基于 2-D 公共因子的精确提取的图像盲复原方法

王 睿　　方 勇
(上海大学通信与信息工程学院　上海　200072)

摘　要：利用 2-D 公共因子(GCD)提取是实现图像盲复原最有效的方法之一。该文发展了一种 2-D 公共因子精确提取算法，该算法不需要构建原算法中高阶病态方程，其复杂度大大降低，且提高了对噪声的鲁棒性。仿真实验证实了该文提出的方法优于传统图像复原算法。

关键词：图像复原；盲反卷积；2-D 公共因子
中图分类号：TN911.73　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2009)01-0108-04

Blind Restoration of Blurred Image Based on Precise Extraction of 2-D GCD

Wang Rui　　Fang Yong
(*College of Communication and Information Engineering*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200072, *China*)

Abstract: In this paper, the issue of blind image restoration is considered by using 2-D Great Common Divisor (GCD) extraction approach. A precise extraction algorithm of 2-D GCD is proposed. Since no high order ill-posed equation is needed, calculation complexity and noise robustness for the algorithm are improved. Simulation result shows that the proposed algorithm is able to provide a better performance than traditional algorithm.

Key words: Image restoration; Blind deconvolution; 2-D GCD

1　引言

图像复原技术在天文学，遥感图像，医疗图像等有广泛的应用。通常情况下，降晰图像可以看成原始图像和降晰函数的卷积，当降晰函数已知，图像复原就简化为经典的图像反卷积技术，当降晰函数未知，图像复原就需要使用盲反卷积技术，仅利用观测到的降晰图像进行图像盲复原。

图像盲复原算法主要有参数法[1,2]和迭代法[3−5]，典型参数法有先验模糊辨识法和 ARMA 参数估计法，先验模糊辨识法是利用频域变换或其它方法先估计出降晰函数，再利用经典的图像反卷积进行图像复原。ARMA 参数估计法是将真实图像和降晰函数用 AR 和 MA 模型加以描述，盲复原过程同时辨识降晰函数和真实图像模型参数。迭代法[6]不需要建立降晰函数或者真实图像的参数模型，而是选定一个代价函数，加上有关原始图像和降晰函数的相关约束，通过迭代算法，来同时辨识降晰函数和真实图像。虽然上述算法已获得深入研究，但实际应用往往受到很大限制。先验模糊辨识法没有考虑噪声的影响，因而对噪声敏感，而且算法需要已知降晰函数的结构，缺乏一般性，无法处理功率谱中没有零点的情况如高斯型降晰函数。ARMA 参数估计法要忍受较大计算量，解非唯一和不稳定性，通常要加入约束，但这也不能得到很好的解决，而且此方法一般只能处理最小相位系统。迭代法虽然避免了降晰模型的估计，同样面临算法计算量过大的问题。

文献[7−9]提出用原始图像的两幅降晰图像来实现图像盲复原(两幅降晰图像可以利用两部摄像机或一幅摄像机的多次聚焦以及不同介质的多次曝光得到)，该方法采用 2-D 公共因子提取算法，把原始图像看作两幅降晰图像的公共因子进行提取。它的主要优点是避开了其它算法中降晰函数的模型估计，需要的先验信息大大减少，同时复原是一个代数求解过程，绕开算法的迭代，使得算法的复杂度和计算量降低，相比其它图像盲复原算法，有着更广泛的应用前景。但该算法最终基于一个病态的高阶矩阵方程求解过程，即最后提取的 2-D 公共因子为一个近似解，把该近似解看作是原始图像的离散频域变换。算法的近似求解使得整个算法对噪声非常敏感，同时算法存在高阶矩阵方程求解，所以计算量极大。本文在文献[7−9]基础上提出一种新的 2-D GCD 精确提取算法，该算法避开了原算法的高阶病态方程求解过程，最终可以精确提取 2-D 公共因子，由于避开庞大的高阶方程求解，算法的复杂度也大幅降低，同时由于是精确提取，提高了算法对噪声的鲁棒性。仿真实验证实了本文提出的方法在算法复杂度，复原图像和复原误差功率比方面都优于传统图像复原算法。

2　2-D 公共因子精确提取算法

图像的降晰可看作原始图像和降晰函数(点扩展函数 PSF)的卷积过程，可用如下方式建模：

2007-06-18 收到，2007-12-06 改回
国家自然科学基金(60472103)资助课题

$$\boldsymbol{f}(i,j)=\boldsymbol{p}(i,j)*\boldsymbol{d}(i,j)+\boldsymbol{n}(i,j) \tag{1}$$

式中$*$为卷积，$\boldsymbol{f}(i,j)$, $\boldsymbol{p}(i,j)$ 分别是降晰图像和原始图像，$\boldsymbol{d}(i,j)$ 是降晰函数，$\boldsymbol{n}(i,j)$ 是附加随机噪声。当原始图像通过不同的降晰函数获得两幅降晰图像，可表示如下：

$$\boldsymbol{f}_i(i,j)=\boldsymbol{p}(i,j)*\boldsymbol{d}_i(i,j)+\boldsymbol{n}_i(i,j) \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{d}_i(i,j)$ ，i=1,2 为两个不同且互质的降晰函数，$\boldsymbol{f}_i(z_1,z_2)$ ，i=1,2 为两幅降晰图像。不考虑噪声，并变换到 Z 域，得到

$$\boldsymbol{F}_i(z_1,z_2)=\boldsymbol{P}(z_1,z_2)\boldsymbol{D}_i(z_1,z_2),\ \ i{=}1{,}2 \tag{3}$$

这时，原始图像看作两幅降晰图像 $\boldsymbol{F}_i(z_1,z_2)$ ，$i=1,2$ 的公共因子，从而利用 2-D 公共因子提取可以实现图像的复原。

从 1-D 公共因子提取法[7−9]过渡到 2-D，如果直接把二维按行或按列排成一维，再利用 1-D 公共因子提取方法，会造成计算量过大的问题。借鉴文献[7-9]的方法，先对观测二维矩阵做二维 Z 变换，再过渡到离散频域，能很好地解决直接展开的计算量过大问题，但文献[7-9]最后是通过构建一个高阶病态矩阵方程来近似求解公共因子的频域变换，不能精确的求出公共因子。设想在频域是近似，再做逆变换到时域，必然会造成误差过大，在此基础上，下文推导出一种新的避开构造高阶病态矩阵公共因子提取算法，并最终能够实现公共因子的精确提取。

假设两幅降晰图像 Z 域变换 $\boldsymbol{F}_i(z_1,z_2)$ ，$i=1,2$ 阶数为 $M_1\times N_1$ ，原始图像 $\boldsymbol{P}(z_1,z_2)$ 阶数为 $M_2\times N_2$ ，维降晰函数 $\boldsymbol{D}_i(z_1,z_2)$ ，$i=1,2$ 阶数为 $M_3\times N_3$ ，有如下等式成立

$$M_1=M_2+M_3-1 \tag{4}$$

$$N_1=N_2+N_3-1 \tag{5}$$

此时 $\boldsymbol{F}_i(z_1,z_2)$ ，$i=1,2$ 为含两个变量的多项式，取 $z_1=\exp\left(-j\dfrac{2\pi m}{M_1}\right)$ ，$m=0,1,\cdots,M_1-1$ ，式(3)变为

$$\boldsymbol{F}_1\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},z_2\right)=\boldsymbol{P}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},z_2\right)\boldsymbol{D}_1\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},z_2\right),\quad m=0,1,\cdots,M_1-1 \tag{6}$$

$$\boldsymbol{F}_2\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},z_2\right)=\boldsymbol{P}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},z_2\right)\boldsymbol{D}_2\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},z_2\right),\quad m=0,1,\cdots,M_1-1 \tag{7}$$

式(6)、式(7)由含有 z_1 ，z_2 两个变量的多项式，变为只含 z_2 一个变量的 M_1 个多项式，有效地实现二维降到一维。而对于每个 m ，$\boldsymbol{F}_i(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},z_2)$ ，$i=1,2$ 就变为 1-D 公共因子提取，借助 1-D 公共因子提取方法，最终得到 2-D 公共因子初步提取结果为 $\boldsymbol{c}(m)\boldsymbol{P}(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},z_2)$ ，$m=0,1,\cdots,M_1-1$ 。$\boldsymbol{c}(m)$ 是每行被乘上的不定系数，再继续替换 $z_2=\exp\left(-j\dfrac{2\pi m}{N_1}\right),n=0,1,\cdots,N_1-1$ ，得到

$$\boldsymbol{A}(m,n)=\boldsymbol{c}(m)\boldsymbol{P}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}}\right) \tag{8}$$

$\boldsymbol{A}(m,n)$ 相当于是把公共因子(原始图像，$\boldsymbol{p}(i,j)$ 进行二维 DFT 变换，并且每行乘上未知的不定系数 $\boldsymbol{c}(m),m=0,1,\cdots,M_1-1$ ，正因为这些不定系数，我们不能直接做 IDFT 变换求解时域的公共因子(原始图像) $\boldsymbol{p}(i,j)$ 。

按照上述方法，进行类似过程，先替换 $z_2=\exp\left(-j\dfrac{2\pi n}{N_1}\right)$, $n=0,1,\cdots,N_1-1$, 再替换 z_1=$\exp\left(-j\dfrac{2\pi m}{M_1}\right)$, $m=0,1,\cdots,M_1-1$ 得到

$$\boldsymbol{B}(m,n)=\boldsymbol{d}(n)\boldsymbol{P}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}}\right) \tag{9}$$

$\boldsymbol{B}(m,n)$ 相当于把公共因子 $\boldsymbol{P}(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}})$ 每列乘上未知的不定系数 $\boldsymbol{d}(n)$ ，$n=0,1,\cdots,N_1-1$ 。

考虑到 $\boldsymbol{B}(m,n)$ 和 $\boldsymbol{A}(m,n)$ 分别是 $\boldsymbol{P}(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}})$ 行和列乘上未知的不定系数，假设 $\boldsymbol{c}(m)$ 和 $\boldsymbol{d}(n)$ 对应如下矩阵

$$\boldsymbol{c}(m)=\begin{bmatrix}\varDelta_1 & \varDelta_1 & \cdots & \varDelta_1\\ \varDelta_2 & \varDelta_2 & \cdots & \varDelta_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varDelta_{M_1} & \varDelta_{M_1} & \cdots & \varDelta_{M_1}\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{d}(n)=\begin{bmatrix}O_1 & O_2 & \cdots & O_{N_1}\\ O_1 & O_2 & \cdots & O_{N_1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O_1 & O_2 & \cdots & O_{N_1}\end{bmatrix} \tag{11}$$

式(10)、式(11)阶数都为 $M_1\times N_1$ 。要获得准确的公共因子，关键问题就是消除利用 $\boldsymbol{A}(m,n)$, $\boldsymbol{B}(m,n)$ 中未知不定系数。由上分析得知，$\boldsymbol{A}(m,n)$ 为真实公共因子(原始图像)的频域变换每行乘上未知不定系数，但列之间的原始比例关系并没有改变，根据傅里叶变换和反变换，只要在频域的不同频点的比例关系保持不变，即同时乘上或除上相同数，反变换不受影响，只是在最后的结果乘上或除上相同数，而 $\boldsymbol{B}(m,n)$ 正好相反，虽然列被乘上未知不定系数，但行之间的原始比例关系没有遭到破坏。我们可利用 $\boldsymbol{A}(m,n)$, $\boldsymbol{B}(m,n)$ 这些特殊关系，采用以下方法，首先把 $\boldsymbol{A}(m,n)$, $\boldsymbol{B}(m,n)$ 做对应点除运算

$$\frac{\boldsymbol{A}(m,n)}{\boldsymbol{B}(m,n)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\varDelta_1}{O_1} & \dfrac{\varDelta_1}{O_2} & \cdots & \dfrac{\varDelta_1}{O_{N_1}}\\ \dfrac{\varDelta_2}{O_1} & \dfrac{\varDelta_2}{O_2} & \cdots & \dfrac{\varDelta_2}{O_{N_1}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\varDelta_{M_1}}{O_1} & \dfrac{\varDelta_{M_1}}{O_2} & \cdots & \dfrac{\varDelta_{M_1}}{O_{N_1}}\end{bmatrix} \tag{12}$$

取式(12)第 1 行

$$\boldsymbol{l}(n)=\begin{bmatrix}\dfrac{\varDelta_1}{O_1} & \dfrac{\varDelta_1}{O_2} & \cdots & \dfrac{\varDelta_1}{O_{N_1}}\end{bmatrix} \tag{13}$$

把 $\boldsymbol{l}(n)$ 和 $\boldsymbol{B}(m,n)$ 的每行做对应点乘，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}'(m,n)&=\boldsymbol{B}(m,n)\boldsymbol{l}(n)\\ &=\boldsymbol{P}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}}\right)\cdot\begin{bmatrix}\varDelta_1 & \varDelta_1 & \cdots & \varDelta_1\\ \varDelta_1 & \varDelta_1 & \cdots & \varDelta_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varDelta_1 & \varDelta_1 & \cdots & \varDelta_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

$\bullet$ 表示点乘，此时得到 $\boldsymbol{p}(i,j)$ 频域变换的准确结果(乘上一常

数)。同理

(1)取 $\dfrac{\boldsymbol{B}(m,n)}{\boldsymbol{A}(m,n)}$ 的第 1 列 $\boldsymbol{r}(m)$；

(2)把 $\boldsymbol{r}(m)$ 和 $\boldsymbol{A}(m,n)$ 每列做对应点乘

$$\boldsymbol{A}'(m,n)=\boldsymbol{A}(m,n)\cdot\boldsymbol{r}(m)$$

$$=\boldsymbol{P}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}}\right)\cdot\begin{bmatrix}O_1 & O_1 & \cdots & O_1\\ O_1 & O_1 & \cdots & O_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O_1 & O_1 & \cdots & O_1\end{bmatrix} \tag{15}$$

也可得到 $\boldsymbol{p}(i,j)$ 频域变换的准确结果(乘上一常数)，实际应用时，我们取 $\boldsymbol{A}'(m,n)$ 和 $\boldsymbol{B}'(m,n)$ 均值作为 $\boldsymbol{P}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}}\right)$ 估计值，即

$$\widehat{\boldsymbol{P}}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}}\right)=\frac{\boldsymbol{A}'(m,n)+\boldsymbol{B}'(m,n)}{2} \tag{16}$$

和文献[7-9]相比，不需要利用 $\boldsymbol{A}(m,n)$ 和 $\boldsymbol{B}(m,n)$ 构造病态矩阵方程近似求解 $\boldsymbol{P}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}}\right)$，可以很精确得到 $\boldsymbol{P}\left(e^{-j\frac{2\pi m}{M_1}},e^{-j\frac{2\pi n}{N_1}}\right)$，同时，最后的求解过程只需要矩阵的点乘和点除，计算量大大降低。

3 试验结果与分析

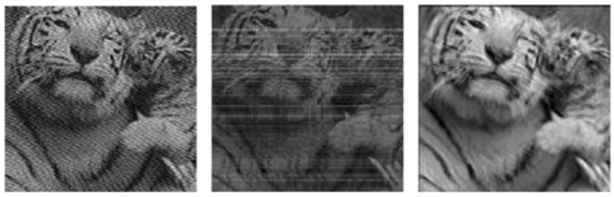
试验中采用 200×200 像素 tiger 图像，降晰函数是 8×8 随机产生矩阵。图 1 是原始图像和两幅不同的降晰图像，图 2，图 3 分别是在降晰后加入不同的噪声所产生的复原效果，其中图 2 和图 3(c)为文献[6]算法迭代 100 次复原效果。试验结果显示本文算法比文献[7]近似求解算法复原要好，对噪声有较好的鲁棒性。和文献[6]比较，在高信噪比的情况下较文献[6]好，但由于文献[6]在迭代过程中加入噪声平滑的约束，所以在对噪声不敏感，低信噪比下也可有很好的复原效果，但付出的代价是长时间的算法迭代过程，算法的复杂度较高。

(a) 原始图像 (b) 一种降晰图像 (c) 另一种降晰图像

图 1

(a) 本文算法复原结果 (b) 文献 [7] 复原结果 (c) 文献 [6] 复原结果

图 2 输入 SNR 80dB 各种算法的复原效果



(a) 本文算法复原结果 (b) 文献 [7] 复原结果 (c) 文献 [6] 复原结果

图 3 输入 SNR 50dB 各种算法的复原效果

表 1 给出本文算法，文献[7] 算法，文献[6] 算法(此时迭代 50 次，低信噪比下和本文算法效果相当) 在不同图像大小情况下的时间消耗。本文算法由于避开了文献[7]中高阶的方程求解过程，时间消耗方面显示极大优势，实验结果显示随着图像的阶数的增大，时间节省更加明显。

表 1 3 种算法复杂度比较

	图像大小及算法运行时间(s)				
	40×40	100×100	150×150	180×180	210×210
本文算法	0.792	4.707	19.413	29.061	46.217
文献[7]	1.427	11.617	44.774	89.348	360.809
文献[6]	88.4	561.8	954.7	1220.5	1398.6

图 4 给出在不同输入信噪比(随机噪声是原始图像经过降晰后加入)下， 复原图像和复原误差的功率比比较，其中功率比计算依据下式：

$$\text{复原图像和复原误差功率比}=\frac{\text{复原图像的方差}}{\text{复原图像和原始图像之差的方差}}$$

试验结果显示本文算法较文献[7]有较大的改进。

图 5 给出了随着降晰因子阶数增大，本文算法和文献[7]在时间上的消耗，实验结果显示本文算法的时间消耗和降晰因子阶数的增加基本无关，而文献[7]中算法随着降晰因子阶数的增大，消耗时间有增大的趋势，同时两种算法之间的差距进一步表明本文改进算法在计算复杂度方面的优势。

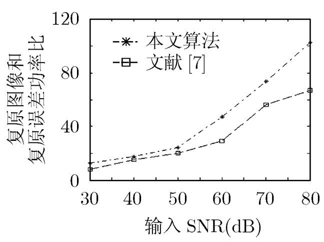


图 4 不同噪声条件下复原算法比较

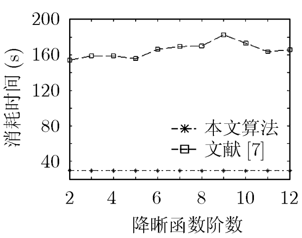


图 5 降晰函数不同算法时间的比较

4 结束语

本文在 2-D 公共因子提取算法基础上，提出新的 2-D 公

共因子精确提取算法，避开了原算法通过构建高阶病态方程，近似求解 2-D 公共因子的频域变换。使得能够精确提取出 2-D 公共因子，并且由于避开高阶矩阵的 SVD 分解，算法复杂度明显降低。同时由于是精确提取，算法对噪声的鲁棒性显著提高。

参 考 文 献

[1] 邹谋炎. 盲反卷积和信号复原[M]. 第一版, 北京: 国防工业出版社, 2001: 189–194.
Zou M Y. Deconvolution and Signal Recovery[M]. First edition, Beijing: National defense industry press, 2001: 189–194.

[2] Wai U Q and Chen C H. Blind image restoration for ultrasonic C-Scan using constrained 2D-HOS[C]. IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, Salt Lake, UT, USA, 2001, 6: 3405–3408.

[3] Chan T F and Wong C K. Convergence of the alternating minimization algorithm for blind deconvolution[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2000, 316(1-3): 259–285.

[4] Kundur D and Hatzinkos D. On the use of lyapunov criteria to analyze the convergence of blind deconvolution algorithms[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(11): 2918–2925.

[5] Fiori S. Blind intrinsically stable 2-pole IIR filtering. *Electronics Letters*, 2002, 38(23): 1482–1483.

[6] You Y L and Kaveh M. A regularization approach to joint blur identification and image restoration[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1996, 5(3): 417–428.

[7] Unnikrishna S and Ben L. Blind image deconvolution using a robust GCD approach. *IEEE Trans. on Image Processing*[J], 1999, 8(2): 295–301.

[8] Ben L and Unnikrishna S. Blind image deconvolution using a robust GCD approach[C]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Hong Kong, 1997: 1184–1188.

[9] Ben L and Unnikrishna S. Two-dimensional blind deconvolution using a robust GCD approach[J]. Proceedings of the 1997 International Conference on Image Processing, Santa Barbara, USA, 1997: 424–427.

王 睿： 男，1984 年生，硕士生，研究方向为数字图像处理、盲信号分离.

方 勇： 男，1964 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为盲信号分离、神经网络、自动控制和无线通信.