

# 一种改进的虚拟变换自适应波束形成方法

王明哲 王 俊

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 常规虚拟变换技术用于波束形成时,受变换区域影响较大,在区域选择不当时甚至会引起整个方向图的严重畸变。本文提出了一种改进方法,该方法基于子空间投影思想,给常规变换矩阵引入干扰方向信息。利用该方法形成波束时,能稳定地形成对准干扰方向的零点,对变换区域的选择也不很敏感。并且在小快拍数时仍然具有良好的波束保形能力。理论分析和计算机仿真验证了该方法的有效性。

**关键词:** 波束形成; 虚拟变换; 变换区域

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)01-0101-03

## An Improvement on Adaptive Beamforming via Virtual Array Transformation

Wang Ming-zhe Wang Jun

(National Key Laboratory of Radar Signal Processing, Xiidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** When the conventional virtual array is used for adaptive beamforming, the performance is largely influenced with the transforming area, even the serious distortion of the whole beam map will be aroused if an improper transforming area is chosen. This paper expressed an improvement solution based on subspace processing. With the presented algorithm, the interference null can be steadily formed. Meanwhile, it is not sensitive to which transforming area is chosen. On the other hand, this method can still form a good beam although there are a few snaps. Numerical examples attest the correctness and the validity of the proposed algorithm.

**Key words:** Beam forming; Virtual array transformation; Transforming area

### 1 引言

在收发分置的外辐射源雷达系统中,直达波信号对接收机形成严重干扰,多数雷达系统都采用阵列天线进行自适应波束形成而实现空域滤波。自适应波束形成技术多数文献研究基于均匀线阵,比如经典的解相干技术—空间平滑<sup>[1]</sup>,只能用于均匀线阵。实际阵列几何形状可能多种多样,例如受场地限制而经常采用的稀布天线阵<sup>[2,3]</sup>,但稀布阵有时会产生栅瓣或高旁瓣,如能转化为间距小于半波长的均匀线阵就可解决这一问题。通过在感兴趣空域插值而实现虚拟变换的方法,能实现对任意阵型之间的转化<sup>[4,5]</sup>。目前的研究主要集中在虚拟变换在波达方向估计方面的应用<sup>[6]</sup>,在自适应波束形成中的应用却很少提及。实际系统中阵列的阵元数总是有限的,当存在相干干扰,如多径干扰,智能干扰时,解相干会消耗系统自由度,当干扰数目超过阵元数目时一部分干扰将无法抑制。而虚拟变换相当于增加了阵列阵元数,因而相比实际阵列具有更好的解相干性能。文献[7]分析了变换区域的选取对波束形成的影响,但没有给出具体的选取方法,当多

个干扰方位相距较远时,变换区域随之增大,会造成波束形成性能急剧下降。且原文方法在干扰方向形成的零点相比同样阵元数目的真实阵列有损失,抗干扰性能受变换区域影响较大,有时虽然形成零点,但同时会引起主瓣漂移和旁瓣变形。本文提出一种改进的虚拟变换波束形成方法,该方法受变换区域影响小,在小快拍数时仍具有很好的波束保形和零点形成性能。

### 2 信号模型

考虑  $N$  个阵元的天线阵,  $M$  个远场窄带信号从方向  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)$  入射到阵列,则阵列接收数据  $\mathbf{X}$  可以表示为

$$\mathbf{X} = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)] = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

式中  $M \times 1$  矩阵  $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)]^T$  为  $t$  时刻信号的复包络,  $N \times 1$  矩阵  $\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)]^T$  为  $t$  时刻白噪声, 阵列流形矩阵

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)] \quad (2)$$

其中  $\mathbf{a}(\theta_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , 表示  $\theta_k$  方向信号的方向矢量。若是等距均匀线阵,且阵元间距为  $d$ ,  $N$  个阵元特性相同的情况下,有  $\mathbf{a}(\theta_k) = \left[ 1, e^{-j\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_k}, \dots, e^{-j(N-1)\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_k} \right]^T$ 。假定信号与噪声线性无关,则阵列信号协方差矩阵为

2007-07-02 收到, 2007-12-10 改回

国家自然科学基金(60472087)和国家部委重点基金(9140A07050908 DZ01)资助课题

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I} \quad (3)$$

其中  $E\{\bullet\}$  表示数学期望,  $\mathbf{R}_s = E\{\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)\}$  是信号复包络的相关矩阵,  $\sigma_n^2$  是噪声功率,  $\mathbf{I}$  为单位阵,  $(\bullet)^H$  表示矩阵的共轭转置。

实际计算中阵列协方差矩阵是用有限次快拍数据  $X(i)$  估计得到的, 即

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{X}(i)\mathbf{X}^H(i), \text{ 其中 } K \text{ 为快拍数。}$$

### 3 虚拟阵列变换

虚拟阵列变换的基本思想是将整个天线的扫描区域划分为若干个子区域, 再将某个子区域细分, 求出区域内的导向矢量(包括实际阵列和虚拟阵列), 再从两个导向矢量矩阵中找出变换关系。从而实现从原阵列到虚拟阵列的映射, 假设信号位于区域  $\Theta$  内, 将区域  $\Theta$  均分为

$$\Theta = [\theta_l, \theta_l + \Delta\theta, \theta_l + 2\Delta\theta, \dots, \theta_r - \Delta\theta, \theta_r] \quad (4)$$

$\theta_l, \theta_r$  是区域  $\Theta$  的左右边界,  $\Delta\theta$  是步长。所选区域的实际阵列流形矩阵为

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_l), \mathbf{a}(\theta_l + \Delta\theta), \mathbf{a}(\theta_l + 2\Delta\theta), \dots, \mathbf{a}(\theta_r - \Delta\theta), \mathbf{a}(\theta_r)] \quad (5)$$

其中  $\mathbf{a}(\theta_i)$  为实际阵列  $\theta_i$  方向导向矢量, 同一区域  $\Theta$  内的虚拟均匀线阵的阵列流形矩阵为

$$\bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{a}}(\theta_l), \bar{\mathbf{a}}(\theta_l + \Delta\theta), \bar{\mathbf{a}}(\theta_l + 2\Delta\theta), \dots, \bar{\mathbf{a}}(\theta_r - \Delta\theta), \bar{\mathbf{a}}(\theta_r)] \quad (6)$$

其中  $\bar{\mathbf{a}}(\theta_i)$  为虚拟阵列  $\theta_i$  方向上的导向矢量, 则虚拟阵列与真实阵列之间存在一个固定的变换关系  $\mathbf{B}$  使得

$$\min_{\mathbf{B}} \|\mathbf{B}\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}}\|_F^2 \quad (7)$$

此处  $\|\bullet\|_F$  为 Frobenius 模。当变换点数大于实际阵列阵元数目且  $\bar{\mathbf{A}}$  满秩的情况下由式(7)得到的虚拟变换矩阵为

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \quad (8)$$

定义变换误差为

$$E(\mathbf{B}) = \frac{\min_{\mathbf{B}} \|\mathbf{B}\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}}\|_F}{\|\bar{\mathbf{A}}\|_F} \quad (9)$$

当  $E(\mathbf{B}) = 0$  时, 虚拟变换没有误差, 但变换区域内选取的点数是有限的, 总会有误差存在, 实际中求解变换矩阵  $\mathbf{B}$  时, 只要变换误差在  $10^{-3}$  量级或者更小, 就可以保证计算精度, 这时选取的步长也并不是太小。计算变换矩阵  $\mathbf{B}$  过程中要对  $\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H$  求逆, 在  $\mathbf{Q}$  接近奇异时, 求逆可能不准确, 会出现较大误差。加载一个极小量:  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \eta\mathbf{I}$  可避免这种情况。其中  $|\eta| \ll 1$ 。

假设实际阵列的数据协方差矩阵  $\mathbf{R}$ , 噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_N$ , 则经过虚拟变换后协方差矩阵变为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= \mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{B}^H = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_N)\mathbf{B}^H \\ &= \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H\mathbf{B}^H + \mathbf{B}\mathbf{R}_N\mathbf{B}^H \end{aligned} \quad (10)$$

当环境噪声为白噪声时,  $\mathbf{R}_N = \sigma_n\mathbf{I}$ ,  $\sigma_n$  为噪声功率。而经过虚拟变换后, 原来阵列接收的白噪声变成了色噪声。为了使众多算法能应用到虚拟阵列上, 必须白化色噪声。可

按如下方法白化色噪声: 首先估计噪声功率  $\sigma_n$ , 假设环境噪声统计独立,  $\sigma_n$  可由实际阵列接收数据中得到。则经过噪声白化处理后得到的虚拟阵列协方差矩阵为

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}} - \sigma_n\mathbf{B}\mathbf{B}^H + \sigma_n\mathbf{I} \quad (11)$$

则利用该协方差矩阵的 SMI 算法最优权为

$$\mathbf{W} = \alpha\bar{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{a}(\theta_0) \quad (12)$$

其中  $\mathbf{a}(\theta_0)$  为虚拟阵列期望信号方向导向矢量, 系数  $\alpha$  为任意常数。

### 4 改进的虚拟变换波束形成方法

通常情况下, 利用式(12)作基于虚拟阵列变换的自适应波束形成时, 变换区域应包含干扰方向, 否则虚拟变换误差会大大增加, 甚至导致波束畸变。经特征分解发现, 这是由于误差增大使  $\bar{\mathbf{R}}$  小特征值扩散引起的。当多个干扰在方位上相距较远时, 可将它们划分在多个虚拟变换区域内, 若某个区域误差较大, 则减小相应区域。先求出各自的  $\bar{\mathbf{R}}$ , 再取其平均作为最终的  $\bar{\mathbf{R}}$ , 即  $\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \bar{\mathbf{R}}_i$ ,  $J$  为划分的区域数

目。角度步长的选择可根据情况来决定, 对于精度要求高的场合采用小步长, 而对于一般场合采用适当的步长。

仿真结果证明这会起到明显改善方向图的作用, 增强了虚拟变换的稳健性。这是因为, 相比常规方法, 将变换区域分块能减小误差, 使得变换后的协方差矩阵更接近阵元数目相同的真实阵列。

虚拟阵列变换方法的优点在于增加了阵元数即自由度, 所以可以对抗实际阵列的超自由度干扰, 且旁瓣性能要好很多。另外需要指出的是, 虽然变换后的阵列可选择大的阵元数, 但不可能无穷大, 阵元数的选择只在一定范围内有效, 一般情况下, 输出 SINR 在虚拟阵列的孔径与实际阵列孔径基本相同时性能达到最优, 因而在实际稀疏阵引起栅瓣时虚拟阵列技术可以作为一种有效的解决方法。而且, 选择过多的虚拟阵元就会增大运算量, 从而增加实现的复杂度。虚拟阵列与同样参数的真实阵列相比, 在干扰方向形成的零点要浅一些, 这受到变换误差和变换区域的影响。本文思路在于给变换矩阵  $\mathbf{B}$  引入干扰方向信息, 即将变换矩阵向干扰空间投影。具体方法为: 由干扰方向信息  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)$ , 可得其虚拟阵列导向矢量  $\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)$ , 令

$$\mathbf{C} = \left( \sum_{i=1}^M \mathbf{a}(\theta_i)\mathbf{a}(\theta_i)^H \right)^H \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \quad (14)$$

其中  $(\cdot)$  表示矩阵相乘。以新的矩阵  $\bar{\mathbf{B}}$  作为变换矩阵, 可以在干扰方向形成很深的零点, 且不会太大增加协方差矩阵的误差。这是因为, 此时变换阵列的协方差矩阵变为  $\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{B}}^H = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{B}^H\mathbf{C}^H = \mathbf{C}\bar{\mathbf{R}}\mathbf{C}^H$ , 可见, 这实际是将原虚拟阵列数据协方差矩阵向干扰空间投影, 此处  $\bar{\mathbf{B}}$  中的干扰信息来自于  $\mathbf{C}$ , 因而无论变换区域是否包含干扰, 都能形成零点。虽然在变换误差等方面会有性能损失, 却可能换来更好的干扰对消和波束保形性能。

综上，本文算法步骤如下：

(1) 将整个扫描空间划分为  $N$  个区域，计算并存储  $N$  个变换矩阵  $B_1 \sim B_N$ 。

(2) 由干扰方向选择变换区域并得到修正变换矩阵。

(3) 用这些修正变换矩阵及快拍数据得到的协方差矩阵求出各个虚拟协方差矩阵并取其平均。

(4) 利用该平均后的协方差矩阵计算权值进行波束形成。

## 5 仿真分析

仿真参数：4 阵元均匀直线阵，阵元间距  $\lambda$ 。信号从  $0^\circ$  进入，信噪比 0dB。4 个不相关干扰位于  $-50^\circ, -35^\circ, 30^\circ, 67^\circ$ ，干噪比 40dB。步长  $0.1^\circ$ ，200 次快拍。虚拟阵列阵元数为 8，阵元间距  $\lambda/2$ 。本文算法划分的四个变换区域为： $[-55^\circ, -45^\circ]$ ， $[-40^\circ, -30^\circ]$ ， $[25^\circ, 35^\circ]$ ， $[62^\circ, 72^\circ]$ 。常规算法变换区域为  $[-55^\circ, 72^\circ]$ 。图 1 是本文算法得到的方向图与常规算法的比较。图 2 是本文算法得到的数据协方差矩阵特征值分布与常规算法的比较。图 3 是本文算法得到输出 SINR(信号干扰噪声比)与常规算法的比较。

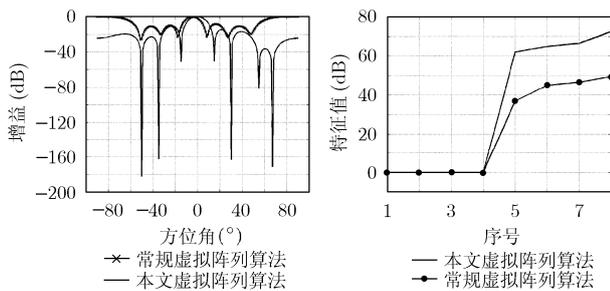


图 1 4 元阵，4 个干扰时两种算法方向图

图 2 4 元阵，4 个干扰时两种算法特征值分布情况

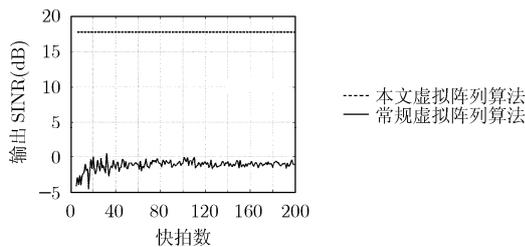


图 3 本文算法与常规算法的输出 SINR 比较

由图 1 可以看出，常规方法由于变换区域增大而导致方向图畸变，已经不能有效形成零点，主瓣也发生了  $5^\circ$  左右的漂移。而本文算法依然有效形成很深的零陷。这是因为，在变换矩阵中引入干扰信息，增强了采样协方差矩阵中的干扰分量，在波束形成时最优权能更准确的对准干扰。

由图 2 可以看出，本文算法得到的变换数据协方差矩阵特征值之间的差距比常规算法提高了 20dB 左右。使得干扰子空间和噪声子空间“界限分明”，增强了波束保形能力。

图 3 给出了两种算法的输出 SINR 随快拍数的变化曲线。可以看到，此时，常规虚拟阵列算法的输出 SINR 已经很低。

而本文算法依然有 18dB 左右的输出 SINR，且在小快拍数也能很快收敛。

另外，当有超自由度相干干扰时，本文算法会有一些程度的性能损失。因此需要解相干算法改善性能，以前向空间平滑为例，当有  $N$  个相干干扰时阵列至少得有  $2N$  个阵元才有可能抑制全部相干干扰，虚拟变换时，我们可以取大于  $2N$  个虚拟阵元，解相干后从而抑制这些相干干扰。当干扰信号方向估计与实际有误差时，本文算法性能会有所下降，此时可以采取加宽零陷等方法进行修正。实际中，可能有固定方位的干扰信号，如建筑物强散射点等，一般可以精确测量，这时采用本文方法能有效地改善干扰对消性能。

## 6 结束语

本文基于虚拟变换技术，提出了一种有效的波束形成方法，解决了变换区域过大带来的波束保形能力差的缺点。由于变换矩阵可以离线计算，修正时只需要一次矩阵乘法运算，运算量增加不大。理论分析和计算机仿真证明了该方法的有效性。

## 参考文献

- [1] Shan T J, Wax M, and Kailath T. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimating of coherent signals. *IEEE Trans. on Acoust, Speech, Signal Processing*, 1985, 33(8): 806-811.
- [2] 张玉洪, 保铮. 最佳非均匀间隔稀疏阵列的研究. *电子学报*, 1989, 17(4): 81-87.  
Zhang Yu-hong and Bao Zheng. Study of optimum thinning arrays by nonuniform spacings. *Acta Electronica Sinica*, 1989, 17(4): 81-87.
- [3] 陈客松, 何子述, 韩春林. 稀疏线阵阵列结构的枚举算法. *电子科技大学学报*, 2006, (35): 189-192.  
Chen Ke-song, He Zi-shu, and Han Chun-li. Two enumerate algorithms applied to thinned arrays synthesis. *Journal of UEST of China*, 2006, (35): 189-192.
- [4] Friedlander B. The root-music algorithm for direction finding with interpolated arrays. *Signal Processing*, 1993, 30(1): 15-29.
- [5] Weiss A J and Gavish M. Direction finding using esprit with interpolated arrays. *IEEE Trans. on SP*, 1991, 39(6): 1473-1478.
- [6] 李平安, 许家栋. 一种估计信号源方向的虚拟阵列方法. *西北工业大学学报*, 1999, 17(4): 505-508.  
Li Ping-an and Xu Jia-dong. A virtual array based technique for direction finding. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 1999, 17(4): 505-508.
- [7] Su Baowei. Robust adaptive beam forming via array transformation. 2005 IEEE AP-S International Symposium on Antennas and Propagation. Washington, DC, USA, 3-8 July 2005, 1B: 331-334.

王明哲：男，1982 年生，硕士生，从事阵列信号处理方面的研究。

王 俊：男，1969 年生，教授，博士生导师，中国电子学会高级会员，主要研究方向为自适应阵列信号处理、信号检测与估计、无源雷达探测与定位技术等。