解决这一问题, 最近十年来, 子空间跟踪技术<sup>[3-6]</sup>得到了广泛的研究。这些算法利用当前时刻接收到的数据对先前估计的子空间进行更新, 具有较小的运算量。但要想完成 DOA 的跟踪过程还需要完成以下两个任务: 首先当得到信号子空间时, 要运用 MUSIC 或 ESPRIT 算法来估计各个目标的 DOA; 其次前后时刻估计得到的角度并不是自动关联的, 此时需要使用数据关联算法<sup>[7]</sup>, 其运算量为  $N!$  ( $N$  为目标个数)。当目标的个数很多时, 其运算量也相当大。

为了避免数据关联这一过程, 不少学者也提出了一些算法, 文献[8]将 PASTd 算法与卡尔曼算法相结合, 文献[9-12]均是采用最大似然方法, 文献[13]将构建的协方差矩阵与估计得到的协方差矩阵差的范数作为一代价函数, 然后再利用一些最优化算法(如高斯-牛顿法、共轭梯度法)最小化代价函

数得到各个目标的角度。这些算法在一定条件下均可避免运算量较大的数据关联过程。

本文通过分析协方差矩阵的内部构成, 简化了文献[13]中的代价函数, 降低了运算量并且将简化以后的算法称之为算法 1。我们注意到文献[13]中都是假设各个目标的回波功率是不随时间变化的, 而这种假设在实际中往往不能满足。本文提出的算法 2 不需要这种假设, 可以对各个目标的角度和功率进行联合跟踪。

### 2 数学模型

众所周知,  $M$  个等间距放置的阵元在  $t$  时刻的输入信号为

$$\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \ r_2(t) \ \cdots \ r_M(t)]^T = \mathbf{A}(t)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{A}(t) = [\mathbf{a}_1(t) \ \mathbf{a}_2(t) \ \cdots \ \mathbf{a}_N(t)]; \ \mathbf{a}_i(t) = [1 \ e^{-j\Phi_i(t)} \ e^{-j2\Phi_i(t)} \ \cdots \ e^{-j(M-1)\Phi_i(t)}]^T;$$

$$\Phi_i(t) = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_i(t), \ d \text{ 为阵元间距, } \lambda \text{ 为波长, } \theta_i(t) \text{ 表}$$

示  $t$  时刻第  $i$  个目标的 DOA。

$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \cdots \ s_N(t)]^T$ ,  $s_i(t)$  为第  $i$  个目标的窄带回波信号。

$\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \cdots \ n_M(t)]^T$ ,  $n_i(t)$  为第  $i$  个阵元的观测噪声, 上标“T”表示转置。

2007-09-13 收到, 2008-02-04 改回

国家自然科学基金(60672130)和教育部新世纪优秀人才支持计划资助课题

假设阵元噪声  $n_i(t)$  为零均值、方差为  $\sigma^2$  的互不相关的高斯过程，并且与回波信号不相关，那么阵元协方差矩阵可写为

$$\mathbf{R}(t) = E[\mathbf{r}(t)\mathbf{r}^H(t)] = \mathbf{A}(t)\mathbf{R}_s(t)\mathbf{A}^H(t) + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2)$$

式(2)中  $\mathbf{R}_s(t) = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ ，表示  $t$  时刻回波信号的协方差矩阵； $\mathbf{I}$  为一个  $M \times M$  的单位矩阵，上标“H”表示共轭转置。

当各个目标的 DOA 变化是一个慢变过程时，在  $[(n-1)T, nT]$  这一段时间内各个目标的 DOA 可以看作近似不变，并且在这一段时间内可以得到  $Q$  个快拍，此时记  $nT$  时刻估计得到的阵元协方差矩阵为

$$\hat{\mathbf{R}}(nT) = \frac{1}{Q} \sum_{k=1}^Q \mathbf{r} \left( nT - \frac{kT}{Q} \right) \mathbf{r}^H \left( nT - \frac{kT}{Q} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

本文正是通过估计得到的阵元协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}(nT)$  完成了对各个目标 DOA  $\theta_i(nT)$  以及信号协方差矩阵  $\mathbf{R}_s(nT)$  的跟踪。

### 3 基于范数最小原则的多目标 DOA 跟踪算法

#### 3.1 $\mathbf{R}_s(t)$ 不随时间而变化

文献[13]在假设  $\mathbf{R}_s(t)$  不随时间而变化的情况下通过最小化下面的代价函数得到了不同时刻各个目标的 DOA。

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}(nT)) &= \|\hat{\mathbf{R}}(nT) - \mathbf{R}(nT)\|_F^2 \\ &= \|\hat{\mathbf{R}}(nT) - \mathbf{A}(nT)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(nT) - \sigma^2\mathbf{I}\|_F^2, \\ & \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

将  $\mathbf{R}(nT)$  展开可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(nT) &= \mathbf{A}(nT)\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H(nT) + \sigma^2\mathbf{I} = \\ & \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N p_i + \sigma^2 & \sum_{i=1}^N p_i e^{j\Phi_i(nT)} & \dots & \sum_{i=1}^N p_i e^{j(M-1)\Phi_i(nT)} \\ \sum_{i=1}^N p_i e^{-j\Phi_i(nT)} & \sum_{i=1}^N p_i + \sigma^2 & \dots & \sum_{i=1}^N p_i e^{j(M-2)\Phi_i(nT)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N p_i e^{-j(M-1)\Phi_i(nT)} & \sum_{i=1}^N p_i e^{-j(M-2)\Phi_i(nT)} & \dots & \sum_{i=1}^N p_i + \sigma^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\Phi_i(nT) = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_i(nT)$ ； $\mathbf{R}_s = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_N)$  为已知量。

通过观察式(5)，注意到此式只有  $2(M-1)+1$  个不同的元素，对角线上的元素不包含角度信息，上对角线和下对角线的元素互为共轭。因此，从矩阵元素的角度出发，式(5)只有  $(M-1)$  个独立的元素。不失一般性，取出式(5)第 1 行的元素(第 1 个元素除外)并且记为  $\mathbf{b}(nT) = \left[ \sum_{i=1}^N p_i e^{j\Phi_i(nT)} \right.$

$\left. \sum_{i=1}^N p_i e^{j2\Phi_i(nT)} \dots \sum_{i=1}^N p_i e^{j(M-1)\Phi_i(nT)} \right]$ ，则新的代价函数  $J'(\boldsymbol{\theta}(nT))$  为

$$J'(\boldsymbol{\theta}(nT)) = \|\hat{\mathbf{b}}(nT) - \mathbf{b}(nT)\|_F^2 \quad (6)$$

其中  $\hat{\mathbf{b}}(nT)$  为  $\hat{\mathbf{R}}(nT)$  第 1 行的元素(第 1 个元素除外)。为了最小化式(6)，需要计算出  $J'(\boldsymbol{\theta}(nT))$  的梯度  $\nabla J'(\boldsymbol{\theta}(nT))$ 。将式(6)展开可得：

$$J'(\boldsymbol{\theta}(nT)) = \sum_{k=1}^{M-1} \{C_k^2(nT) + D_k^2(nT)\} \quad (7)$$

其中  $C_k(nT) = \sum_{i=1}^N p_i \cos(k\Phi_i(nT)) - x_k(nT)$ ； $D_k(nT) = \sum_{i=1}^N p_i \sin(k\Phi_i(nT)) - y_k(nT)$ 。这里  $x_k(nT)$  为  $\hat{\mathbf{b}}(nT)$  第  $k$  个元素的实部， $y_k(nT)$  为  $\hat{\mathbf{b}}(nT)$  第  $k$  个元素的虚部。

由式(7)可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial J'(\boldsymbol{\theta}(nT))}{\partial \theta_i(nT)} &= \sum_{k=1}^{M-1} \left\{ 2C_k(nT) \frac{\partial C_k(nT)}{\partial \Phi_i(nT)} \frac{\partial \Phi_i(nT)}{\partial \theta_i(nT)} \right. \\ & \quad \left. + 2D_k(nT) \frac{\partial D_k(nT)}{\partial \Phi_i(nT)} \frac{\partial \Phi_i(nT)}{\partial \theta_i(nT)} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)中  $\frac{\partial C_k(nT)}{\partial \Phi_i(nT)} = \sum_{i=1}^N -p_i k \sin(k\Phi_i(nT))$ ； $\frac{\partial D_k(nT)}{\partial \Phi_i(nT)} = \sum_{i=1}^N p_i k \cdot \cos(k\Phi_i(nT))$ ； $\frac{\partial \Phi_i(nT)}{\partial \theta_i(nT)} = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta_i(nT)$ 。

得到  $J'(\boldsymbol{\theta}(nT))$  的梯度  $\nabla J'(\boldsymbol{\theta}(nT))$  以后，通过各种基于梯度的优化算法(如牛顿法、高斯-牛顿法、共轭梯度法)可以得到不同时刻各个目标的 DOA  $\theta_i(nT)$ 。算法的具体步骤如下：

(1)在  $[0, T]$  这段时间内，利用式(3)估计出阵元协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}(T)$ ，再用高分辨方法(如 ESPRIT)估计出  $T$  时刻各个目标的 DOA  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(T)$ 、信号协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_s$ 。

(2)在  $[T, 2T]$  这段时间内，估计出阵元协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}(2T)$ ，利用式(6)得到目标函数  $J'(\boldsymbol{\theta}(2T))$ ，由式(8)得到其相应的梯度。

(3)把  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(T)$  作为初值，利用共轭梯度法最小化  $J'(\boldsymbol{\theta}(2T))$ ，得到  $t = 2T$  时刻各个目标的 DOA  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(2T)$ 。

(4)重复步骤(2)，步骤(3)，得到  $t = 3T, t = 4T, \dots$  时各个目标的 DOA  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(3T), \hat{\boldsymbol{\theta}}(4T), \dots$ 。

上述方法其实是文献[13]的一种改进方法，相对于文献[13]主要有如下优点：(1)不需要估计阵元噪声功率，避免了由于阵元噪声功率估计不准带来的误差。(2)代价函数大大简化，算法具有较小的运算量。

为了后面的比较，称这种简化以后的算法为算法 1。

#### 3.2 $\mathbf{R}_s(t)$ 随时间而变化

文献[13]和本文的改进算法都是假设信号的协方差矩阵  $\mathbf{R}_s(t)$  不随时间而变化。实际上，这往往难于满足。为了解决这一问题，本文在最小化  $J'(\boldsymbol{\theta}(nT))$  时做如下的近似：

$$\mathbf{R}_s(nT) \approx \mathbf{R}_s((n-1)T) \quad (9)$$

将式(9)代入  $J'(\boldsymbol{\theta}(nT))$  并将其最小化得到  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(nT)$ ，再将  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(nT)$  代入以下方程组，

$$\left. \begin{aligned} p_1(nT)e^{\hat{\phi}_1(nT)} + p_2(nT)e^{\hat{\phi}_2(nT)} + \dots + p_N(nT)e^{\hat{\phi}_N(nT)} &= \hat{b}_1(nT) \\ p_1(nT)e^{2\hat{\phi}_1(nT)} + p_2(nT)e^{2\hat{\phi}_2(nT)} + \dots + p_N(nT)e^{2\hat{\phi}_N(nT)} &= \hat{b}_2(nT) \\ &\vdots \\ p_1(nT)e^{(M-1)\hat{\phi}_1(nT)} + p_2(nT)e^{(M-1)\hat{\phi}_2(nT)} &+ \dots + p_N(nT)e^{(M-1)\hat{\phi}_N(nT)} = \hat{b}_{M-1}(nT) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

解线性方程组可得:

$$\hat{\mathbf{p}}(nT) = \hat{\mathbf{H}}^\dagger(nT)\hat{\mathbf{b}}(nT) \quad (11)$$

其中

$$\hat{\mathbf{p}}(nT) = [\hat{p}_1(nT) \ \hat{p}_2(nT) \ \dots \ \hat{p}_N(nT)]^T$$

$$\hat{\mathbf{H}}(nT) = \begin{bmatrix} e^{\hat{\phi}_1(nT)} & e^{\hat{\phi}_2(nT)} & \dots & e^{\hat{\phi}_N(nT)} \\ e^{2\hat{\phi}_1(nT)} & e^{2\hat{\phi}_2(nT)} & \dots & e^{2\hat{\phi}_N(nT)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{(M-1)\hat{\phi}_1(nT)} & e^{(M-1)\hat{\phi}_2(nT)} & \dots & e^{(M-1)\hat{\phi}_N(nT)} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}}(nT) = [\hat{b}_1(nT) \ \hat{b}_2(nT) \ \dots \ \hat{b}_N(nT)]^T$$

上标“ $\dagger$ ”表示伪逆,  $\hat{\mathbf{H}}^\dagger(nT) = (\hat{\mathbf{H}}^H(nT)\hat{\mathbf{H}}(nT))^{-1}\hat{\mathbf{H}}^H(nT)$ 。

由此便估计得到了  $nT$  时刻的信号协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_s(nT) = \text{diag}(\hat{\mathbf{p}}(nT))$ 。

综上, 适合于信号协方差矩阵随着时间而变化的算法总结如下, 并且称之为算法 2:

(1) 在  $[0, T]$  这段时间内, 利用式(3)估计出阵元协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}(T)$ , 再用高分辨方法(如 ESPRIT)估计出  $T$  时刻各个目标的 DOA  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(T)$  及信号协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_s(T)$ 。

(2) 在  $[T, 2T]$  这段时间内, 估计出阵元协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}(2T)$ , 假设  $\hat{\mathbf{R}}_s(2T) \approx \hat{\mathbf{R}}_s(T)$  并且将其代入式(6)得到目标函数  $J'(\boldsymbol{\theta}(2T))$ , 同时由式(8)得到其相应的梯度。

(3) 把  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(T)$  作为初值, 利用共轭梯度法最小化  $J'(\boldsymbol{\theta}(2T))$ , 得到  $t = 2T$  时刻各个目标的 DOA  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(2T)$ 。

(4) 将  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(2T)$  代入式(10), 解线性方程组可得  $\hat{\mathbf{p}}(2T) = \hat{\mathbf{H}}^\dagger(2T)\hat{\mathbf{b}}(2T)$ , 从而得到  $2T$  时刻的信号协方差矩阵估计值  $\hat{\mathbf{R}}_s(2T) = \text{diag}(\hat{\mathbf{p}}(2T))$ 。

(5) 重复(2), (4), 便可以估计得到  $3T, 4T, \dots$  时各个目标的 DOA  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(3T), \hat{\boldsymbol{\theta}}(4T), \dots$  以及信号协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_s(3T), \hat{\mathbf{R}}_s(4T), \dots$ 。

#### 4 仿真结果及其分析

**仿真实验 1** 此场景中假设 3 个阵元跟踪 2 个目标, 阵元等间距放置且其间距为波长的一半; 一个目标的角度做线性变化, 另外一个目标的角度做正弦变化; 信号协方差不随时间而变化, 目标 1 的信噪比为 3dB, 目标 2 的信噪比为 6dB; 式(3)中的快拍数  $Q = 500$ 。图 1, 图 2 是本文算法 1 和文献 [13] 算法分别经过 100 次独立仿真以后的结果。

图 2 中均方误差的定义为:  $\Delta\theta = \sqrt{(\theta(1) - \hat{\theta}(1))^2 + (\theta(2) - \hat{\theta}(2))^2}$ , 其中  $\theta(1)$  和  $\hat{\theta}(1)$  分别为目标 1 的真值和估计值,  $\theta(2)$  和  $\hat{\theta}(2)$  为目标 2 的真值和估计值。

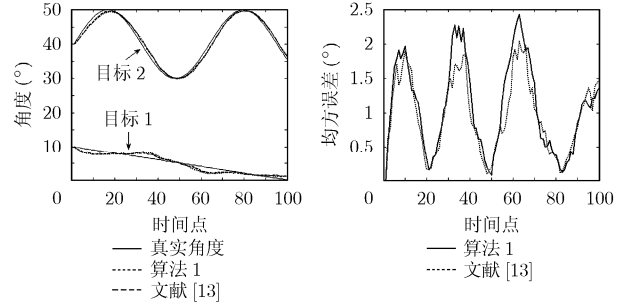


图 1 跟踪结果

图 2 均方误差

由仿真结果可以看出本文算法 1 的跟踪精度和文献 [13] 相当, 但算法 1 运算量要明显小于文献 [13] 算法。

**仿真实验 2** 信号协方差矩阵  $\mathbf{R}_s(t)$  随着时间而变化, 两个目标的角度变化和功率变化分别如图 3 和图 5 的实线所示, 其它条件如实验 1。算法 2 的仿真结果如图 3-图 6 所示:

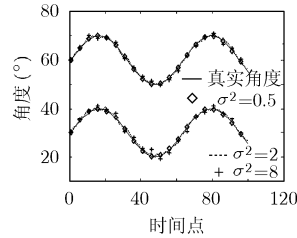


图 3 角度跟踪结果

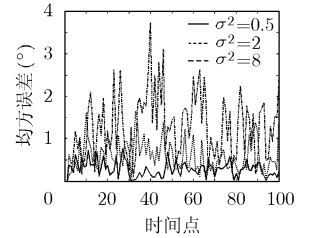


图 4 角度跟踪均方误差

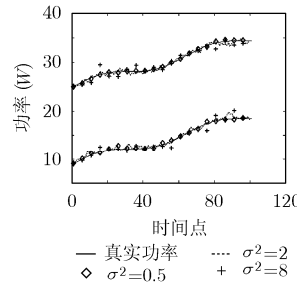


图 5 功率跟踪结果

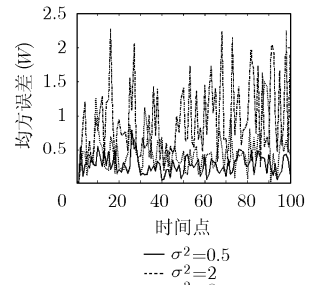


图 6 功率跟踪均方误差

图 3 和图 5 为不同阵元噪声功率下角度和功率跟踪结果, 图 4 和图 6 分别为角度和功率跟踪的均方误差。其中角度跟踪均方误差的定义如实验 1, 功率跟踪均方误差的定义为  $\Delta p = \sqrt{(p(1) - \hat{p}(1))^2 + (p(2) - \hat{p}(2))^2}$ ,  $p(1)$  和  $\hat{p}(1)$  为目标 1 功率的真值和估计值;  $p(2)$  和  $\hat{p}(2)$  为目标 2 功率的真值和估计值。由仿真结果可以看出当目标的功率随着时间变化时, 本文算法 2 可以有效地跟踪目标的角度和功率。

#### 5 结束语

本文通过分析阵元协方差矩阵的内部结构, 将文献 [13] 的代价函数简化得到了一种新的基于范数最小准则的多目标 DOA 跟踪算法。同时通过式(9)近似完成了对 DOA 和功率的联合跟踪。仿真结果表明了算法的有效性。

## 参考文献

- [1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. on Antennas Propagat.*, 1986, 34(3): 276-280.
- [2] Roy R and Kailath T. ESPRIT—Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, 1989, 37(7): 948-955.
- [3] Yang Bin. Projection approximation subspace tracking. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(1): 95-107.
- [4] Chan Shing-Chow. A robust past algorithm for subspace tracking in impulsive noise. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(1): 105-116.
- [5] Yang Jian. RLS-based adaptive algorithm for generalized eigen-decomposition. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(4): 1177-1188.
- [6] Badeau R. Fast approximated power iteration subspace tracking. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(8): 2931-2941.
- [7] 何友. 雷达数据处理及应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2006: 100-132.
- [8] Javier Sanchez-Araujo and Sylvie Marcos. An efficient PASTd-algorithm implementation for multiple direction of arrival tracking. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, 47(8): 2321-2324.
- [9] Rao C R. Tracking the direction of arrival of multiple moving targets. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(5): 1133-1144.
- [10] Satish A. Multiple target tracking using maximum likelihood principle. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(7): 1677-1694.
- [11] Zhou Yifeng. Tracking the direction-of-arrival of multiple moving targets by passive arrays: algorithm. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, 47(10): 2655-2666.
- [12] Zhou Yifeng. Tracking the direction-of-arrival of multiple moving targets by passive arrays: Asymptotic performance analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, 47(10): 2644-2654.
- [13] Sastry C R. An efficient algorithm for tracking the angles of arrival of moving targets. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1991, 39(1): 342-346.
- 张怀根: 男, 1980年生, 博士生, 研究领域为雷达信号处理、雷达目标跟踪.
- 张林让: 男, 1966年生, 教授, 博士生导师, 主要研究兴趣为自适应信号处理、阵列波达方向估计、方向图综合.
- 吴顺君: 男, 1942年生, 教授, 博士生导师, 长期从事雷达系统和雷达信号处理方面的教学和科研工作. 主要研究领域为雷达系统分析、建模与仿真、雷达信号处理.