

图像局部弹性变换中径向基函数紧支撑集的选取

杨 烜^① 裴继红^② 张智雄^①

^①(深圳大学信息工程学院 深圳 518060)

^②(深圳大学智能信息处理研究所 深圳 518060)

摘要: 弹性图像配准中常常需要采用紧支撑的径向基函数来实现局部弹性变换, 径向基函数的支撑集大小决定了图像局部扭曲的范围, 而如何选取基函数的支撑集大小是一个一直没有解决的问题。该文利用弹性变换模型, 针对 Wendland 基函数, 从理论上分析了双标志点空间位置与基函数支撑集的关系, 并对任意标志点集合通过构造 Delaunay 三角剖分来确定基函数支撑集大小, 文中给出了径向基函数支撑集的选取原则。人工网格图像和医学图像的局部弹性变换实验验证了该文的结论。

关键词: 图像处理; 图像弹性变换; 径向基函数; 支撑集

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)12-2898-04

Compact Support Analysis of Radial Basis Function in Image Local Elastic Transformation

Yang Xuan^① Pei Ji-hong^② Zhang Zhi-xiong^①

^①(College of Information Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

^②(Intelligent Information Processing Laboratory of Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract: In image local elastic transformation, compact support radial basis functions are used to implement local elastic deformation transformation. The elastic deformation area is related to the support of radial basis function. However, how to choose the support size of the radial basis function based on space distribution of landmarks still is an unresolved doubt. In this paper, choosing the support of Wendland basis functions based on the space distribution of two landmarks is analyzed in detail. For the landmarks set, Delaunay triangle is constructed to obtain the optimal distance between landmarks, and support is chosen correspondingly. The principle of choosing the support size of radial basis functions in image local elastic transformation is given also. Experiments of the artificial images and medial images show the feasibility of this conclusion.

Key words: Image processing; Image elastic transformation; Radial basis function; Compact support

1 引言

在基于标志点的弹性图像配准方法中, 图像弹性变换起着至关重要的作用^[1-10]。一般来讲, 图像弹性变换要求连续、光滑, 扭曲能量尽可能小。Bookstein^[1]提出了薄板样条插值方法(TPS), 该方法满足扭曲能量最小的条件, 是弹性配准中经常使用的一种图像弹性变换方法^[6,9]。但是由于 TPS 中采用的基函数不是紧支撑的, 距离标志点越远, 基函数的值越大, 导致整图都存在这种扭曲。这样对于只发生局部扭曲的配准问题, TPS 并不适用。为了解决局部弹性配准问题, Fornet^[3,4]利用 Wendland 函数^[7]作为弹性变换的径向基函数, Wendland 函数具有紧支撑特性, 可以实现局部的弹性变换; Arad^[2]采用 Gauss 函数作为径向基函数, 同样可以实现局部弹性变换, 但是 Gauss 函数并不是真正意义上的紧支撑,

只能利用截断的 Gauss 函数来近似, 而截断的 Gauss 基函数却不能完全保证弹性变换方程的可解性。李静^[10]提出了一种紧支撑的 TPS 变换方法, 但该方法需要较多的附加标志点, 计算量较大。

对于紧支撑基函数实现局部弹性变换, 有一个关键的问题没有解决, 即: 基函数的支撑集大小如何选取? 基函数支撑集的大小直接影响扭曲发生的范围, 支撑集越大, 扭曲范围越大, 扭曲能量越小; 支撑集越小, 扭曲范围越小, 扭曲能量越大。如何根据标志点的分布确定适当的基函数支撑集大小, 即在保证扭曲能量尽可能小的前提下, 减小扭曲发生的范围, 目前这还是一个没有解决的问题。Fornet^[3]指出支撑集的大小与标志点的分布有关, 但他并没有给出这种关系。因此, 本文针对 Wendland 基函数, 从理论上分析了双标志点的分布与支撑集大小的关系, 给出了在标志点集合上选取支撑集大小的原则。

2 基于标志点的局部弹性变换

假设有 n 个标志点对 $\{p_i, q_i\} p_i = (x_{p_i}, y_{p_i}), q_i = (x_{q_i}, y_{q_i}), i = 1, 2, \dots, n\}$, 在 x 方向和 y 方向的插值函数可以统一表示为 $U(\bar{x})$, $\bar{x} = (x_i, y_i)$ 是图像中任意点的坐标。插值函数可以表示为

$$U(\bar{x}) = \sum_i^m \beta_i \phi_i(\bar{x}) + \sum_i^n \alpha_i R(\|\bar{x} - p_i\|) \quad (1)$$

其中 $\sum_i^m \beta_i \phi_i(\bar{x})$ 是整图的仿射变换, $\sum_i^n \alpha_i R(\|\bar{x} - p_i\|)$ 是叠加的弹性变换, $R(\|\bar{x} - p_i\|)$ 是 \bar{x} 距离标志点 p_i 的欧拉距离所对应的径向基函数值。插值函数中系数 α_i, β_i 由下面的方程解出:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中 \mathbf{K} 是 $n \times n$ 矩阵, $K_{ij} = R(\|p_i - p_j\|)$ 。 $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$ 。 \mathbf{P} 是仿射变换需要的系数矩阵, $\mathbf{Q}_k = (x_{q_1}, x_{q_2}, \dots, x_{q_m})^T$ 或 $\mathbf{Q}_k = (y_{q_1}, y_{q_2}, \dots, y_{q_m})^T$, 分别用于求解 x 方向和 y 方向的插值函数系数, 这样可以得到全局弹性变换。对于局部弹性变换, 一般先对图像进行整图仿射变换, 然后再进行局部变换。局部弹性变换的插值函数为 $U(\bar{x}) = \bar{x} + \sum_i^n \alpha_i R(\|\bar{x} - p_i\|)$, 系数 α_i 由下面的方程解出: $\mathbf{K}\mathbf{a} = \Delta\mathbf{Q}_k$ 。其中 \mathbf{K}, \mathbf{a} 与前面相同, $\Delta\mathbf{Q}_k = (x_{q_1} - x_{p_1}, x_{q_2} - x_{p_2}, \dots, x_{q_m} - x_{p_m})^T$ 或 $\Delta\mathbf{Q}_k = (y_{q_1} - y_{p_1}, y_{q_2} - y_{p_2}, \dots, y_{q_m} - y_{p_m})^T$, 分别用于求解 x 方向和 y 方向的局部弹性变换系数。

在图像的局部弹性变换中, 基函数支撑集越大, 扭曲发生的范围越大, 相应的扭曲能量越小。对于紧支撑基函数, 如果扭曲能量要达到最小, 则支撑集的大小要达到最大, 此时插值函数最光滑。这个结论可以解释为什么 Bookstein 选用的基函数 $U(r) = -r^2 \log r$ 不是紧支撑的, 因为如果是紧支撑的, 不可能达到扭曲能量最小。因此, 选择基函数的支撑集需要考虑的因素是: 在扭曲范围尽可能小的前提下, 使扭曲能量达到最小。本文将以 Wendland 基函数为例, 讨论基函数支撑集的选取原则。

3 基函数支撑集大小与扭曲效果的关系

Wendland 基函数 $\psi_{3,1}(r) = (1 - r/a)_+^4 (4r/a + 1)$, 支撑集大小为 a 。Fornefett^[3]指出在单标志点情况下, 为了保持扭曲变换后的拓扑关系, Wendland 径向基函数 $\psi_{3,1}$ 的支撑集应满足 $a > 2.98\Delta$, $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y)$, 即支撑集 a 是有下界的。

假设原图像中两个标志点坐标为 (x_{p_1}, y_{p_1}) 和 (x_{p_2}, y_{p_2}) ,

目标图像中坐标为 (x_{q_1}, y_{q_1}) 和 (x_{q_2}, y_{q_2}) 。为了简化分析, 假设原标志点处于水平线上, 即 $y_{p_1} = y_{p_2}$, 分析两个标志点只有垂直方向的位移, 且位移量相同的情况。即 $y_{q_1} - y_{p_1} = y_{q_2} - y_{p_2} = \Delta y$, $x_{q_1} = x_{p_1}$, $x_{q_2} = x_{p_2}$, $x_{p_2} - x_{p_1} = d$ 。此时垂直方向的插值函数为

$$U(y) = y + \alpha_{y_1} R(r_1) + \alpha_{y_2} R(r_2) \quad (3)$$

其中 $\alpha_{y_1} = \alpha_{y_2} = \Delta y / (1 + R(d))$ 。对于图像中任意一点 (x, y) , r_1 和 r_2 分别是 (x, y) 与 (x_{p_1}, y_{p_1}) 和 (x_{p_2}, y_{p_2}) 的欧氏距离。由于本文假设的标志点是水平分布的, 像素的垂直位移会产生起伏不平的曲面, 如图 1 所示。

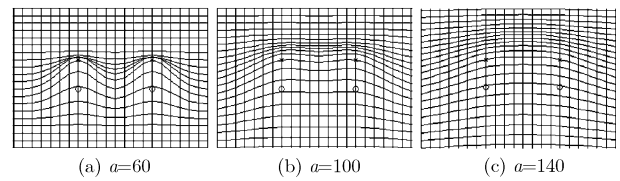


图 1 不同支撑集基函数得到的插值结果 (标志点间距离 $d = 64$)

从图 1 可以看出, 如果支撑集比较小, 可能形成一个马鞍状的曲面(如图 1(a)), 如果支撑集比较大, 就能形成一个平滑的曲面(如图 1(c))。如果支撑集较小, 插值形成的曲面的扭曲能量就较大, 扭曲范围较小; 如果支撑集较大, 扭曲能量就较小, 扭曲范围大。那么, 最优的支撑集大小应该满足什么条件? 本文的思想是: 支撑集应该选择为使扭曲平面中扭曲能量和扭曲范围得到折衷的那个值, 折衷的条件就是当扭曲平面中马鞍点刚好消失。当扭曲后曲面中的马鞍点刚好消失时, 这时的扭曲范围在扭曲能量尽量小的前提下达到最小, 从视觉效果上也符合人对扭曲效果的满意程度, 这一点与 Forenett 在文献中提及的“视觉满意”是一致的。下面分两种情况进行讨论:

(1) 像素点 (x, y) 位于两个标志点连线之间 原标志点之间的直线经过变换后映射为一条曲线。现任取一点 (x, y) 位于两个原标志点之间的连线上, 其变换后对应的点为 (x', y') 。为了简化表达式, 令 $x - x_{p_1} = l$, 则 y' 可以表达为 $y' = y + \alpha_{y_1} (R(l) + R(d-l))$, 即变换后的垂直位移 $dy(l) = \alpha_{y_1} (R(l) + R(d-l))$, 代入基函数表达式, 则有

$$dy(l) = \alpha_{y_1} \left[\left(1 - \frac{l}{a}\right)_+^4 \left(4 \frac{l}{a} + 1\right) + \left(1 - \frac{d-l}{a}\right)_+^4 \left(4 \frac{d-l}{a} + 1\right) \right] \quad (4)$$

取 $\frac{\partial dy(l)}{\partial l} = 0$ 处的点 $l = \frac{d}{2}$, 讨论该点的二阶导 $\frac{\partial^2 dy(l)}{\partial l^2} \Big|_{l=d/2}$, 如果 $\frac{\partial^2 dy(l)}{\partial l^2} \Big|_{l=d/2} > 0$, 则说明该点是一个鞍点, 这意味着在该处会出现一个下凹的曲面, 扭曲能量过大。

因此，我们确定鞍点消失的条件为 $\frac{\partial^2 dy(l)}{\partial l^2} \Big|_{l=d/2} \leq 0$ ，定义该临界状态为扭曲范围与扭曲能量的最佳折衷。可以推出

$$\frac{\partial^2 dy(l)}{\partial l^2} \Big|_{l=d/2} = \alpha_{y1} \left(\frac{40d}{a^3} - \frac{20}{a^2} \right) \left(1 - \frac{d}{2a} \right)^2 \leq 0 \quad (5)$$

即 $\frac{40d}{a^3} - \frac{20}{a^2} \leq 0$ ，推出 $a \geq 2d$ 。

(2) 像素点 (x, y) 位于两个标志点连线上侧 假设像素点 (x, y) 在两标志点连线上侧的距离为 h ，则垂直方向的位移为

$$dy(l) = \frac{\Delta y}{1 + R(d)} \left(R \left(\sqrt{l^2 + h^2} \right) + R \left(\sqrt{(d-l)^2 + h^2} \right) \right) \quad (6)$$

略去常数，代入 Wendland 基函数表达式，考虑 $l = \frac{d}{2}$ 处的

二阶导 $\frac{\partial^2 dy(l)}{\partial l^2} \Big|_{l=d/2}$ ，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 dy(l)}{\partial l^2} \Big|_{l=d/2} = & 24 \left(1 - \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{2a} \right)^2 \left(\frac{d^2 (d^2 + 4h^2)^{-1}}{a^2} \right) \\ & \cdot \left(\frac{2\sqrt{d^2 + 4h^2}}{a} + 1 \right) + 8 \left(1 - \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{2a} \right)^3 \\ & \cdot \left(\frac{2(d^2 + 4h^2)^{-\frac{1}{2}} - 2d^2 (d^2 + 4h^2)^{-\frac{3}{2}}}{a} \right) \\ & \cdot \left(\frac{2\sqrt{l^2 + 4h^2}}{a} + 1 \right) + 16 \left(1 - \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{2a} \right)^3 \\ & \cdot \left(\frac{d(d^2 + 4h^2)^{-\frac{1}{2}}}{a} \right) \left(\frac{4d(d^2 + 4h^2)^{-\frac{1}{2}}}{a} \right) \\ & + 2 \left(1 - \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{2a} \right)^4 \\ & \cdot \left(\frac{8(d^2 + 4h^2)^{-\frac{1}{2}} - 8d^2 (d^2 + 4h^2)^{-\frac{3}{2}}}{a} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

当 $h = 0$ 时， $\frac{\partial^2 dy(l)}{\partial l^2} \Big|_{l=d/2} = \left(\frac{40d}{a^3} - \frac{20}{a^2} \right) \left(1 - \frac{d}{2a} \right)^2$ ，这与式(5)

的结论是一致的。考虑到函数 $\left(1 - \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{2a} \right)^n$ 和

$(d^2 + 4h^2)^{-n}$ 是关于 h 的单调递减函数，可以证明当 $l = \frac{d}{2}$

时， $\frac{\partial^2 dy(l)}{\partial l^2} \Big|_{h \neq 0} \leq \frac{\partial^2 dy(l)}{\partial l^2} \Big|_{h = 0}$ ，即对于 Wendland 基

函数，只要保证两标志点之间的连线不出现鞍点，就可以保证在其它位置不出现鞍点。

综合上面的分析，可以得出结论：当使用 Wendland 基函数 $\psi_{3,1}$ 时，基函数支撑集可以选择 $a \geq 2d$ ， d 是两标志点

之间的距离，以在扭曲范围与扭曲能量之间达到折衷。同时考虑到保持拓扑关系，我们选择 Wendland 基函数的支撑集要满足 $a = \max(2d, 2.98\Delta)$ ， $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y)$ 。

4 标志点集上的基函数支撑集大小选取

将在双标志点的结论上扩展到任意标志点集上基函数支撑集的选择。假设标志点集 $\Omega = \{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ ，

标志点集看成二维平面上的散点集合，利用 Delaunay 三角剖分确定散点集合的凸壳，凸壳内的每一个区域是一个三角形。Delaunay 三角剖分是最近点意义下的三角剖分，其中每个三角形的外接圆不包含点集中的其他任何点。假设 l_i 为 Delaunay 三角的任意边长，则选取基函数支撑集所依据的标志点距离为 $d^* = \max\{l_i \mid i = 1, 2, \dots, 3n - 6\}$ ，由 d^* 可以根据

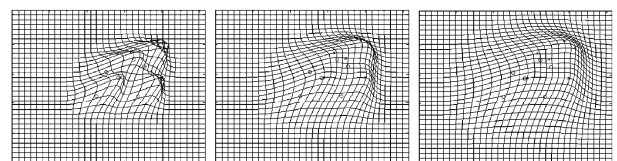
前面的结论选取标志点集上的基函数支撑集大小。需要说明的是，前面的结论是基于标志点的偏移量相同的情况下得出的结论，如果各标志点的偏移量不同，根据大量试验发现，这时需要的支撑集大小要小于前面的结论。实验发现，对于任意标志点的情况，可以取前面理论分析结论的一半作为选取的参数。当基函数为 Wendland $\psi_{3,1}$ 时，取 $a = d^*$ 。

需要说明的是，基函数的支撑集大小首先要满足下界条件：Wendland 径向基函数 $\psi_{3,1}$ 的支撑集下界为 2.98Δ ，其中 $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y)$ 。当满足下界条件后，可以根据前面的结论选取支撑集大小。

5 实验结果

本文分别选取人工网格图和医学图像进行弹性局部扭曲变换，对前面的结论进行验证。首先随机产生 6 个标志点， \circ 为原标志点， \times 为目标标志点。分别使 6 个标志点产生相同大小的位移，以及不同大小的位移，对标志点集合构造 Delaunay 三角剖分，选择该三角剖分的最大边长作为 d^* 。使用不同支撑集大小的 Wendland 基函数 $\psi_{3,1}$ 进行扭曲变换，扭曲效果如图 2，图 3 所示。可以看出在标志点相对位移都相同的情况下，最优的支撑集大小 $a = 2d^*$ (图 2(c))；相对位移不同时 $a = d^*$ 效果比较满意(图 3(c)点间的挤压效果不够明显，扭曲效果过于平滑)。

本文使用不同模态的医学图像利用 Wendland 基函数



(a) $a = d^*$ 扭曲效果 (b) $a = 1.5d^*$ 扭曲效果 (c) $a = 2d^*$ 扭曲效果

图 2 相同位移的标志点集合上的扭曲变换

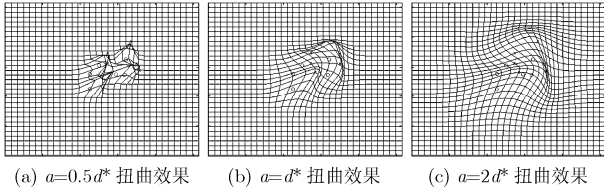


图 3 不同位移的标志点集合上的扭曲变换效果

$\psi_{3,1}$ 进行局部扭曲变换。图 4 中 T1 作为参考图, PD 作为浮动图像, 标志点集合标注在 4(a)和图 4(b)上。选用不同的支撑集对 PD 图像进行局部扭曲变换, 变换结果如图 4(c), 图 4(d)所示。图 5 是 PD 和 T2 图像的变换结果, 可以看出, 最优支撑集大小取 $a = d^*$ 基本可以达到满意的扭曲效果。

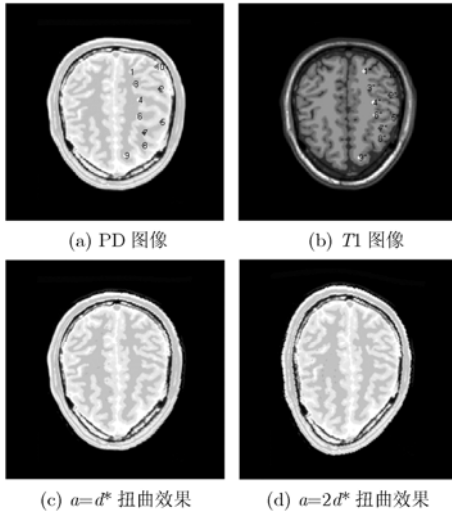


图 4 不同支撑集基函数对医学图像的局部扭曲效果

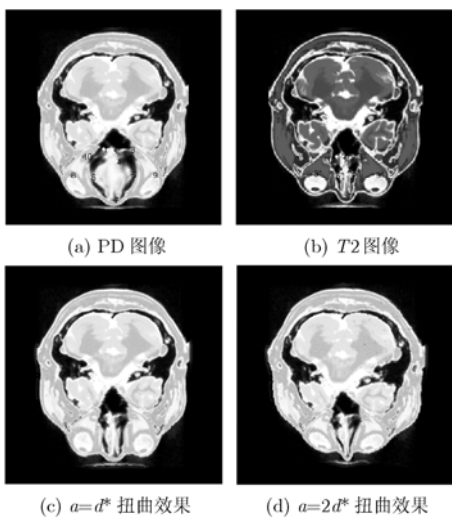


图 5 不同支撑集基函数对医学图像的局部扭曲效果

6 结束语

图像弹性变换中基函数的支撑集大小对扭曲效果具有重要的影响。为了在扭曲范围和扭曲平滑度之间得到折衷。本文对双标志点情况下支撑集的选取进行理论分析。为达到最小范围下的平滑扭曲, Wendland 基函数的支撑集可以选择 $a = \max(2d, 2.98\Delta)$, $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y)$, 其中 d 是两个标志点之间的距离。在任意标志点集的情况下, 构造标志点集上的 Delaunay 三角剖分, 选取最大的三角剖分边长作为 d^* , Wendland 基函数时的支撑集可以选择 $a = \max(d^*, 2.98\Delta)$ 。本文的结论可以有效地控制图像局部弹性变换的扭曲范围, 对于局部弹性图像配准具有理论参考价值。

参考文献

- [1] Bookstein F L. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Trans. on. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, 11(6): 567-585.
- [2] Arad N and Reissfeld D. Image warping using few anchor points and radial functions. *Computer Graphics Forum*, 1995, 14(1): 35-46.
- [3] Fornet M, Rohr K, and Stiehl H S. Radial basis functions with compact support for elastic registration of medical images. *Image Vision Comput*, 2001, 19: 87-96.
- [4] Fornet M, Rohr K, and Stiehl H S. Elastic registration of medical images using radial basis functions with compact support. *CVPR99, Colorado*, 1999: 402-407.
- [5] Lie Wen-Nung and Chuang Cheng-Hung. Contour-based image registration with local deformations. *Optical Engineering*, 2003, 42(5): 1405-1416.
- [6] Donato G and Belongie S. Approximate thin plate spline mappings. *ECCV, Copenhagen*, 2002: 531-542.
- [7] Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Adv. in Comp. Math*, 1995, 4: 389-396.
- [8] Buhmann M D. A new class of radial basis functions with compact support. *Math. Comput*, 2000, 70: 307-318.
- [9] Rohr K, Stiehl H S, and Sprengel R, et al. Landmark-based elastic registration using approximating thin-plate splines. *IEEE Trans. on Med. Imaging*, 2001, 20(6): 526-534.
- [10] Li J, Yang X, and Yu J P. Local warp algorithm in image elastic registration. *FLCI2005, Shenzhen*, 2005: 693-698.

杨 焜: 女, 1969 年生, 博士, 教授, 研究领域为图像处理、图像融合、模式识别等。
 裴继红: 男, 1966 年生, 博士, 教授, 主要研究领域为智能信息处理、模式识别、视频图像分析、矢量图像的分析与处理。
 张智雄: 男, 1982 年生, 硕士生, 研究领域为医学图像配准。