

一种 K 分布杂波参数估计的快速算法

余慧^{①②} 王岩飞^① 闫鸿慧^①

^①(中国科学院电子学研究所 北京 100190)

^②(中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要: 该文对 K 分布杂波模型统计特性做了深入分析和推导, 提出了一种新的运用样本算数平均和几何平均的高精度低运算量的 K 分布杂波模型参数估计快速算法, 并对算法的估计精度作了理论评价。最后进行了计算机仿真实验, 实验结论证实了文中所提出算法的有效性与准确性。

关键词: 雷达杂波; K 分布; Gamma 分布; 参数估计

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)01-0139-04

A New Method for Estimating Parameters of K-distributed Clutter

Yu Hui^{①②} Wang Yan-fei^① Yan Hong-hui^①

^①(Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

^②(Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: This paper analyzes the statistical characteristics of radar clutter, discusses the K-distributed random process used for describing the amplitude characteristics of the clutter, deduces the formulas of relation between K-distributed and Gamma-distributed random variables, and presents a novel method for estimating parameters of K-distributed clutter. Finally, the simulation experimental results of generating the clutter samples and estimating the parameters prove the conclusion proposed.

Key words: Radar clutter; K-distributed; Gamma-distributed; Parameter estimating

1 引言

近年来, 有关雷达杂波统计特性的研究不断深入。针对不同的情况, 先后提出了多种雷达杂波统计模型, 包括瑞利分布、对数正态分布、韦伯分布和 K 分布等。其中 K 分布混合模型引入了杂波的时间相关性和空间相关性, 更接近于实测数据, 尤其适用于高分辨率低擦地角的地杂波和海杂波, 是目前公认的最能反映雷达杂波统计特性的模型^[1,2]。

在进行雷达动目标检测时, 对 K 分布模型的参数进行准确估计是对雷达杂波进行分类和有效抑制的重要条件。很多文献对 K 分布模型的产生作了详细的分析^[3-5], 然而, 对 K 分布模型参数估计的研究相对较少。由于 K 分布模型的复杂性, 传统参数估计方法的应用有一定的难度。例如矩估计和极大似然估计方法, 前者需要大样本数, 当样本数目不够大时, 不能得到有效的估计; 后者难以得到样本值与被估参数的解析式, 如果直接通过样本计算似然函数求导来估计参数, 则运算量相当大, 且随样本数增加而显著增大。文献^[6,7]对此提出了一些具体处理方法, 但没有针对 K 分布给出实用的理论或经验模型。针对以上问题, 本文对 K 分布统计特性进行了深入分析, 提出了一种运用样本算数平均和几何平均

的高精度低运算量的 K 分布参数估计快速算法, 并对估计精度进行了理论分析。最后进行了计算机仿真实验研究, 仿真实验结论验证了本文所提出的算法的有效性。

2 K 分布杂波统计模型

K 分布是一种能很好地满足实测雷达杂波回波幅度特性和脉间相关性的概率模型, 其概率密度函数表示为

$$f(x) = \frac{2}{a\Gamma(v+1)} \left(\frac{x}{2a}\right)^{v+1} K_v\left(\frac{x}{a}\right) U(x), \quad v > -1, a > 0 \quad (1)$$

其中 $K_v(\cdot)$ 为第二类 v 阶修正贝塞尔函数; $U(\cdot)$ 为单位阶跃函数; $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数; a 为尺度参数, 表征杂波平均功率, a 越大表示杂波强度越大; v 为形状参数, 表征杂波分布尖峰偏移特性, v 越小, 其分布托尾越长, 当 $v \rightarrow \infty$, 其分布近似为瑞利分布。

对杂波回波进行 K 分布建模时, 要求对表征杂波特性的 K 分布参数 (a 和 v) 进行高精度估计。尤其是对 v 的估计, 其估计效果将直接影响目标检测门限的设定和检测概率。

由式(1)可导出, 形状参数 v 与目标检测时的虚警概率有如下关系^[1]:

$$P_{fa} = \frac{2}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{X_T}{2a}\right)^{v+1} K_{v+1}\left(\frac{X_T}{a}\right) \quad (2)$$

其中 X_T 为检测门限。由此可见, 对于给定的虚警概率 P_{fa} ,

若对形状参数 v 估计不准确, 将直接导致检测门限 X_T 的不准确, 降低检测概率和信杂比, 从而影响杂波抑制效果。

3 参数估计

3.1 对 K 分布的近似处理

K 分布混合模型结构复杂, 若直接对其进行参数估计, 运算量大, 且很难得到闭式解。因此, 本文选择通过对 K 分布作近似处理来对其参数进行准确有效的估计。

经过分析发现, 在几种典型的分布函数中, Gamma 分布与 K 分布最接近。若 Gamma 分布的形状参数用 λ 表示, 尺度参数用 b 表示, 容易得出 $v = -0.5$ 时的 K 分布等同于 $\lambda = 1$ 时的 Gamma 分布; $v = 0.5$ 时的 K 分布等同于 $\lambda = 2$ 时的 Gamma 分布; 对于 $v = 1.5/2.5/3.5 \dots$ 的情况, K 分布可等同于两个或多个不同形状参数的 Gamma 分布加权求和。因此, 为了便于得到 K 分布被估参数与杂波样本值间关系的解析式, 本文用 Gamma 分布对 K 分布作近似, 这种近似是在假定两种分布的一阶和二阶原点矩相等的条件下完成。

由式(1)容易导出 K 分布随机变量 X 的 M 阶原点矩为

$$E(X^M) = \int_0^\infty x^M \frac{2}{a\Gamma(v+1)} \left(\frac{x}{2a}\right)^{v+1} K_v\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

$$= \frac{(2a)^M \Gamma\left(\frac{M}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{M}{2} + v + 1\right)}{\Gamma(v+1)} \quad (3)$$

其等效 Gamma 分布随机变量用 Y 表示, 概率密度函数为

$$g(y) = \frac{b^\lambda}{\Gamma(\lambda)} y^{\lambda-1} \exp(-by) U(y), \quad \lambda > 0, b > 0 \quad (4)$$

由式(4)导出 Y 的 M 阶原点矩为

$$E(Y^M) = \int_0^\infty y^M \frac{b^\lambda}{\Gamma(\lambda)} y^{\lambda-1} \exp(-by) dy = \frac{\Gamma(M+\lambda)}{b^M \Gamma(\lambda)} \quad (5)$$

根据条件 $E(X) = E(Y)$, $E(X^2) = E(Y^2)$, 我们得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{2a\Gamma(1.5)\Gamma(v+1.5)}{\Gamma(v+1)} &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{b\Gamma(\lambda)} \\ \frac{(2a)^2 \Gamma(2)\Gamma(v+2)}{\Gamma(v+1)} &= \frac{\Gamma(\lambda+2)}{b^2\Gamma(\lambda)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由式(6)易导出

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \left[\frac{4(v+1)\Gamma^2(v+1)}{\pi\Gamma^2(v+1.5)} - 1 \right]^{-1} \\ b &= \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(v+1)}{2a\Gamma(1.5)\Gamma(\lambda)\Gamma(v+1.5)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这样就得到了 λ, b 与 v, a 的关系。

对满足式(7)关系的 Gamma 分布和 K 分布进行比较, 结果如图 1 所示。由图 1 可看出, 满足式(7)关系的 Gamma 分布与其相应 K 分布非常接近。

对 $M = 3/4/5/6$ 时的 X, Y 的高阶矩作比较, 结果如表 1 所示。从表 1 可见, 当 $-0.8 < v < 3$, 高阶矩近似度很高,

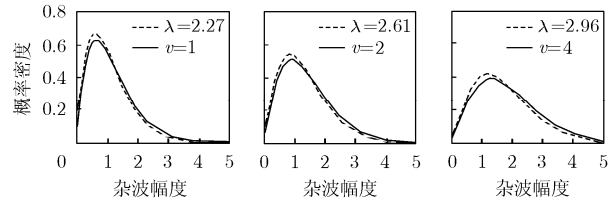


图 1 K 分布与其等价 Gamma 分布的比较图

表 1 K 分布随机变量 X 与其等效的 Gamma 分布随机变量 Y 的高阶矩比较

v	λ	$E(X^M)/E(Y^M)$			
		$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	$M = 6$
-0.80	0.46	0.98	0.94	0.90	0.85
-0.60	0.84	1.00	0.99	0.98	0.97
-0.40	1.15	1.00	1.01	1.01	1.02
-0.20	1.40	1.00	1.01	1.02	1.03
0.00	1.61	1.00	1.01	1.02	1.03
0.20	1.79	1.00	1.01	1.1	1.02
0.50	2.00	1.00	1.00	1.00	1.00
1.00	2.27	1.00	0.99	0.98	0.97
3.00	2.82	0.99	0.96	0.92	0.87
10.00	3.31	0.98	0.93	0.86	0.77
15.00	3.41	0.97	0.92	0.84	0.75

其中 $v = 0.5, \lambda = 2$ 时的高阶矩完全一致。当 v 取较大值时, 两者的高阶矩相差较大, 但实验证明绝大部分情况下, 高分辨率低擦地角地杂波的 v 取值在 $-0.8 < v < 3$ 范围内^[8]。因此, 以上对 K 分布的近似等效是可行的。

3.2 杂波模型估计

本文选择最大似然估计法对 Gamma 分布的参数进行估计。最大似然估计法是根据样本的具体情况来选择参数的估计值, 使得该样本发生的可能性最大。若样本 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 为满足式(4)的 Gamma 分布 i.i.d 随机变量, 其观测值分别为 y_1, y_2, \dots, y_n , 其中 n 为样本数, 则样本 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 取值为 y_1, y_2, \dots, y_n 的概率密度, 即似然函数为

$$L(b, \lambda) = \prod_i g(y_i) = \frac{b^{n\lambda}}{[\Gamma(\lambda)]^n} \left(\prod_i y_i\right)^{\lambda-1} \exp\left[-b \sum_i y_i\right] \quad (8)$$

为求似然函数的最大值, 对式(8)进行求导取零, 得到似然方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma'(\hat{\lambda})}{\Gamma(\hat{\lambda})} &= \ln \left[\hat{b} \left(\prod_i y_i \right)^{1/n} \right] \\ \hat{b} &= \frac{\hat{\lambda}}{\frac{1}{n} \sum_i y_i} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

记样本观测值的算术平均为 $m_a = \frac{1}{n} \sum_i y_i$, 几何平均为

$$m_g = \left(\prod_i y_i\right)^{1/n}, \text{ 记 } \rho = \frac{m_a}{m_g}, \text{ 则}$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\hat{\lambda})/\Gamma(\lambda) &= \ln(\hat{\lambda}/\rho) \\ \hat{b} &= \hat{\lambda}/m_a \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在用 Gamma 分布对 K 分布作近似等效的前提下, 结合式(7), 式(10), 便可通过仅应用样本观测值的算术平均和几何平均而快速得到 K 分布的参数估计值, 且运算量大大减小。

4 估计精度分析与仿真

现在来对以上 K 分布参数估计快速算法的估计精度进行分析。若杂波样本用 X_1, X_2, \dots, X_n 表示, 观测值用 x_1, x_2, \dots, x_n 表示, 则 ρ 的概率密度函数由 X_1, X_2, \dots, X_n 的概率密度函数决定。对 ρ 求均值和二阶矩:

$$E(\rho) = \left\{E\left[X_1^{1-1/n}\right]\right\} \left\{E\left[X_2^{-1/n}\right]\right\}^{n-1} \quad (11)$$

$$E(\rho^2) = \frac{1}{n} \left\{E\left[X_1^{2-2/n}\right]\right\} \left\{E\left[X_2^{-2/n}\right]\right\}^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left\{E\left[X_1^{1-2/n}\right]\right\}^2 \left\{E\left[X_2^{-2/n}\right]\right\}^{n-2} \quad (12)$$

结合式(1)得到

$$E(\rho) = \frac{\Gamma\left(1.5 + v - \frac{0.5}{n}\right) \Gamma\left(1.5 - \frac{0.5}{n}\right)}{\Gamma(v+1)} \cdot \left[\frac{\Gamma\left(1 + v - \frac{0.5}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{0.5}{n}\right)}{\Gamma(v+1)} \right]^{n-1} \quad (13)$$

$$E(\rho^2) = \frac{1}{n} \left(v + 1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left[\frac{\Gamma\left(1 + v - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma(v+1)} \right]^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left[\frac{\Gamma\left(1.5 + v - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma(v+1)} \right]^2 \cdot \left[\frac{\Gamma\left(1 + v - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma(v+1)} \right]^{n-2} \quad (14)$$

容易导出:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\rho) = \bar{\rho}_\infty = \frac{\Gamma(1.5 + v) \Gamma(1.5)}{\Gamma(v+1)} \exp\left\{-\frac{1}{2}[\varphi(v+1) - \gamma]\right\} \quad (15)$$

其中 $\varphi(x) = \ln' \Gamma(x)$, $\gamma = -\varphi(1) = 0.57721$ 为 Euler 常量。利用式(14), 式(15)易证得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\rho^2) = (\bar{\rho}_\infty)^2 \quad (16)$$

由式(16)可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, ρ 的方差趋于 0。而由式(7), 式(10)可知, \hat{v} 主要由 ρ 决定。因此, 文中提出算法对 v 可得到高精度的估计, 且 n 的大小决定了估计的精度高低, n 越大, 精度越高。另外, 通过式(13), 式(14)可确定给定

估计精度时所需最小样本数。

为了验证上述分析, 本文进行了数值计算仿真验证。假定 K 分布杂波的有关参数取值为 $a = 0.5$, $v = -0.5/0.5$ 。仿真所用 K 分布杂波样本按如下步骤生成^[4]:

(1)由两个服从 $N(0,0.5)$ 的随机变量平方和得到参数为 1 的指数分布随机变量 P ;

(2)由 $2(v+1)$ 个服从 $N(0,1)$ 的随机变量平方和得到自由度为 $2(v+1)$ 的 χ^2 分布随机变量 Q ;

(3)(1), (2)两步得到的随机变量相乘开方, 得到尺度参数 $a = 0.5$ 、形状参数为 v 的 K 分布随机变量 X 。

图 2 给出了由以上步骤得到的 K 分布杂波样本概率密度图。从图 2 可看出 v 的取值对杂波分布的影响, v 越小, 拖尾越长, 不对称性越显著。

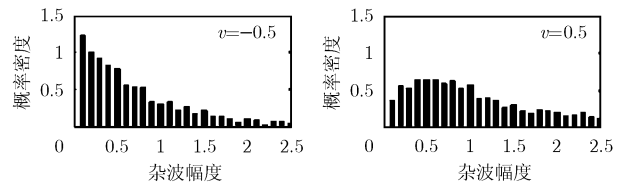


图 2 不同 v 值时 K 分布杂波样本数据的生成

图 3 给出了在样本数分别取 $n = 20/50/100$, 各进行 20 次独立的参数 v 估计后的估计值 \hat{v} 的分布图。纵轴为 v 的估计值, 横轴为独立仿真估计次序下标。从图中可看出, 样本数越大, 估计精度越高。表 2 给出了 $n = 20/50/100$ 时, 多次估计后估计值均值 $E(\hat{v})$ 和方差 $D(\hat{v})$ 的结果。从表 2 可看出, n 取不同值时, 其相应 $E(\hat{v})$ 均非常接近真实值, 而 $D(\hat{v})$ 也都非常小, 证明了本文提出的参数估计快速算法是准确有效的。

5 结束语

本文深入研究了 K 分布杂波的统计特性, 提出了一种新

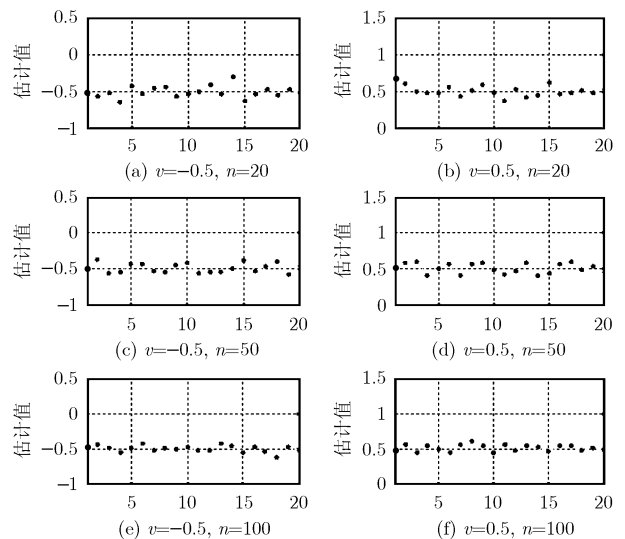


图 3 $n = 20/50/100$, v 分别取 -0.5 和 0.5 时的估计分布

表 2 $n = 20/50/100$, v 分别取-0.5 和 0.5 时的 $E(\hat{v})$, $D(\hat{v})$ 比较

n	$v = -0.5$		$v = 0.5$	
	$E(\hat{v})$	$D(\hat{v})$	$E(\hat{v})$	$D(\hat{v})$
20	-0.484	0.0078	0.512	0.0089
50	-0.487	0.0062	0.510	0.0071
100	-0.493	0.0041	0.507	0.0048

的运用样本算数平均和几何平均的高精度低运算量的 K 分布杂波模型参数估计的快速算法, 并对算法估计精度进行了分析, 给出了推导依据。最后, 对杂波样本生成和参数估计算法进行了计算机仿真。仿真实验结论证明了本文所提出算法的有效性 with 准确性。本文所提出的算法可应用于雷达杂波建模、杂波抑制以及动目标检测等方面。

参 考 文 献

- [1] Jakeman E and Pusey P N. A model for non-Rayleigh sea echo[J]. *IEEE Trans. on AP*, 1976, 24(6): 806-814.
- [2] Abraham D A and Lyons A P. Novel physical interpretation of K-distributed reverberation[J]. *IEEE. Journal of Oceanic Engineering*, 2002, 27(4): 800-813.
- [3] 姜斌, 黎湘, 王宏强, 郭桂蓉. 近海岸复合杂波建模及其统计特性分析研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2006, 28(2): 221-223.

Jiang Bin, Li Xiang, Wang Hong-qiang, and Guo Gui-rong. Studies on the modeling and statistic characteristic of compound clutter under the coastal environment[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2006, 28(2): 221-223.

- [4] James Marier L. Correlated K-distributed clutter generation for radar detection and track[J]. *IEEE Trans. on AES*, 1995, 31(2): 568-580.
- [5] Raghavan R S. A model for spatially correlated radar clutter[J]. *IEEE Trans. on AES*, 1991, 26(3): 268-275.
- [6] Lew H and Drumheller D M. Estimation of non-Rayleigh clutter and fluctuating-target models[J]. *IEE Proceedings-Radar Sonar Navigation*, 2002, 149(5): 231-241.
- [7] Ombardo P L and Oliver C J. Estimation of texture parameters in K-distributed clutter[J]. *IEE Proceedings-Radar Sonar Navigation*, 1994, 141(4): 196-204.
- [8] Schleher D C. MTI and Pulsed Doppler Radar[M]. Boston London, Artech House, 1991, chapter2.

余 慧: 女, 1982 年生, 博士生, 研究方向为微波成像理论及数字信号处理.

王岩飞: 男, 1963 年生, 研究员, 博士生导师, 研究方向为微波成像系统及理论、数字信号处理等.

闫鸿慧: 男, 1975 年生, 博士, 研究方向为微波成像系统及理论.