

## 谐波恢复的联合对角化算法

聂卫科 冯大政 张斌

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 该文构造一组具有对角结构的特征矩阵, 提出一种新的迭代算法完成这组特征矩阵的联合对角化, 进而恢复出谐波频率。新方法将经典 ACDC 算法的四次代价函数简化为二次代价函数; 且每步迭代具有精确的最小二乘闭式解, 消除了 ACDC 算法的误差积累问题。仿真实验表明该方法估计性能优于 TLS-ESPRIT 算法和 ACDC 算法, 尤其在低信噪比下性能显著提高。

**关键词:** 信号处理; 谐波恢复; 降维处理; 迭代算法; 联合对角化

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2009)02-0331-04

## Joint Diagonalization Algorithm for Harmonic Retrieval

Nie Wei-ke Feng Da-zheng Zhang Bin

(National Key Laboratory for Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** In this paper, a set of eigen matrices are introduced which possess diagonal structure. A new iterative algorithm is proposed to implement the joint diagonalization of the eigen matrices, the harmonic retrieval can be accomplished by the diagonalization procedure. The new algorithm improves the cost function of the well-know ACDC algorithm, changes it from fourth function to a quadratic function. Each iteration step poses a typical least square problem with a unique closed solution, hence there is no error propagation as the ACDC algorithm. Simulation results demonstrate it is a new reliable and faster algorithm which is particularly accurate in extremely low SNR.

**Key words:** Signal processing; Harmonic retrieval; Dimension-reducing processing; Iterative algorithm; Joint diagonalization

### 1 引言

谐波恢复是信号处理领域的核心问题之一, 在雷达、声纳、地球物理等方面有广泛的应用。在复高斯噪声环境中, 作为子空间方法的著名代表, ESPRIT<sup>[1,2]</sup>方法可有效地恢复谐波频率, 其本质上是一种求根技术, 不但计算量小而且估计性能优异。但 ESPRIT 方法只利用了两个特征矩阵, 利用多个特征矩阵有望达到更好的性能。本文对数据矢量在每个时延下构造 4 个特征矩阵, 并在时域扩展, 形成相关矩阵组。最近 Yeredor 提出了 ACDC 算法<sup>[3]</sup>实现多个矩阵的联合对角化, 该算法收敛性能良好<sup>[4]</sup>, 利用 ACDC 算法实现构造的相关矩阵组的联合对角化, 进而恢复谐波频率, 得到了较好的估计性能。然而, ACDC 算法的代价函数是四次函数, 该算法每步迭代分为 AC 部分和 DC 部分, AC 部分又分为多个子步, 每个子步需要特征值分解, 计算量较大; 并且算法本身存在误差积累, 影响估计性能。

本文提出一种迭代形式的联合对角化算法实现谐波恢复。算法将 ACDC 算法的四次代价函数简化为二次代价函

数。每步迭代具有精确的最小二乘闭式解, 不存在误差积累, 进一步提高了估计性能, 尤其在低信噪比下的估计性能提高显著。

### 2 数据模型

考虑  $P$  个谐波信号

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^P s_i e^{j\omega_i t} + n_1(t) \quad (1)$$

其中  $s_i$  和  $\omega_i = 2\pi f_i \in (-\pi, \pi)$  分别为第  $i$  个谐波的幅值和频率, 加性噪声  $n_1(t)$  为零均值、方差为  $\sigma^2$  的平稳复白高斯随机过程。选择  $M > P$  并定义下列向量:

$$\mathbf{x}_1(t) = [x_1(t), x_1(t+1), \dots, x_1(t+M-1)]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{n}_1(t) = [n_1(t), n_1(t+1), \dots, n_1(t+M-1)]^T \quad (3)$$

可见

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{s} + \mathbf{n}_1(t) \quad (4)$$

$$\text{其中 } \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} e^{j\omega_1 t} & e^{j\omega_2 t} & \dots & e^{j\omega_P t} \\ e^{j\omega_1(t+1)} & e^{j\omega_2(t+1)} & \dots & e^{j\omega_P(t+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\omega_1(t+M-1)} & e^{j\omega_2(t+M-1)} & \dots & e^{j\omega_P(t+M-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} =$$

$[s_1, s_2, \dots, s_P]^T$ , 定义新向量  $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_1(t+1)$ ,  $\mathbf{n}_2(t) = \mathbf{n}_1$

\$(t+1)\$, 那么有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= [x_2(t), x_2(t+1), \dots, x_2(t+M-1)]^T \\ &= \mathbf{A}(t)\Phi\mathbf{s} + \mathbf{n}_2(t) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 \$\Phi = \text{diag}[e^{j\omega\_1}, e^{j\omega\_2}, \dots, e^{j\omega\_P}]\$, 令

$$\mathbf{S} = \text{diag}[|s_1|^2, |s_2|^2, \dots, |s_P|^2] \quad (6)$$

$$\mathbf{A}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j\omega_1} & e^{j\omega_2} & \dots & e^{j\omega_P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\omega_1(M-1)} & e^{j\omega_2(M-1)} & \dots & e^{j\omega_P(M-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \quad (7)$$

注意到 \$\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}(k-1)\Phi = \mathbf{A}(k-2)\Phi^2 = \dots = \mathbf{A}(0)\Phi^k = \mathbf{A}\Phi^k\$, 不失一般性, 设采样起始时刻 \$t=0\$, 向量 \$\mathbf{x}\_i, \mathbf{x}\_j\$ 在非零延迟 \$k\$ 下的自、互相关矩阵记为 \$\mathbf{R}\_{ij}^k, i, j=1, 2, k=1, 2, \dots, K\$ 那么有

$$\mathbf{R}_{11}^k = \mathbf{A}\mathbf{S}(\Phi^k)^H \mathbf{A}^H \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_{12}^k = \mathbf{A}\mathbf{S}\Phi^H(\Phi^k)^H \mathbf{A}^H = \mathbf{A}\mathbf{S}(\Phi^{k+1})^H \mathbf{A}^H \quad (9)$$

$$\mathbf{R}_{21}^k = \mathbf{A}\Phi\mathbf{S}(\Phi^k)^H \mathbf{A}^H \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_{22}^k = \mathbf{A}\Phi\mathbf{S}\Phi^H(\Phi^k)^H \mathbf{A}^H = \mathbf{A}\Phi\mathbf{S}(\Phi^{k+1})^H \mathbf{A}^H \quad (11)$$

本文在每个时延 \$k\$ 下构造了 4 个相关矩阵, 在时域扩展形成相关矩阵组。每个相关矩阵具有 \$\mathbf{R}(l) = \mathbf{A}\Lambda(l)\mathbf{A}^H\$ 的对角结构, \$\Lambda(l)\$ 为对角矩阵。

### 3 降维处理

为处理方便, 把相关矩阵 \$\mathbf{R}(l) \in C^{M \times M}\$ 降维成 \$\tilde{\mathbf{R}}(l) \in C^{P \times P}\$ 矩阵。降维矩阵 \$\Gamma\$ 应满足条件 \$\text{span}(\Gamma) = \text{span}(\mathbf{A})\$, 可利用矩阵组中某个矩阵的奇异值分解得到的信号子空间作为降维矩阵<sup>[5,6]</sup>, 然而这种降维矩阵的精度不高<sup>[7,8]</sup>。本文构造新矩阵 \$\Psi = \sum\_{l=1}^L \mathbf{R}(l)[\mathbf{R}(l)]^H\$, 设 \$\Psi\$ 的奇异值分解 \$\Psi = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H\$, 可取降维矩阵 \$\Gamma\$ 为 \$\Psi\$ 的主特征矢量组成的矩阵, 即 \$\Gamma = [\mathbf{u}\_1, \mathbf{u}\_2, \dots, \mathbf{u}\_P] \in C^{M \times P}\$。对 \$\mathbf{R}(l) = \mathbf{A}\Lambda(l)\mathbf{A}^H\$ 式左乘 \$\Gamma^H\$, 右乘 \$\Gamma\$, 令

$$\tilde{\mathbf{R}}(l) = \Gamma^H \mathbf{R}(l) \Gamma \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \Gamma^H \mathbf{A} \in C^{P \times P} \quad (13)$$

降维后的相关矩阵组为

$$\tilde{\mathbf{R}}(l) = \tilde{\mathbf{A}}\Lambda(l)\tilde{\mathbf{A}}^H, \quad l=1, 2, \dots, L \quad (14)$$

由于信号子空间的低秩结构, 降维处理抑制了噪声, 保留了信号。

### 4 代价函数

将式(8)至式(11)的矩阵组整理如下

$$\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^k = \tilde{\mathbf{A}}\Lambda_i[\tilde{\mathbf{B}}_j^k]^H, \quad i, j=1, 2, \quad k=1, 2, \dots, K \quad (15)$$

$$\text{其中 } \Lambda_i = \begin{cases} \mathbf{I}, & i=1 \\ \Phi, & i=2 \end{cases}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_j^k = \Gamma^H \mathbf{A}(j-1)\Phi^k \mathbf{S}^H \quad (16)$$

由前述知式(16)中 \$\mathbf{A}(1) = \mathbf{A}(0)\Phi = \mathbf{A}\Phi\$, 进而构造下面的代价函数

$$\begin{cases} J(\tilde{\mathbf{A}}, \Lambda_i, \tilde{\mathbf{B}}_j^k) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \|\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^k - \tilde{\mathbf{A}}\Lambda_i[\tilde{\mathbf{B}}_j^k]^H\|_F^2 \\ \text{s.t. } \|\mathbf{a}_r\|^2 = 1; \quad \|\mathbf{b}_{jr}\|^2 = 1, \quad r=1, 2, \dots, P \end{cases} \quad (17)$$

\$\mathbf{a}\_r, \mathbf{b}\_{jr}\$ 分别表示 \$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}\_j^k\$ 的第 \$r\$ 个列向量。由于 \$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}\_j^k\$ 不同, 因此代价函数简化为二次函数, 即当 \$\tilde{\mathbf{A}}, \Lambda\_i, \tilde{\mathbf{B}}\_j^k\$ 中两个固定时, 代价函数是另一个矩阵的二次函数。

### 5 新算法

由简化的代价函数式(17), 给出一种新的估计矩阵 \$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}\_j^k\$ 和对角矩阵 \$\Lambda\_i\$ 的迭代算法。设 \$l\$ 表示第 \$l\$ 步迭代。

首先, 固定 \$\tilde{\mathbf{A}}(l-1)\$ 和 \$\tilde{\mathbf{B}}\_j^k(l-1)\$, 约束 \$\hat{\Lambda}\_1(l) = \mathbf{I}\$, 求 \$\hat{\Lambda}\_2(l) = \text{diag}[\hat{\lambda}\_1(l), \hat{\lambda}\_2(l), \dots, \hat{\lambda}\_P(l)]^T\$, 使 \$J(\tilde{\mathbf{A}}(l-1), \Lambda\_i(l), \tilde{\mathbf{B}}\_j^k(l-1))\$ 达到最小。令 \$\mathbf{a}\_r, \mathbf{b}\_{jr}\$ 分别代表 \$\tilde{\mathbf{A}}(l-1)\$ 和 \$\tilde{\mathbf{B}}\_j^k(l-1)\$ 的第 \$r\$ 列, 代价函数对 \$\lambda\_r^\*\$, \$r=1, 2, \dots, P\$ 求导并令导函数<sup>[9]</sup>为 0, 有

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_r^*} = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 \left[ -\mathbf{a}_r^H \tilde{\mathbf{R}}_{2j}^k \mathbf{b}_{jr}^k + \mathbf{a}_r^H \sum_{m=1}^P \mathbf{a}_m \lambda_m (\mathbf{b}_{jm}^k)^H \mathbf{b}_{jr}^k \right] = 0 \quad (18)$$

化简得

$$\begin{aligned} & -\mathbf{a}_r^H \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 \tilde{\mathbf{R}}_{2j}^k \mathbf{b}_{jr}^k \\ & + \sum_{m=1}^P \left[ \lambda_m \left( \mathbf{a}_r^H \mathbf{a}_m \left( \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 (\mathbf{b}_{jm}^k)^H \mathbf{b}_{jr}^k \right) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{令} \quad -\mathbf{a}_r^H \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 (\tilde{\mathbf{R}}_{2j}^k \mathbf{b}_{jr}^k) = v_r \quad (20)$$

$$\mathbf{a}_r^H \mathbf{a}_m \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 ((\mathbf{b}_{jm}^k)^H \mathbf{b}_{jr}^k) = u_{rm} \quad (21)$$

$$\text{那么} \quad [\hat{\lambda}_1(l), \hat{\lambda}_2(l), \dots, \hat{\lambda}_P(l)]^T = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{v} \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1P} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{P1} & u_{P2} & \dots & u_{PP} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_P]^T \quad (23)$$

其次, 固定 \$\tilde{\mathbf{B}}\_j^k(l-1)\$ 和 \$\Lambda\_i(l)\$, 代价函数 \$J(\tilde{\mathbf{A}}(l), \Lambda\_i(l), \tilde{\mathbf{B}}\_j^k(l-1))\$ 关于 \$\tilde{\mathbf{A}}(l)\$ 求导并令导数为零, 得到 \$\tilde{\mathbf{A}}(l)\$ 的估计:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\mathbf{A}}}(l) &= \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^k) \tilde{\mathbf{B}}_j^k(l-1) \Lambda_i^*(l)] \right\} \\ & \cdot \left\{ \sum_{i=1}^2 \Lambda_i(l) \left[ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 (\tilde{\mathbf{B}}_j^k(l-1))^H \tilde{\mathbf{B}}_j^k(l-1) \right] \Lambda_i^*(l) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

最后, 固定 \$\tilde{\mathbf{A}}(l)\$ 和 \$\Lambda\_i(l)\$, 代价函数 \$J(\tilde{\mathbf{A}}(l), \Lambda\_i(l), \tilde{\mathbf{B}}\_j^k(l))\$ 关于 \$\tilde{\mathbf{B}}\_j^k(l)\$ 求导并令导数为零, 得到 \$\tilde{\mathbf{B}}\_j^k(l)\$ 的估计:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_j^k(l) &= \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 [(\tilde{\mathbf{R}}_{ij}^k)^H \tilde{\mathbf{A}}(l) \Lambda_i(l)] \right\} \\ & \cdot \left[ \sum_{i=1}^2 \Lambda_i^*(l) (\tilde{\mathbf{A}}(l))^H \tilde{\mathbf{A}}(l) \Lambda_i(l) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

每次迭代分为上面 3 个步骤,算法收敛时,得到  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}_j$  和  $\hat{\mathbf{A}}_i$  的估计。 $\hat{\mathbf{A}}$  矩阵的估计为

$$\hat{\mathbf{A}} = (\mathbf{\Gamma}^H)^\dagger \hat{\mathbf{A}} \quad (26)$$

$\dagger$  表示广义逆。设  $a_{i,j}$  为  $\hat{\mathbf{A}}$  的第  $(i,j)$  元素,利用  $\hat{\mathbf{A}}$  的范德蒙结构恢复谐波频率为

$$\hat{f}_j = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} \left[ \frac{\text{angle}(a_{i,j}^* a_{i+1,j})}{2\pi} \right], \quad j = 1, 2, \dots, P \quad (27)$$

### 6 仿真实验

以下实验均取  $P = 3$  个谐波信号,其归一化频率分别为 0.12, 0.14, 0.16。数据长度为 500;  $M = 31$ ;  $K = 4$ , 即 4 个延迟下形成的 16 个对角结构的相关矩阵进行联合对角化;每个固定的信噪比均做  $N = 1000$  次独立实验平均。

**实验 1** 利用估计的  $\mathbf{A}$  矩阵的范德蒙结构求解谐波频率,根据文献[8]定义  $\mathbf{A}$  矩阵的估计误差为式(28),式中  $\dagger$  表示 moore-penrose 逆,图 1 为  $\mathbf{A}$  矩阵误差随信噪比变化曲线。

$$\text{error} = \sum_{i=1}^P \left( \sum_{j=1}^P \frac{|\hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{A}|_{ij}}{\max_k |\hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{A}|_{ik}} - 1 \right) + \sum_{j=1}^P \left( \sum_{i=1}^P \frac{|\hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{A}|_{ij}}{\max_k |\hat{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{A}|_{kj}} - 1 \right) \quad (28)$$

**实验 2**  $P = 3$  个振幅相同(归一化幅度均为 1),归一化谐波频率为 0.12, 0.14, 0.16, 频率间隔为 0.02, 小于 Fourier 分辨能力即  $1/M = 0.032$ , 这说明经典的基于 FFT 的算法无法分辨这 3 个频率。定义  $\hat{f}_p(n)$  表示第  $n$  次试验对第  $p$  个谐波频率的估计,  $f_p$  为第  $p$  个谐波频率的真值,定义谐波频率的均方根误差为式(29)。图 2 为频率估计的均方根误差随信噪比变化曲线。本文算法每步迭代具有精确的最小二乘闭式解,消除了 ACDC 算法的误差积累;且计算的是所有空时相关矩阵组的平均特征结构,因而具有更好的抗噪声性能,尤其在低信噪比和小快拍下估计性能显著提高。

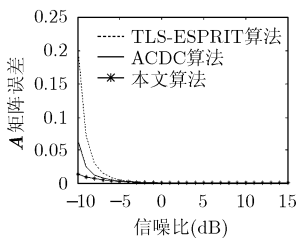


图 1  $\mathbf{A}$  矩阵误差

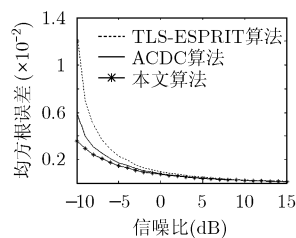


图 2 均方根误差

$$\text{RMSE} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (\hat{f}_p(n) - f_p)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

**实验 3** 在实验 2 的基础上, 3 个谐波归一化幅度分别为 1, 0.8, 0.6, 均方根误差仍定义为式(29), 图 3 为不等幅度

下谐波恢复的均方根误差随信噪比变化曲线。

**实验 4** 比较 ACDC 算法和本文算法在相同信噪比下达到收敛所需的迭代次数, 图 4 和图 5 是用 ESPRIT 产生初值和随机产生初值, 即  $\text{randn}(P, P) + j \cdot \text{randn}(P, P)$  情况下曲线。

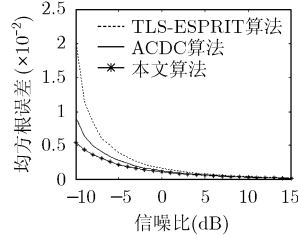


图 3 幅度不等条件下均方根误差

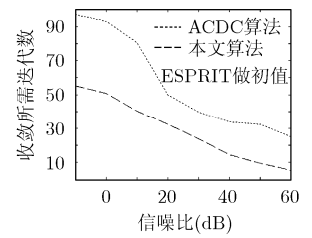


图 4 迭代次数随信噪比变化

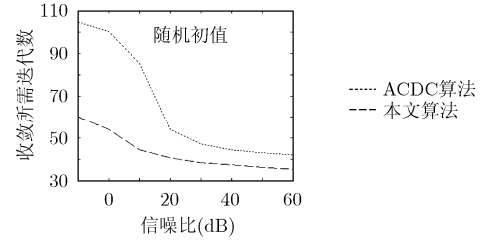


图 5 迭代次数随信噪比变化

由仿真可见,用 ESPRIT 产生初值情况下,算法达到收敛所需的迭代次数相对随机初值情况减少,在信噪比较高时,迭代次数的减少量明显。

### 7 结论

本文构造了一组具有对角结构的特征矩阵,新提出一种迭代算法完成矩阵组的联合对角化,进而实现谐波恢复。由于消除了 ACDC 方法固有的误差积累,该方法的估计精度优于 TLS-ESPRIT 和 ACDC 方法,在低信噪比下估计精度显著提高;在相同信噪比下达到收敛所需要的迭代数也少于 ACDC 方法。

### 参考文献

- [1] Roy R, Paulraj A, and Kailath T. ESPRIT-A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, 1986, 34(10): 1340-1342.
- [2] Roy R and Kailath T. ESPRIT—estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans. on Acoust, Speech, Signal Processing*, 1989, 37(7): 984-995.
- [3] Yeredor A. Non-orthogonal joint diagonalization in the least-squares sense with application in blind source separation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(7): 1545-1553.
- [4] Vollgraf R and Obermayer K. Quadratic optimization for

- simultaneous matrix diagonalization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(9): 3270-3278.
- [5] Vanpoucke F, Moonen M, and Berthoumieu Y. An efficient subspace algorithm for 2-D harmonic retrieval. Proc. IEEE ICASSP, Adelaide, Australia, 1994: 461-464.
- [6] Zhou Yi, Feng Dazheng, and Liu Jianqiang. A novel algorithm for two-dimensional frequency estimation [J]. *Signal Processing*, 2007, 87(1): 1-12.
- [7] Feng Dazheng, Zhang Xianda, and Bao Zheng. A neural network learning for adaptively extracting cross-correlation features between two high-dimension data streams. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 2004, 15(6): 1541-1553.
- [8] Ziehe A, Laskov P, and Nolte G. A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformation and its application to blind signal separation. *J Mach. Learn. Res.*, 2004, 5(7): 777-800.
- [9] Golub G H and Loan C F V. *Matrix Computation*. Baltimore, MD: Johns Hopkins Univ. Press, 1989, Chapter 10.
- 聂卫科: 男, 1972年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理.
- 冯大政: 男, 1959年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为信号盲分离及信道均衡、阵列信号处理等.
- 张 斌: 男, 1968年生, 博士生, 副教授, 研究方向为雷达信号处理.