

二维小波收缩与各向异性扩散等价性框架及在图像去噪中的应用

朱景福^{①②} 黄凤岗^①

^①(哈尔滨工程大学计算机科学与技术学院 哈尔滨 150001)

^②(黑龙江八一农垦大学信息技术学院 大庆 163319)

摘要: 图像去噪是图像处理中的一种重要技术。小波收缩根据噪声的小波系数幅值较小的特征通过收缩达到去噪目的。各向异性扩散在尽可能保持图像特征的同时,根据梯度方向及幅值去噪。该文首先证明二维小波收缩与各向异性扩散的等价性框架,对等价性给予验证,进而根据等价性提出综合利用两种方法优势的各向异性小波收缩去噪算法。对比实验结果表明,此算法综合利用了小波收缩与各向异性扩散的优势,去噪效果更加理想。

关键词: 图像去噪; 小波收缩; 各向异性扩散; 各向异性小波收缩

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)03-0524-05

The Equivalence Framework and the Application to Image Denoising of Two Dimensional Wavelet Shrinkage and Anisotropic Diffusivity

Zhu Jing-fu^{①②} Huang Feng-gang^①

^①(College of Computer Science and Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

^②(College of Information Technology, Heilongjiang August First Land Reclamation University, Daqing 163319, China)

Abstract: Image denoising is one of important technology in image processing. The denoising image can be gotten by shrink the amplitude of wavelet coefficient of noise according to the fact that it is smaller than others in Wavelet Shrinkage (WS). The Anisotropic Diffusivity (AD) completes denoising according to the direction and amplitude of gradient while as far as possible to keep the characteristic of image. In this paper, the equivalence framework of two dimensional wavelet shrinkage and anisotropic diffusivity is proved with experiment. After that, the Anisotropic Wavelet Shrinkage (AWS) is proposed that synthesizes the merits of the wavelet shrinkage and anisotropic diffusivity according to the equivalence. The contrastive experiments show that the AWS is better for image denoising.

Key words: Image denoising; Wavelet Shrinkage(WS); Anisotropic Diffusivity(AD); Anisotropic Wavelet Shrinkage(AWS)

1 引言

图像去噪是图像处理领域的基本问题,在去除噪声的同时并尽可能保持图像的特征是我们的目标。图像去噪方法很多,小波收缩是其中一种非常重要的方法。Mallat 等利用 Lipschitz 指数在多尺度上对信号和噪声的奇异性进行描述,提出基于小波变换模极大值原理的信号和图像滤波方法^[1]。Rosenfield 直接将相邻频带上的数据相乘,可以准确定位信号边缘,基于此思想, Xu 提出基于信号尺度间相关性的空域相关滤波算法^[2]。在图像去噪方面,基于小波变换的算法能达到最大均方误差最小意义上的最优效果,获得光滑的图像^[3,4]。潘泉等提出了理论完整的自适应空域相关滤波算法,并在小波阈值滤波算法上取得了重大突破^[5]。小波变换以小波系数的形式表示信号,描述在不同尺度信号的变化情况。如果小波基选择适当,信号能够仅由几个重要小波系数表示,而高斯白噪声使所有小波系数有较小的变化量,小波

收缩去噪方法就是基于这种假设,通过分析、收缩、综合 3 个步骤来得到滤波后的信号。

各向异性扩散也是一种重要的去噪手段。非线性扩散从含噪信号出发,根据一个非线性偏微分方程描述的过程,多次迭代进化产生去噪后的信号。一般来说,这个过程由扩散函数 g 来控制,典型地, g 是非负递减函数,这使得信号在平坦区域比其他区域更快地平滑,因此,不连续性得以保持。不同的扩散函数会呈现不同的特性,如最初由 Peronati 和 Malik 提出的非线性扩散—PM 扩散^[6],它的变形有 Charbonnier 扩散^[7], TV(Total Variation)扩散^[8]等。

近几年,在小波收缩与扩散的关系方面也有了一定的成果。Shen^[9]研究了在一维信号中,小波的平移和尺度不变性,消失矩条件,原子分解等性质,并研究了在扩散过程中它们的表现。Steidl 等^[10]研究了在一维情况下小波软阈值收缩, TV 扩散, TV 正规化和 SIDE(一种动态系统)之间的等价性。也有一些学者研究将小波收缩与各向异性扩散结合形成更好的去噪方法,吴亚东等^[11]指出非线性扩散方法优于 Haar

小波收缩去噪方法, 并给出了一种基于 TV 模型的非线性扩散与二维 Haar 小波收缩相结合的混合图像去噪算法。李一亮等^[12]利用小波域阈值维纳滤波方法先对图像进行初步去噪, 以此引导非线性扩散中的边缘检测函数, 再用非线性扩散进行去噪, 得到一种基于小波和各向异性非线性扩散的混合去噪算法。姜东焕等^[13]给出了林石算子定义的扩散方程和小波阈值等价形式, 并在此基础上对林石算子定义的扩散系数计算公式进行了修改, 将其中估计各阶导数时所用的高斯线性滤波图像改成平移不变小波非线性阈值图像。Liu Feng^[14]提出了一种新的对扩散的多尺度计算方法, 并且给出了一种非线性小波扩散(NWD)模型用于重建图像, 这种 NWD 能够很好地控制噪声, 文中通过对 NWD 的简化, 得到了一种线性小波扩散方法(LWD), 能够很好地保持图像的边缘。这些研究表明, 在一定条件下, 小波收缩是可以和非线性扩散等价的, 如果将两者进行结合, 会得到更好的去噪算法。

本文主要研究二维情况下, Haar 小波收缩与非线性扩散等价性的框架, 并将之用于图像去噪中, 得到了更好地去噪算法。文中第 2 节证明 $N \times N$ 信号 ($N = 2^k$) 情况下, Haar 小波收缩和非线性扩散等价性, 第 3 节进行实验验证此等价性框架, 第 4 节通过实验提出利用此等价性的新的各向异性小波收缩去噪算法, 并给出对比实验结果, 第 5 节为结束语。

2 小波收缩与各向异性扩散等价框架

2.1 二维小波分解与收缩重构

对于二维正交小波变换, 其尺度函数和小波函数可以表示为 $\varphi(x, y)$, $\psi^1(x, y)$, $\psi^2(x, y)$, $\psi^3(x, y)$, 分别表示 1 个低频分量和 3 个高频分量。对四像素结构 $\begin{pmatrix} I_{ij} & I_{i,j+1} \\ I_{i+1,j} & I_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$, 二维离散小波分解得几个子频带为 $\begin{pmatrix} A & V \\ H & D \end{pmatrix}$ 。应用小波收缩

算法时, 设对 H, V, D 相应的收缩函数值分别为 SH, SV, SD, 则可根据重构公式重构原信号。例如用二维 Haar 小波, 则相应的分解和重构结果为

$$\begin{pmatrix} A \\ H \\ V \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{ij} \\ I_{i,j+1} \\ I_{i+1,j} \\ I_{i+1,j+1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} I'_{ij} \\ I'_{i,j+1} \\ I'_{i+1,j} \\ I'_{i+1,j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ SH \\ SV \\ SD \end{pmatrix}$$

2.2 非线性各向异性扩散

二阶各向异性扩散是根据梯度和梯度垂直方向来进行不同程度的扩散, 方程如下

$$\begin{cases} I_t(t, x) = \text{div}(g(|\nabla I|)|\nabla I|) \\ I(0, x) = I_0 \end{cases} \quad (2)$$

根据所取函数的不同会有不同特性的扩散。常用扩散函数有: Charbonnier 扩散 $\left\{ g(|\nabla I|) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla I|^2 / \lambda^2}} \right\}$,

Perona-Malik 扩散 $\left\{ g(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + |\nabla I|^2 / \lambda^2} \right\}$, TV 扩散 $\left\{ g(|\nabla I|) = \frac{1}{|\nabla I|} \right\}$ 。

对于图像中任一点的灰度值, 经过下式的扩散可以得到扩散后的结果, 其中 Δt 为时间增量。

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= I_{ij} + \Delta t \text{div}(g(|\nabla I|)|\nabla I|) \\ &= I_{ij} + \Delta t [g(|\nabla I|)I_{xx}]_x + [g(|\nabla I|)I_{yy}]_y \end{aligned} \quad (3)$$

2.3 非线性各向异性扩散与小波收缩等价性框架

设输入信号为 $N \times N$ 时, 其中 $N = 2^k$, 将式(2)展开成

$$\begin{aligned} I_t(t, x) &= \text{div}(g(|\nabla I|)|\nabla I|) = [g(|\nabla I|)I_{xx}]_x + [g(|\nabla I|)I_{yy}]_y \\ &= g(|\nabla I|)_{|\nabla I|} (|\nabla I|)_{xx} + g(|\nabla I|)I_{xx} + g(|\nabla I|)_{|\nabla I|} \cdot (|\nabla I|)_{yy} + g(|\nabla I|)I_{yy} = g(|\nabla I|)(I_{xx} + I_{yy}) \\ &\quad + g(|\nabla I|)_{|\nabla I|} \left[\left(\sqrt{I_x^2 + I_y^2} \right)_x I_x + \left(\sqrt{I_x^2 + I_y^2} \right)_y I_y \right] \\ &= g(|\nabla I|)(I_{xx} + I_{yy}) + \frac{g(|\nabla I|)_{|\nabla I|}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \\ &\quad \cdot [I_x^2 I_{xx} + I_y^2 I_{yy} + 2I_x I_y I_{xy}] \end{aligned} \quad (4)$$

对于 N 像素中的四像素 $\begin{pmatrix} I_{ij} & I_{i,j+1} \\ I_{i+1,j} & I_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$ 结构, 用式(4)对

其进行扩散, 会得到 $\begin{pmatrix} I'_{ij} & I'_{i,j+1} \\ I'_{i+1,j} & I'_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$, 其中 $I'_{ij} = I_{ij} + \Delta t \text{div}(g(|\nabla I|)|\nabla I|)$, 将 $\begin{pmatrix} I'_{ij} & I'_{i,j+1} \\ I'_{i+1,j} & I'_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$ 同时看作是

小波收缩重构所得的结果, 为方便表示, 令 $f = \text{div}(g(|\nabla I|)|\nabla I|)$, 以二维 Haar 小波为例, 则有

$$\begin{pmatrix} I'_{ij} \\ I'_{i,j+1} \\ I'_{i+1,j} \\ I'_{i+1,j+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ SH \\ SV \\ SD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{ij} + \Delta t f_{ij} \\ I_{i,j+1} + \Delta t f_{i,j+1} \\ I_{i+1,j} + \Delta t f_{i+1,j} \\ I_{i+1,j+1} + \Delta t f_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

解得

$$\begin{pmatrix} A \\ SH \\ SV \\ SD \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{ij} + \Delta t f_{ij} \\ I_{i,j+1} + \Delta t f_{i,j+1} \\ I_{i+1,j} + \Delta t f_{i+1,j} \\ I_{i+1,j+1} + \Delta t f_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

其中 $f_{i,j} = \{g(|\nabla I|)(I_{xx} + I_{yy}) + \frac{g(|\nabla I|)_{|\nabla I|}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} [I_x^2 I_{xx} + I_y^2 I_{yy} + 2I_x I_y I_{xy}]\}_{i,j}$ 。

从中可知,当式(6)取收缩函数值时,小波收缩的结果与各向异性扩散所得的结果是相同的,即在此意义下小波收缩与各向异性扩散是等价的,可以利用小波收缩方法来实现各向异性扩散。从式(6)中可见,此时小波收缩函数的值不再取

决于四像素 $\begin{pmatrix} I_{ij} & I_{i,j+1} \\ I_{i+1,j} & I_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$ 邻域,这有助于更充分地利用像

素点周围更广泛范围的信息,从而有效地实现各向异性。同时,我们也注意到,小波的低频分量也不再是完整的四像素

$\begin{pmatrix} I_{ij} & I_{i,j+1} \\ I_{i+1,j} & I_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$ 的平均值,而是一个加权均值,这进一步说

明各向异性的意义,因为各向异性扩散不会保证在点 (i, j) 处的扩散结果为四像素均值。式(6)进一步说明其收缩函数值可以看作是原像素的小波收缩值与扩散增量小波收缩值的加权和。

3 验证等价性实验

设输入信号为 $N \times N$ ($N = 2^k$) 的二维信号,时间步长取 $t=0.025$,迭代 100 次,验证几种扩散及与其等价小波收缩。本文用一幅 128×128 的 bird 灰度图像作为输入信号,对其进行扩散和收缩,结果如图 1 所示。

图 1 中图 1(a) 是原始图像,图 1(b)~1(d) 分别是用 PM, TV 和 Charbonnier 方法扩散的结果,图 1(e)~1(g) 是与其对应的等价的小波收缩结果。从图中可见扩散结果与收缩结果从视觉上看不出区别。但有个别像素会由于计算过程中由于误差的累积和放大作用会有所不同,详细结果见表 1。

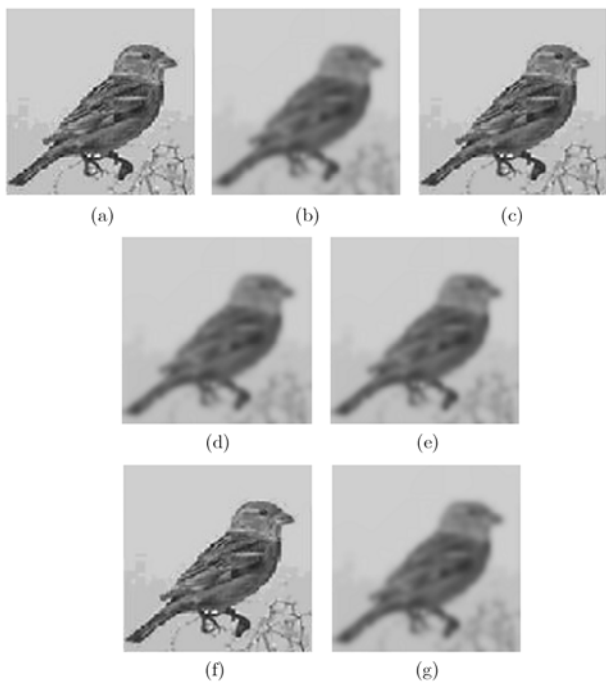


图 1 N 像素情况各向异性扩散与小波收缩等价性

表 1 N 像素情况下各向异性扩散与各向异性小波收缩对比

统计项	PM 与收缩	TV 与收缩	Charbonnier 与收缩
灰度值不相同点数	107	18	105
灰度值最大差	1	2	1

4 各向异性小波收缩去噪算法

各向异性扩散可以根据像素点附近灰度值分布情况对该点按梯度和梯度垂直方向进行不等量扩散,从而在尽可能保持边缘特征的同时降低噪声。小波收缩则根据噪声点的小波系数幅值较小的特性,通过线性收缩或者阈值收缩达到降低噪声的目的。

4.1 各向异性小波收缩去噪算法

前面我们证明了非线性各向异性扩散与小波收缩在一定条件下是等价的。而这两种方法各有各的优点,为此,结合两种算法的优势,本文提出各向异性小波收缩去噪算法(AWS)如下:

(1)初始化原始含噪图像;

(2)各向异性小波收缩

分析步:对图像进行小波分解,得到相应的低频与高频分量;

收缩步:选取阈值 th ,并根据式(6)得到的收缩函数值,选取函数

$$S(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{abs}(\theta) < th \\ \theta - th \cdot \text{sgn}(\theta), & \text{abs}(\theta) \geq th \end{cases} \text{ 进行阈值收缩, 其}$$

中 th 为阈值, abs 表示绝对值,对于阈值 th 的选取,也有许多方法,本文采用 Dohono 于 1994 年提出的方法^[15]。

综合步:对收缩步中结果进行小波回复,得到一次去噪图像;

(3)重复(2),迭代一定次数后,得到去噪图像;

当式(6)中 f 的扩散函数 g 采用不同函数时,就得到对应的各向异性小波收缩去噪算法,如其中函数 g 取为 PM, TV 和 Charbonnier 收缩算法中的收缩函数时,算法分别称为 PM 小波收缩, TV 小波收缩和 Charbonnier 小波收缩。

4.2 实验

用一幅 128×128 的 bird 灰度图像作为输入,其中加入均值为 0 的高斯白噪声,用峰值信噪比来对噪声水平进行评估,按 Dohono 方法取的阈值作为各向异性小波收缩的阈值。

所得数据结果如表 2 所示。从表中所见,对应于不同扩散的各向异性小波收缩算法,从去噪能力上优于各向异性扩散和小波软阈值收缩,尤其对于噪声方差比较大时的效果更加明显。

图 2 为一幅 128×128 的 bird 灰度图像作为输入,噪声方差为 0.005,迭代次数为 500 时,各算法所得去噪图像对

表2 各向异性扩散小波收缩峰值信噪比比较

噪声方差	PSNR	迭代次数	软阈值收缩	PM扩散	PM小波收缩	TV扩散	TV小波收缩	Charbonnier扩散	Charbonnier小波收缩
0.005	19.1	50	21.92	22.62	22.22	19.46	22.16	22.53	22.17
		500	21.92	19.73	19.61	21.79	22.56	19.72	19.60
		1000	21.92	19.01	18.91	22.92	22.01	19.01	18.91
0.05	13.8	50	18.99	22.11	23.10	14.04	19.32	22.85	23.10
		500	18.99	20.60	20.42	15.98	20.93	20.64	20.42
		1000	18.99	19.75	19.60	17.91	21.78	19.79	19.61
0.5	7.85	50	12.92	10.30	16.82	7.98	13.09	11.79	16.97
		500	12.92	16.76	17.00	8.91	13.99	11.64	17.04
		1000	12.92	15.79	16.71	9.89	14.79	13.62	16.75
5	6	50	10.55	7.32	13.64	6.10	10.68	7.83	13.81
		500	10.55	12.25	14.36	6.77	11.34	4.43	14.40
		1000	10.55	12.29	14.30	7.48	11.94	-4.78	14.34

比。图 2(a)为含噪图像,图 2(b)~2(d)分别为 PM, TV 和 Charbonnier 扩散图像,图 2(e)为小波软阈值收缩图像,图 2(f)~2(h)分别为 PM 小波收缩,TV 小波收缩和 Charbonnier 小波收缩的图像,即为本文方法的结果。从中可见,在视觉效果上,各向异性小波收缩的效果与对应的扩散方法也相差无几,而达到了更高的峰值信噪比。

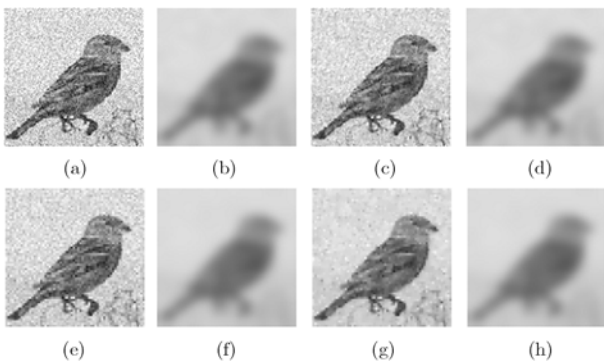


图2 各向异性扩散、小波软阈值收缩与各向异性小波收缩去噪结果

5 结束语

小波收缩根据噪声的小波系数幅值较小的特征通过阈值收缩,去除幅值较小的系数达到去噪目的。各向异性扩散充分利用像素点附近的变化情况,根据在梯度方向及与之垂直方向上采用不同幅值的扩散,在尽可能保持图像特征的同时去噪。文中通过对 $N \times N$ 像素情况下,采用中心差分格式,建立了二维小波收缩与各向异性扩散的等价性框架,实验验证其等价性框架是成立的,从而给出了二维小波收缩与各向异性扩散的等价性的分析形式。根据此等价性框架,综合利用两种方法优势,提出各向异性小波收缩去噪算法,使小波

收缩方法能够实现各向异性扩散,并且在扩散的同时可以进行收缩。对比实验结果表明,此算法综合利用了小波收缩与各向异性扩散的优势,去噪效果更加理想。

参考文献

- [1] Mallat S and Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1992, 38(2): 617-643.
- [2] Xu Y S, Weaver J B, and Healy D M, et al. Wavelet transform domain filters: A spatially selective noise filtration technique[J]. *IEEE Trans. on Image Proc.*, 1994, 3(6): 747-758.
- [3] Donoho D L. Denoising by soft-thresholding[J]. *IEEE Trans. on Inf Theory*, 1995, 41(3): 613-627.
- [4] Coifman R R and Donoho D L. Translation invariant denoising[C]. In: *Wavelets and Statistics: A* Antoniadis, G Oppenheim, Lecture Notes in Statistics 103. New York: Springer-Verlag, 1995: 125-150.
- [5] 潘泉, 孟晋丽, 张磊等. 小波滤波方法及应用[J]. *电子与信息学报*, 2007, 29(1): 236-242.
- [6] Pan Quan, Meng Jin-li, and Zhang Lei, et al. Wavelet filtering method and its application[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(1): 236-242.
- [7] Perona P and Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(7): 629-639.
- [8] Charbonnier P, Blanc-Feraud L, and Aubert G, et al. Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging[C]. *Proceedings of the IEEE ICIP*, Austin, TX, November 1994, Vol. 2: 168-172.

- [8] Andreu F, Ballester C, and Caselles V, *et al.*. Minimizing total variation flow[J]. *Differential and Integral Equations*, 2001, 14(3): 321–360.
- [9] Shen J. A note on wavelets and diffusions[J]. *Journal of Computational Analysis and Application*, 2003, 5(1): 147–158.
- [10] Steidl Gabriele, Weickert Joachim, and Brox Thomas, *et al.*. On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total variation regularization, and SIDs[J]. *SIAM J. Numerical Analysis*, 2004, 42(2): 686–713.
- [11] 吴亚东, 孙世新. 基于二维小波收缩与非线性扩散的混合图像去噪算法[J]. 电子学报, 2006, 34(1): 163–166.
Wu Ya-dong and Sun Shi-xin. A new hybrid image de-noising algorithm based on 2D wavelet shrinkage and nonlinear diffusion[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(1): 163–166.
- [12] 李一亮, 王卫卫. 基于小波维纳滤波和各向异性扩散的图像去噪[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(29): 52–54.
Li Yi-liang and Wang Wei-wei. Image denoising based on wiener filtering in wavelet domain and anisotropic diffusion[J]. *Computer Engineering and Application*, 2006, 42(29): 52–54.
- [13] 姜东焕, 冯象初, 宋国乡. 基于非线性小波阈值的各向异性扩散方程[J]. 电子学报, 2006, 34(1): 170–172.
Jiang Dong-huan, Feng Xiang-chu, and Song Guo-xiang. An anisotropic diffusion equation based on nonlinear wavelet shrinkage. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(1): 170–172.
- [14] Liu Feng. Diffusion filtering in image processing based on wavelet transform[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2006, 49(4): 494–503.
- [15] Dohono D L and Johnstone I M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425–455.
- 朱景福: 男, 1970年生, 副教授, 博士生, 研究方向为模式识别、数字图像处理。
- 黄凤岗: 男, 1945年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为图像处理、计算机视觉、模式识别等。