

基于熵的 Gabor 变换窗函数宽度自适应选择算法

杜秀丽^{①②} 沈毅^② 王艳^②

^①(大连大学信息工程学院 大连 116622)

^②(哈尔滨工业大学航天学院 哈尔滨 150001)

摘要: 该文针对 Gabor 变换中窗函数宽度选择的问题, 提出了以提高 Gabor 表示的聚集性和时频分辨率为目的的窗函数宽度自适应选择算法。提出对香农熵的取值范围进行改进, 使其更合适度量时频分布的聚集性, 进而根据熵度量实现了与信号非平稳性相适应的最优窗函数宽度选择。仿真结果表明该算法对单分量及多分量信号都能有效地选择最优窗函数宽度, 能够获得聚集性好、时频分辨率高的 Gabor 表示, 并具有很好的抗噪性能。

关键词: 信号处理; Gabor 变换; 聚集性; 熵; 窗函数宽度

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)10-2291-04

Adaptive Window Width Selection Algorithm for Gabor Transform Based on Entropy

Du Xiu-li^{①②} Shen Yi^② Wang Yan^②

^①(School of Information Engineering, Dalian University, Dalian 116622, China)

^②(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: To resolve the issue of window width selection, an adaptive algorithm for Gabor transform is proposed, which improves the concentration and time-frequency resolution of Gabor representation. The value range of Shannon entropy is mended to make it more adequate for measuring concentration of time-frequency distribution. Moreover, basing on entropy, an optimal window width can be searched adaptively. Simulation results show that the proposed algorithm chooses the optimal window width for mono-component signal or multi-component signal, giving the best Gabor representation with high concentration and time-frequency resolution. Additionally, the algorithm behaves well under low signal noise ratio.

Key words: Signal processing; Gabor transform; Concentration; Entropy; Window width

1 引言

时-频分析是一种处理非平稳信号的有效手段, 它在时频联合域内对信号进行分析和处理, 能够反映信号频率成分随时间的变化特性。作为一种线性时频分析方法, Gabor变换具有概念直接、容易计算等优点, 一直以来都是研究非平稳信号时广泛采用的方法。Gabor变换通过窗函数的时移和频率调制来揭示信号的时频特性, 为了使时频分布获得良好的时频分辨率和聚集性, 窗函数类型以及窗函数宽度的选择至关重要。不同类型的窗函数产生的时频表示的性能不同, 即使是同一类型的窗函数, 如果窗函数宽度不同, 时频表示的聚集性、分辨率也不一样^[1]。

众多学者对窗函数类型及窗函数宽度的选择问题进行了大量的研究, 并指出对于时变信号, 选择合适的窗函数宽度比选择窗函数类型更重要^[2]。目前的窗函数宽度选择算法侧重于研究时变窗的获得, 主要利用窗宽与聚集性或窗宽与瞬时频率之间的关系来实现^[3, 4], 其中利用瞬时频率信息的算法通常要求瞬时频率满足一定条件或需要知道信号瞬时

频率的先验知识, 但往往这些条件较难满足。文献[2]提出局部聚集性度量, 用以选择高斯基函数的时宽和频率调制参数, 实现窗函数的自适应选择, 但对多分量信号, 选择的窗宽有利于尖峰成分, 而不利于聚集性差的成分, 且计算量较大。

针对上述问题, 本文提出了基于熵度量的窗函数宽度自适应选择算法。先对度量时频分布聚集性的香农熵的取值范围进行改进, 将其映射到一个确定的区间内, 使度量结果更加直观; 然后, 用熵度量实现窗函数宽度选择。该算法可在不知道信号先验信息的情况下选择适合信号自身特征的最优的窗函数宽度。仿真结果表明该算法不仅能获得聚集性好、时频分辨率高的Gabor时频表示, 还具有很好抗噪性能。

2 Gabor 变换

信号 $s(t) \in L^2(R)$ 的Gabor展开就是将信号表示成窗函数的时-频移位形式的线性展开^[5], 即

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} g_{m,n}(t) \quad (1)$$

式中 g 为综合窗函数, 也称基函数, $g_{m,n}(t) = g(t - m\Delta_m) \cdot \exp(j2\pi n\Delta_n)$, Δ_m 、 Δ_n 分别为时间和频率采样间隔, $c_{m,n}$

称为Gabor展开系数,反映了信号的时频局部特性。

求Gabor展开系数的公式称为Gabor变换,连续Gabor变换定义为

$$c_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\gamma_{m,n}^*(t)dt \quad (2)$$

式中 $\gamma_{m,n}(t) = \gamma(t - m\Delta_m)\exp(j2\pi n\Delta_n)$, γ 为分析窗函数,与 g 是双正交对偶函数, * 表示共轭。

对长度为 L 的离散信号 $s(k)$, 其离散Gabor变换定义为

$$c_{m,n} = \sum_{k=0}^{L-1} s(k)\gamma_{m,n}^*(k) \quad (3)$$

其中 $\gamma_{m,n}(k) = \gamma(k - m\Delta_m)\exp(j2\pi nk/N)$, $m = 1, 2, \dots, M$, $n = 1, 2, \dots, N$, N, M 分别为时间和频率采样点数。

信号的Gabor表示定义为

$$P_s(m, n) = |c_{m,n}|^2 \quad (4)$$

只有窗函数具有好的时频支撑,展开系数才有好的时频定位属性。也就是说, Gabor 变换的窗函数类型及窗函数宽度的选择对时频表示的性能有很大影响。对于特定的信号,选择特定的窗函数及其宽度可能会得到更好的效果。由不确定原理,时频带宽积不能无限制的小,短的时间窗具有好的时间分辨率,但频率分辨率差;宽窗频率分辨率变好,但时间分辨率会变差。因此,选择合适的窗函数宽度,对 Gabor 变换的性能非常重要。

3 Gabor 变换窗函数宽度选择算法

3.1 聚集性度量

聚集性是一个反映时频分布性能的时频局域化特征,即时频分布在时频平面上是否是高度聚集的。有效的聚集性度量可以用于评估不同分布的性能,也可用于参数的自适应选择。

文献[6]总结了Renyi熵、基于范数的度量等聚集性度量的优缺点,并提出了一种新的聚集性度量:

$$M_p = \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |P(m, n)|^{1/p} \right)^p \quad (5)$$

式中 $\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N P(m, n) = 1$, 并且 $p > 1$, 当 $p = 2$ 或 $p = 4$ 时,

该度量比较稳定。时频表示的聚集性越好, M_p 越小。该度量的优点是适用于正、负值时频分布,度量结果不受交叉项影响;对多分量信号,能够度量聚集性差的成分。用该度量选择窗函数宽度时,如果信号中存在两个不同时频特性的分量,该度量会选择使各个分量的聚集性都比较好的窗宽。

由于时频分布与概率的相似性,使得香农熵适合用来评价时频分布的聚集性和信号复杂度[7]。用于时频分布聚集性度量的香农熵可表示为

$$H = -\sum_m \sum_n P_s(m, n) \log_2(P_s(m, n)) \quad (6)$$

其中 P_s 为归一化的时频分布,熵的取值范围 $H \geq 0$ [7]。

香农熵只适合正的时频分布。对于同一信号的不同分布,聚集性好的时频分布得到的熵值较小,聚集性差的时频

分布得到的熵值较大;当时频分布的能量集中到时频平面上一点时, H 取得最小值0。

3.2 香农熵取值范围的改进

由式(6)可知,香农熵的取值范围不在一个确定的闭区间内,由一个时频分布的熵值很难直接判断时频分布的聚集性强弱。如果能使熵的取值位于闭区间[0, 1],那么就可以通过数值直观地表示出时频分布聚集性的优劣。由文献[8]中的相关性度量归一化的思想,可通过下式将香农熵的取值范围变换到区间[0, 1]:

$$H_1 = 1 + \sum_m \sum_n P_s(m, n) \log_{MN}(P_s(m, n)) \quad (7)$$

式中 N, M 分别为时频分布的时间和频率点数。当信号时频分布的能量在时频平面内均匀分布时,即 $P_s(m, n) = 1/MN$, H_1 取得最小值0;当时频分布的能量集中到一点时,即 $P_s(m, n) = \delta(m - m_0, n - n_0)$, H_1 取得最大值1。改进后,熵的取值区间为[0, 1],最小值0代表时频分布的聚集性最差,最大值1代表聚集性最好。时频分布的聚集性越差,其熵的值就越接近于最小值0;时频分布的聚集性越好,其熵的值就越接近于最大值1。取值范围改进后,香农熵不仅能够度量不同时频分布的聚集性,而且也可以通过与1的差距来判断一个时频分布的聚集性。当信号中含有噪声时,信噪比越低,时频分布的熵值越小,聚集性也会越差。

3.3 基于熵的自适应窗宽选择算法

Gabor变换中,如果窗函数的宽度与信号本身的非平稳程度相当,得到的时频表示的聚集性较好,因此可利用熵度量,选择能使Gabor时频表示聚集性最好的窗宽。

本文主要讨论窗函数宽度选择问题,因此窗函数类型采用了时频分析中广泛应用的高斯函数(时频带宽积能够达到不确定原理的下界),当然本文的结论对于其它类型的窗函数,依然适用。离散高斯函数可定义为

$$g(k) = \exp\left(-\pi(k/K_0)^2\right) \quad (8)$$

其中 K_0 为半窗宽, $k = -K_0, \dots, -1, 0, 1, \dots, K_0$ 。应用中可通过对称补零,使其与信号长度相等。

基于熵的窗函数宽度选择算法如下:

- (1)选择半窗宽初值 K_0 , 计算信号的Gabor变换, $n = 0$;
- (2)计算熵 H_1^0 , 如果 $H_1^0 = 1$, 转(5), 否则转(3);
- (3)令 $n = n + 1$, $K_n = K_{n-1} + \Delta K$, ΔK 为步长;
- (4)如果 $K_n \leq K_{\max}$, 转(3), 否则计算Gabor表示的熵 H_1^n ;
- (5)求出 H_1^n 的最大值对应的半窗宽 K_{opt} , 则窗函数最优宽度为 $2K_{\text{opt}} + 1$ 。

当可选择的窗宽范围较大时,上述算法的计算量也较大,但可以采用优化算法搜索出使熵值最大的窗函数宽度。

4 仿真结果及分析

为了验证基于熵度量的窗函数宽度选择算法的有效性,

本文对几组常见的信号和超声检测的回波信号进行了分析，并比较了基于熵度量选择的窗宽与采用式(5)表示的聚集性度量选择的窗宽结果。计算时，式(5)表示的聚集性度量公式中的 $p = 2$ ，并用 M_2 表示该度量。

4.1 余弦信号

理论上，余弦信号的频率成分不随时间变化，是平稳信号。因此，分析时只需要高的频率分辨率，而对时间分辨率没有要求，所以 Gabor 变换的窗函数应尽可能地宽。图 1 给出了余弦函数 Gabor 表示的聚集性与窗函数宽度之间的关系，图 1(a)为熵度量与窗函数宽度之间的关系，图 1(b)为 M_2 度量与窗函数宽度之间的关系。计算时，余弦信号的表达式为： $s(k) = \cos(0.1\pi k)$, $k = 1, \dots, 256$ ；窗宽初值设为 1，步长为 2。由图中可以看出，两种度量得到的结果一致，分析窗越宽，得到的 Gabor 表示的聚集性越好，与理论分析相符。

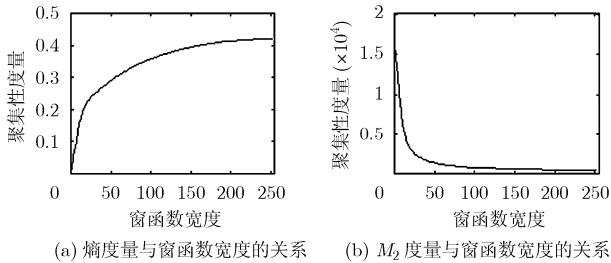


图 1 余弦函数 Gabor 表示的聚集性与窗函数宽度的关系

4.2 高斯包络函数

高斯包络函数可表示为

$$s(t) = e^{-[(t-T)/\sigma]^2} \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \tag{9}$$

式中 ϕ_k 为相位， T 为信号到达时间， σ 反映了信号时宽， f_0 为载频。

图2(a)所示为仿真的高斯包络信号，信号长度为256点，采样频率为10MHz， $T = 10\mu s$ ， $f_0 = 2.5\text{MHz}$ 。图2(b)为高斯包络信号Gabor表示的熵与分析窗函数宽度之间的关系，其中实线对应图2(a)中的信号；虚线对应的是宽度为图2(a)中信号一半的高斯包络信号。由熵的最大值可确定图2(a)中信号Gabor变换窗函数的最优宽度是37，另一个信号的最优窗函数宽度为19，两个信号Gabor变换的最优窗宽值刚好也是2倍的关系，这表明基于熵度量的窗宽选择算法是有效的。如果采用 M_2 度量可以得到相同的结论。

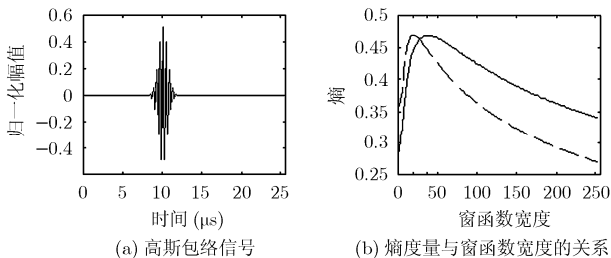


图2 高斯包络信号及其Gabor时频表示的熵与窗函数宽度的关系

4.3 频率调制信号

调频信号(Frequency Modulation, FM)是非平稳信号分析时常见的信号，对于信号：

$$s(t) = \cos(50 \cos(\pi t) + 10\pi t^2 + 70\pi t) + \cos(25\pi t^2 + 130\pi t) \tag{10}$$

图3给出了该信号Gabor表示的两种聚集性度量与分析窗函数宽度之间的关系。信号的采样频率为1/256，长度为512点。图3(a)为香农熵度量与窗函数宽度之间的关系，图3(b)为 M_2 度量与窗函数宽度之间的关系。两条曲线都表明，以最优窗宽为参考，当窗太宽或太窄时，时频表示的聚集性都不好，只有选择了合适的值才会得到最好的聚集性。由图3(a)可得窗函数最优宽度为117，此时Gabor表示如图4(a)所示。由图3(b)中的 M_2 度量可以得出最优窗函数宽度应为109，此时的Gabor表示如图4(b)所示。两种度量得到的最优窗函数宽度结果相近，最优窗宽的Gabor表示的聚集性都很好，不过由灰度指示条可知用香农熵度量得到的时频表示具有更好的对比度。

图4(c)和图4(d)分别为任意选择窗函数宽度为51和311时对应的Gabor表示，可以看出与基于最优窗函数宽度的Gabor表示相比，图4(c)和图4(d)的聚集性和时频分辨率要差。当窗宽为51时，Gabor表示的时宽和频宽都变大，即聚集性变差；当窗宽为311时，聚集性更差，时频表示变得非

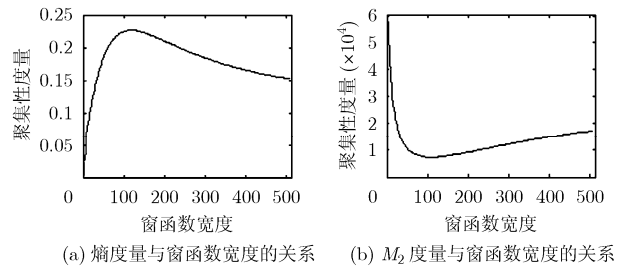


图3 调频信号的Gabor表示聚集性与窗函数宽度的关系

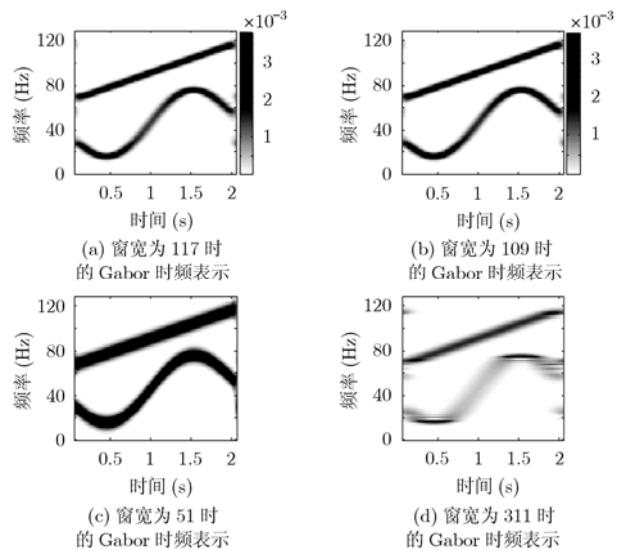


图4 调频信号的Gabor表示

常模糊。因此,用香农熵度量选取最优窗函数宽度的算法是有效的。

4.4 超声检测回波信号

为验证自适应窗宽选择算法处理实际时频信号的有效性,本文对图5(a)所示的实际检测得到的超声信号进行了分析。信号长度为256点,探头中心频率为2.26MHz,采样间隔为0.08 μ s,被测物为一个含有电子束焊缝的铜块。图5(a)中,3个幅值较高的回波分别对应焊缝上界面、旁通孔、焊缝下界面。图5(b)为该信号的最优窗宽时的Gabor时频表示,最优窗宽由基于香农熵的聚集性度量确定。由时频表示图中可以清楚地分辨出母材与热影响区交界以及热影响区与融合区交界的各个反射回波,并能得到各回波出现的时间及其中心频率。尤其在旁通孔的位置附近,时频表示中显示出距离很近的强度不同的两个成分,分别对应旁通孔的上表面和下表面,而在时域中却难以区分。

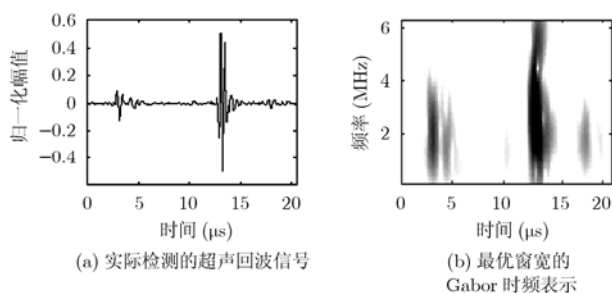


图5 实际检测的超声信号及其Gabor表示

4.5 信噪比对窗宽选择算法的影响

为了验证噪声对两种聚集性度量选择的最优窗函数宽度的影响,分别对图2(a)中的高斯包络信号,式(10)表示的调频信号在无噪声和分别添加信噪比为-5, 0, 5, 10及20dB的高斯白噪声后,进行了仿真。在不同信噪比下,两种聚集性度量得出的最优窗函数的宽度分别列于表1中,由于噪声是高斯分布的随机噪声,因此,不同次仿真得到的结果会稍有不同,本文对各信噪比情况下的仿真分别做了10次,然后将10次窗宽的平均值取整后作为最终结果。

表1 信噪比对窗函数宽度选择的影响

SNR (dB)	最优窗宽			
	调频信号		高斯包络信号	
	H_1	M_2	H_1	M_2
-5	129	247	51	153
0	123	137	39	65
5	119	121	39	51
10	119	117	39	45
20	117	111	37	41
无噪声	117	109	37	37

由表1可得出:

(1)当信噪比降低时,采用两种聚集性度量得到的Gabor变换窗函数的最优宽度都会增大。

(2)本文提出的最优窗宽选择算法受信号信噪比的影响较小,而基于 M_2 度量的最优窗宽选择算法受信号信噪比的影响较大,当信噪比低于0dB时,基于 M_2 度量选择的最优窗宽已不能反映信号的非平稳情况。

5 结束语

本文提出了Gabor变换的窗函数宽度的自适应选择算法。该算法以香农熵作为信号时频分布聚集性的度量,并对香农熵的取值范围进行改进,使其位于闭区间[0, 1]。然后,利用熵度量寻找能使时频分布聚集性最好的窗函数宽度,实现适合信号非平稳程度的窗函数宽度的自适应选择。对不同信号分析表明,利用该窗宽选择算法能获得聚集性好,时频分辨率高的时频表示,并且具有很好的抗噪性能。此外,文中讨论的窗函数类型为高斯窗函数,对于其它类型的窗函数,该算法依然适用。

参考文献

- [1] Daubechies I and Planchon F. Adaptive Gabor transforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2002, 13(1): 1-21.
- [2] Douglas J and Thomas P. A high resolution data-adaptive time-frequency representation. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1990, 38(12): 2127-2135.
- [3] Tomasz Z. Joint time-frequency resolution of signal analysis using Gabor transform. *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, 2001, 50(5): 1436-1444.
- [4] Sweeney J, Orr R, and Balart R, et al. Experiments in dimensionally-optimum Gabor representations. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Minneapolis, USA, 1993, 3: 265-268.
- [5] 张贤达. 现代信号处理. 第二版. 北京: 清华大学出版社, 2002: 368-377.
- [6] Stankovic L. A measure of some time-frequency distributions concentration. *Signal Processing*, 2001, 81(4): 621-631.
- [7] Richard G, Patrick F, and Augustus J, et al. Measuring time-frequency information content using the Renyi entropies. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2001, 47(4): 1391-1409.
- [8] Wang Q and Shen Y. Performances evaluation of image fusion techniques based on nonlinear correlation measurement. *Proc. of IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Como, Italy, 2004: 472-475.

杜秀丽: 女, 1977年生, 博士生, 研究方向为超声检测、信号时频分析。

沈毅: 男, 1965年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为检测技术、信号处理。

王艳: 女, 1959年生, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为检测技术、过程控制。