

紧缩能量分层有限 Ridgelet 图像去噪新方法

赵春晖 尚政国

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院 哈尔滨 150001)

摘要:有限 Ridgelet 变换是一种为了克服 Wavelet 在高维信号处理中的不足而提出的图像处理新方法。通过 Radon 变换将图像边缘奇异性转变为点奇异性,再利用 Wavelet 变换针对点奇异性进行处理。根据图像经 Radon 变换后能量分布紧缩集中,该文提出一种新的 Ridgelet 改进算法,该算法在图像 Ridgelet 变换过程中,按能量高低分为两种能量系数矩阵再分别进行降噪处理,并在融合重构以后,再次利用 Wavelet 变换提取低能量图像中的细节信息并将之融合,二次加强图像细节。使得输出信噪比及图像细节保持上得到大幅度提高。仿真试验表明在受噪声干扰严重情况下,该方法的输出信噪比及视觉效果均优于其他算法。

关键词:Radon 变换;能量分层;Ridgelet 变换;Wavelet 变换

中图分类号:TN911.73

文献标识码:A

文章编号:1009-5896(2008)12-2894-04

New FRIT Denoisy Method Based on Compact Energy Delamination

Zhao Chun-hui Shang Zheng-guo

(College of Information & Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: The Finite Ridgelet Transform (FRIT) is a new image processing method which could conquer the defect of Wavelet in high dimension. The method changes the line singularity in the image into the point singularity via the Radon transform, deals the point singularity with Wavelet transform. It is shown that the energy is compact by using the Radon transform on the image, and the characteristic on the Ridgelet transform is applied in the image processing which obtains the good result in the denoising and the edge keeping of the image. Especially under the strong noisy, it is better than other methods.

Key words: Radon transform; Energy delamination; Ridgelet transform; Wavelet transform

1 引言

实际中的各种图像都是通过采集设备而获得的带噪图像。其噪声主要分为两类,即设备噪声及自然噪声。为了后续处理的需要,对图像进行去噪是有必要的。人们根据实际图像的特点提出了各种去噪方法,如滑动平均窗滤波^[1], Wiener 滤波^[1],基于秩——阶滤波^[2],形态滤波,以及基于 Wavelet 变换去噪^[3]等。Wavelet 去噪法虽然具有对点的良好去噪能力,但是其系数的局部模极大值只能反映该系数是“过”边缘,无法表达“沿”边缘信息,因此对边缘的保持能力不强^[4]。Ridgelet 变换是在研究 Wavelet 基础上发展起来的,它不但克服了 Wavelet 变换的缺点,而且还具有其自身的独特优点。将 Ridgelet 变换应用于图像去噪过程中,可获得比 Wavelet 更好的边缘保持能力及去噪效果。在处理过程中根据能量分布将系数分层处理的改进 Ridgelet 去噪算法,可获得比原始 Ridgelet 去噪法更加理想的处理效果。

2 有限 Ridgelet 变换算法基本原理

2.1 连续 Ridgelet 变换^[5]

对于一个给定的双变量可积函数 $f(x)$,在 R^2 域中的连续 Ridgelet 变换定义如下^[6]:

$$CRT_f(a, b, \theta) = \int_{R^2} \Psi_{a, b, \theta}(x) f(x) dx \quad (1)$$

式中 $\Psi_{a, b, \theta}(x)$ 为二维 Ridgelet 函数,其表达式为函数 $\Psi(x)$ 的一维 Wavelet 变换,

$$\Psi_{a, b, \theta}(x) = a \Psi \left(\frac{x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - b}{a} \right) \quad (2)$$

Ridgelet 变换和 Wavelet 变换是相互关联的,二者通过 Radon 变换联系在一起。

函数 $f(x, y)$ 的 Radon 变换是该函数沿平面内不同斜率平行线组的积分^[7]。

$$R_f(x, y) = \iint f(x, y) \delta(t - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \quad (3)$$

在某一方向 θ 的 Radon 变换必然会和图像中的某一直线型奇异性重合,在这个方向上沿直线进行积分后,会将直线型奇异性转变为点状奇异性。

2.2 有限 Radon 变换

有限 Radon 变换^[8](FRAT)是有限大小的二维离散图像

2007-06-15 收到,2007-12-13 改回

国家自然科学基金(60672034),高等学校博士学科点基金(20060217021)和黑龙江省自然科学基金(ZJG0606-01)资助课题

实现有限 Ridgelet 变换的手段。FRAT 为图像中各方向斜率的平行线上所有像素值累加集合。

对于一个 \mathbf{Z}_p^2 域上 $p \times p$ (p 为素数) 大小的图像数据 $f(i, j), i, j \in \mathbf{Z}_p^2$, 首先定义一个 p 的模向量 $\mathbf{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, 则图像 $f(i, j), i, j \in \mathbf{Z}_p^2$ 的 FRAT 变换如下:

$$r_k(l) = \text{FRAT}_f(k, l) = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{(i,j) \in L_{k,l}} f(i, j) \quad (4)$$

$L_{k,l}$ 是 \mathbf{Z}_p^2 域上有限点组成的直线, 在有限变换中这一系列直线的定义方式与连续 Radon 变换中的定义方式一致。其中 k 为离散化斜率、 l 为离散化截距。 $L_{k,l}$ 定义如下:

$$\begin{aligned} L_{k,l} &= \{(i, j) : j = k \cdot i + l \pmod{p}, i \in \mathbf{Z}_p\}, 0 \leq k \leq p \\ L_{k,l} &= \{(l, j) : j \in \mathbf{Z}_p\} \end{aligned} \quad (5)$$

FRAT 的逆变换定义为通过 \mathbf{Z}_p^2 内每一个点的所有直线 Radon 系数 $r_k(l)$ 的总和:

$$\text{FBP}_r[i, j] = \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{(k,l) \in P_{i,j}} r_k[l], (i, j) \in \mathbf{Z}_p^2 \quad (6)$$

$P_{i,j}$ 为通过点 $(i, j) \in \mathbf{Z}_p^2$ 的一系列直线参数的集合, $P_{i,j}$ 具体定义如下:

$$P_{i,j} = \{(k, l) : l = j - ki \pmod{p}, k \in \mathbf{Z}_p\} \cup \{(p, i)\} \quad (7)$$

假设 \mathbf{Z}_p^2 中图像为零均值数据, 将式(4)带入式(6), 则得到:

$$\begin{aligned} \text{FBP}(r[i, j]) &= \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{(k,l) \in P_{i,j}} \sum_{(i',j') \in L_{k,l}} f[i', j'] \\ &= \frac{1}{P} \left[\sum_{(i',j') \in \mathbf{Z}_p^2} f[i', j'] + pf[i, j] \right] = f[i, j] \end{aligned} \quad (8)$$

3 压缩能量分层有限 Ridgelet 去噪

3.1 FRAT 压缩能量分层

如果在图像中存在直线性边缘, 则会在 Radon 系数的列数据中出现模值较大的系数, 该列的能量也会高于其他列^[8]。也就是说一幅带有直线特征的图像经过 Radon 变换后能量是紧缩的。如图 1 为工件图像及其对应的 Radon 系数能量比例分布, 以及其中前 30 个较大能量分布图。图 1(b), 图 1(c) 中横坐标为 Radon 系数对应序号, 纵坐标为该系数在总能量中所占百分比。图 1(b), 图 1(c) 及表 1 可以看到在 258 个方向列数据中, 主要能量只集中分布在少量系数中, 前 10 个较大能量之和已达到总能量 91.46%, 前 10% 较大能量之和占总能量的 96.43%。

对于零均值图像矩阵 $\mathbf{f}(i, j), i, j \in \mathbf{Z}^2$, 定义 $(k_h, l_h) \in \text{Ehigh}L_{k_h, l_h}$, $(k_l, l_l) \in \text{Elow}L_{k_l, l_l}$, $\text{Ehigh}L_{k_h, l_h}$, $\text{Elow}L_{k_l, l_l}$ 为 \mathbf{Z}_p^2 上有限点组成的高、低能量分布直线集合, 其中 k_h, k_l 为斜率, l_h, l_l 为截距。

$$\begin{aligned} r_k(l) &= \text{FRAT}_f(k, l) \\ &= \frac{1}{\sqrt{P}} \left[\sum_{(k_h, l_h) \in \text{Ehigh}L_{k_h, l_h}} \mathbf{f}(i, j) + \sum_{(k_l, l_l) \in \text{Elow}L_{k_l, l_l}} \mathbf{f}(i, j) \right] \\ &= \text{rhigh}_k[l] + \text{rlow}_k[l] \end{aligned} \quad (9)$$

定义 $\text{Phigh}_{i,j}$, $\text{Plow}_{i,j}$ 为一系列通过点 $(i, j) \in \mathbf{Z}_p^2$ 的所

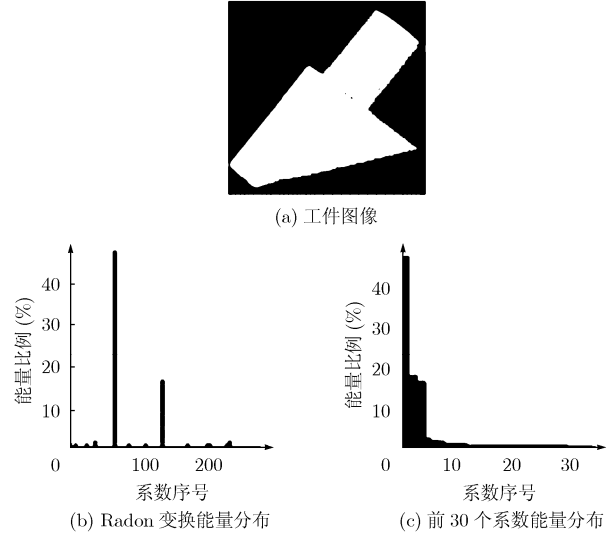


图 1 工件图像及其对应的 Radon 系数能量分布

表 1 系数能量和及其百分比总能量 3.4805×10^7

较大方向能量个数 N	前 N 个能量总和 ($\times 10^7$)	占总能量百分比 (%)
10	3.1833	91.46
20	3.3024	94.88
30	3.3564	96.43
40	3.3873	97.32

有高低能量直线参数集合。

$$\begin{aligned} \text{im}_{\text{high}} &= \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{(k,l) \in \text{Phigh}_{i,j}} \sum_{(i',j') \in L_{k,l}} f[i', j'] \\ &= \frac{1}{P} \left[\sum_{(i',j') \in \mathbf{Z}_p^2} f[i', j'] + p f_{\text{high}}[i, j] \right] = f_{\text{high}}[i, j] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{im}_{\text{low}} &= \frac{1}{\sqrt{P}} \sum_{(k,l) \in \text{Plow}_{i,j}} \sum_{(i',j') \in L_{k,l}} f[i', j'] \\ &= \frac{1}{P} \left[\sum_{(i',j') \in \mathbf{Z}_p^2} f[i', j'] + p f_{\text{low}}[i, j] \right] = f_{\text{low}}[i, j] \end{aligned} \quad (11)$$

由上述推导过程可以看出, 对于一个零均值输入图像, 可利用有限 Radon 变换按照能量分布将图像分解为两个高低能量系数矩阵, 并将这两个系数矩阵重构为两个高低能量图像层。

3.2 能量紧缩分层有限 Ridgelet 去噪

在 Ridgelet 系数中能量是紧缩的, 更多的图像信息集中在更少的系数中。图像在受到噪声干扰情况下, 各个方向上的能量均在不同程度上受到噪声的影响。如图 2 所示, 图 2(a)、图 2(b) 两图分别为受噪工件图像的高低 Radon 能量分布; 分别对高低能量图像层进行 Ridgelet 去噪后, 所得 Radon 能量分布如图 2(c), 图 2(d) 所示。高能量信息经过 Ridgelet 去噪后, 其主要 Radon 能量百分比也相对提高, 几乎恢复到原始图像能量分布状态, 低能量图像经过去噪后主要方向信息能量得到保留, 并滤掉了大部分细节信息上的噪声能量。

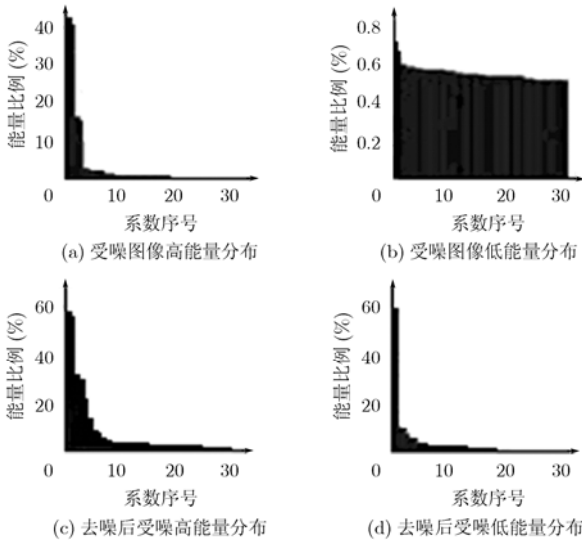


图2 两种情况下 Radon 系数能量分布百分比

因此，对一幅图像中的高低能量采用不同阈值进行 Ridgelet 去噪处理，可将图像不同能量区域信息保留下来。

3.3 算法流程

紧缩能量分层有限 Ridgelet 去噪流程如图3所示。

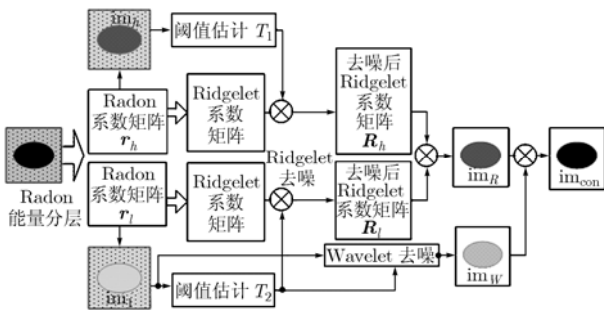


图3 紧缩能量分层有限 Ridgelet 去噪流程图

根据上述算法流程，确定算法步骤如下：

- (1)能量分层。将噪声图像进行 Radon 分解，根据能量分布将 Radon 系数分为两类 r_h , r_l , 其中 r_h 包含总系数中的前 10%能量较大系数，然后分别重构高、低能量图像层 im_h , im_l 。
- (2)阈值估计。对两个图像数据 im_h , im_l 进行阈值估计，分别获得阈值 T_1 , T_2 。
- (3)有限 Ridgelet 降噪。对 r_h , r_l 进行离散 Wavelet 变换，得到正交 Ridgelet 系数，并根据阈值对 Ridgelet 系数矩阵分别进行去噪，得到高、低能量降噪系数 R_h 与 R_l 。
- (4)融合重构。将 R_h 与 R_l 融合并重构，得到降噪图像 im_R 。
- (5)细节增强。为了更加突出图像中的细节信息，再对低能量图像层 im_l 进行离散 Wavelet 去噪，将去噪后的细节图像 im_W 与 im_R 融合，最终得到本算法输出图像 im_{con} 。

(6)为了去除图像中的部分杂点和边缘上的毛刺以及图像中的部分“环绕”现象，可将图像通过维纳滤波器，获得理想效果。

4 实验结果分析

实验中将该算法应用于工件图像去噪。并在不同强度噪声干扰下，进行多方法去噪。表2和图4为不同噪声情况下各算法输出信噪比及曲线分布。

表2 各种去噪方法输出结果信噪比

图像信噪比 (dB)	降噪方法输出信噪比(dB)				
	中值滤波	FRIT	Wavelet	本文方法	本文方法+Wiener
-6.05	6.29	8.35	10.24	10.75	12.95
-0.03	9.83	11.07	12.07	14.83	16.35
3.45	11.25	12.67	13.31	16.12	17.30
5.99	12.35	13.85	14.31	16.59	17.67
7.93	13.88	14.78	15.13	16.77	17.83
9.52	15.03	15.55	15.84	16.85	17.90

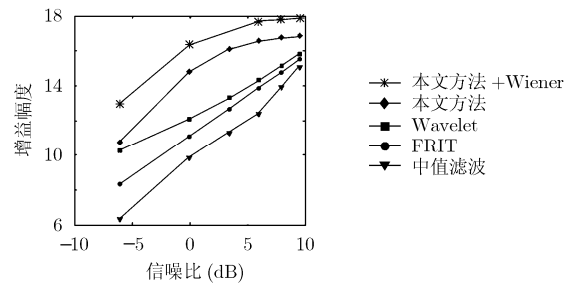


图4 各滤波器输出信噪比曲线

实验中信噪比 SNR 定义如下：

$$SNR = 10 \lg \frac{E_o}{E_n} = 10 \lg \left(\frac{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N I^2(x,y)}{\sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^N N^2(x,y)} \right) \quad (12)$$

E_o 是原始图像能量， E_n 是所加噪声能量。 $I(x,y)$, $N(x,y)$ 分别为对应的图像数据和噪声数据。

在降噪效果比较实验中，分别采用中值滤波、Wavelet 去噪、FRIT去噪，并将其输出效果与本文算法中第(5)步、第(6)步输出效果进行比较。

图5是工件图像在加入高斯白噪声，信噪比为 3.49dB，应用以上几种去噪算法后处理效果比较。

中值滤波算法采用 3×3 滤波窗，虽然在图像中边界有一定的清晰度，但是由于滤波窗口较小，其输出图像去噪效果较差信噪比较低，在图像中存在相当一部分的噪声。

Wavelet处理方法采用“db4”3层降噪处理，该方法能够在很大程度上降低噪声影响提高图像信噪比。但由于 Wavelet 变换对于沿“线”方向的信息敏感度低，因此不能

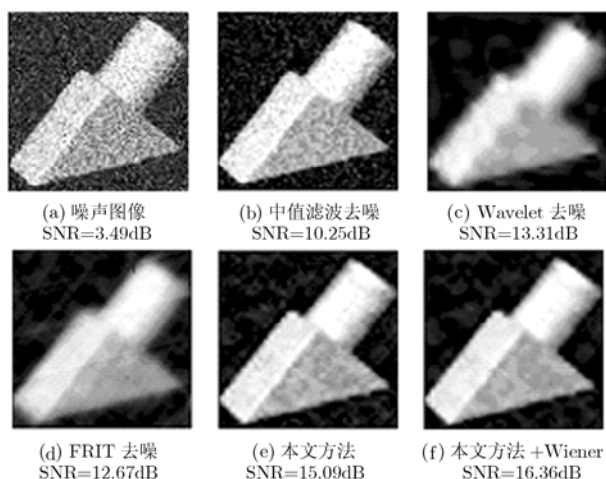


图5 各去噪方法输出效果图像比较

起到较好的边缘保持效果, 使得目标边缘模糊。

FRIT 对目标的边缘信息处理效果好于 Wavelet, 但是在强噪声下, 仍然难以较清晰地恢复目标, 并且在输出图像中有一定的“环绕”现象。

本文提出的算法在信噪比及边缘信息重构上均好于其他处理方法。由于图像中大部分能量集中在低频, 因此高能量部分中包含了图像的低频信息, 如图像的整体形状等; 而低能量部分则包含了图像中的高频信息即细节信息及部分噪声, 如图像中物体的边缘、纹理及噪声等, 对此采用 Ridgelet 去噪能够更好地保留图像中的直线型信息, 而采用 Wavelet 去噪则能更好地保留图像中非直线型信息尤其是点型细节。将这 3 部分图像信息融合后获得的去噪图像效果明显好于其他去噪方法。尤其是将结果通过 Wiener 滤波后, 在滤除杂点削弱“环绕”现象的基础上又可进一步提高信噪比。

5 结束语

本文通过研究 Radon 变换系数能量分布特性, 提出紧缩能量分层 Ridgelet 去噪算法。该算法继承了有限 Ridgelet 去噪

算法对直线特征良好的敏感特性, 同时也在去噪过程中提高了对细节信息的利用程度, 使输出图像的细节部分明显增强, 提高了输出信噪比, 并且在一定程度上削弱了“环绕”现象。经过实验测试, 本算法在强噪声干扰下, 其去噪效果能力明显好于其他算法。

参考文献

- [1] Bberger Cs. Self-tuning control of offset using a moving average filter. *IEEE proceedings. Part D. Control theory and applications*, 1985, 133(44): 184-188.
- [2] Pitas I and Venetsanopoulos A N. *Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990: 171-177.
- [3] Gunawan D. Denoising images using wavelet transform. *Proceedings of the IEEE Pacific Rin Conference on Communications, Computers and Signal*. Victoria BC, USA, 1999: 83-85.
- [4] Donoho D L and Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994(81): 425-455.
- [5] Hou Biao, Jiao Li-cheng, and Liu Fang. Image denoising based on ridgelet. *Signal Processing*, 2002 6th International Conference on Signal Processing, Beijing, 26-30 Aug. 2002(1): 780-783.
- [6] Candés E J and Donoho D L. Ridgelet: a key to higher-dimensional intermittency. *Phil. Trans. R Soc lond A*, 1999, 357(1760): 2495-2509.
- [7] Candés E J. *Ridgelets: Theory and applications*. Department of Statistics, Stanford University, 1998: 23-38.
- [8] Minh N D and Vetterli M. The finite Ridgelet transform for image representation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2003: 12(1): 16-28.

赵春晖: 男, 1965 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为智能信息处理技术、图像处理。

尚政国: 男, 1981 年生, 博士, 研究方向为图像处理和模式识别。