

嵌入固有模态函数的各向异性扩散方程用于图像降噪

戴芳^{①②} 薛建儒^① 郑南宁^①

^①(西安交通大学人工智能与机器人研究所 西安 710049)

^②(西安理工大学理学院 西安 710054)

摘要: 该文利用经验模态分解技术对图像进行分解, 获得表示图像不同频率属性的各个固有模态函数分量, 并将代表图像高频信息和次高频信息的固有模态函数嵌入到 Perona-Malik 模型中。改进后的模型不仅在对高斯噪声降噪时优于原 Perona-Malik 模型, 而且对椒盐噪声也能较好地去除。

关键词: 固有模态函数; Perona-Malik 模型; 经验模态分解; 图像降噪; 各向异性扩散

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)03-0509-05

Embedding Intrinsic Mode Function into Anisotropic Diffusion Equation for Image Denoising

Dai Fang^{①②} Xue Jian-ru^① Zheng Nan-ning^①

^①(Institute of Artificial Intelligence & Robotics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

^②(School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: In this paper, an image denoising model which embeds intrinsic mode function into Perona-Malik model is proposed. Firstly, the image is decomposed into Intrinsic Mode Functions (IMFs) by using empirical mode decomposition technique; each of IMFs captures the feature information under different scales. Secondly, the first and second IMFs are embedded into Perona-Malik model. Experimental results indicate that this method is more efficient than Perona-Malik model in removing Gaussian noise. Moreover, this method can remove salt and pepper noise.

Key words: Intrinsic mode function; Perona-Malik model; Empirical mode decomposition; Image denoising; Anisotropic diffusion

1 引言

图像在保存和传输的过程中不可避免地会受到噪声的干扰, 而这些噪声对图像处理和分析带来不必要甚至是严重的影响。为了消除这种影响, 就必须设法将这些噪声进行减少或去除。正因为此, 图像降噪一直是图像处理领域研究的基本问题之一。

图像降噪方法有许多, 如高斯平滑、小波阈值滤波、分形图像降噪等。关于图像降噪的综述可参见文献[1]。各向异性扩散模型^[2-5]是众多降噪模型中的一类。该类模型对图像进行选择平滑, 使得在降噪的同时可以很好地保持图像的边缘。

Perona 和 Malik 首次将各向异性扩散方程用于图像选择平滑, 提出了著名的 Perona-Malik 模型^[2](简称 P-M 模型)。P-M 模型以图像梯度的幅值的递减函数作为平滑力度大小的依据, 也就是说, 在梯度幅值大的地方, 平滑的力度小;

在梯度幅值小的地方, 平滑的力度大。据此, 就可以在滤去噪声的同时, 使图像的边缘得以保持。然而, P-M 模型对孤立噪声的去除效果不理想。这是因为, 在孤立的噪声点处, 其梯度模很大, 因此, 这个点被当作边缘点来处理, 使得平滑力度不够。同时, P-M 模型对高噪声图像的平滑效果也不理想。Catté 等人在 P-M 模型的扩散系数中引入高斯平滑算子^[3], 对 P-M 模型的去噪效果有很大的改进, 但这又导致对某些重要特征保持的不好。Alvarez 等人进一步扩展了这一工作^[4], 对图像的扩散只在垂直于梯度的方向上进行, 在梯度方向上不进行扩散, 使得边缘保持特性得到了改善。林宙辰等人提出了一个由各向异性扩散方程定义的图像滤波算子, 使得图像中有意义的较强的尖峰和窄边缘得到保持。张元林等在图像梯度模的基础上恢复出图像的边缘信息, 得到了一个改进的基于非线性偏微分方程的图像平滑模型^[7]。H. Luo 等人提出了耦合各向异性扩散方程用于图像的选择平滑^[5], 该模型通过解一个非线性扩散方程来实现各向异性扩散, 在消除高斯噪声的同时, 很好地保持了图像的边缘特征。

为了使得各向异性扩散模型不仅对高斯噪声有明显的降噪效果, 而且对椒盐噪声也能很好地去除, 同时又使得降

2007-04-06 收到, 2007-09-24 改回

国家自然科学基金项目(60405004, 60635050), 国家 863 项目(20060101Z1059), 国家 973 项目(2006CB708303)和陕西省教育厅项目(07JK328)资助课题

噪后的图像的边缘细节不丢失, 本文在 P-M 模型中嵌入固有模态函数(可通过对图像施行经验模态分解^[8]而得到), 将原 P-M 模型中以图像梯度的幅值的递减函数作为平滑力度大小的依据, 改为以固有模态函数梯度幅值的递减函数作为平滑力度大小的依据。引入固有模态函数后的 P-M 模型, 在对高斯噪声和椒盐噪声去除方面均获得了较好的结果。

2 经验模态分解和 P-M 模型

2.1 经验模态分解

经验模态分解^[8](Empirical Mode Decomposition, EMD)可以有效提取非线性、非平稳时间序列的瞬时特征。与 Fourier 变换和小波变换相比, EMD 不需要预先确定滤波器或小波基函数, 是一种完全数据驱动的方法。EMD 在图像处理中有许多成功的应用, 如图像滤波, 图像编码, 边缘提取及图像分析等。

EMD 可通过一个称为“shifting process”的迭代过程^[8], 将图像 I 分解为有限个固有模态函数(Intrinsic Mode Function, IMF)和一个残差之和, 即 $I = \sum_{i=1}^N \text{IMF}_i + r_{N+1}$,

其中, IMF_i 表示第 i 个固有模态函数, r_{N+1} 表示残差图像。每一个 IMF 需满足两个条件: (1)零交叉点数和极值点数相等或至多相差一个; (2)在任一点, 由局部极大值点确定的上包络和由局部极小值点确定的下包络的平均值为零。这些零均值、局部对称的 IMF 携带了图像不同频率的属性信息。 IMF_1 表示图像的最高频信息, 即图像的细节信息。 IMF_2 表示图像的次高频信息。EMD 分解可以获得图像不同尺度下的信息, 为进一步分析图像提供了多尺度的图像信息。

“shifting process”可通过以下步骤来实现:

- (1)求输入图像 I 的灰度值的所有极大值点和极小值点;
- (2)求过所有极大值点的上包络 U 和过所有极小值点的下包络 L ;
- (3)逐点计算上、下包络的平均值 $m = (U + L)/2$;
- (4)从图像 I 中减去平均值 m , 得到 $h = I - m$;
- (5)如果 h 不满足 IMF 的条件, 将 h 作为新的输入图像, 重复步骤(1)~步骤(4), 直至 h 是 IMF。此时, 残差图像 $r = I - h$;
- (6)将残差图像 r 作为新的输入图像 I , 重复上述步骤, 即可获得下一个 IMF。

从上述算法可以看到, 这个分解过程是一个迭代过程。在这个迭代过程中, 每次从图像中减去上、下包络的平均面, 直到所得结果是一个 IMF。此时的 IMF 携带了图像中振荡最快的信息。从原图像中减去所得的 IMF, 对得到的残差图像继续施行分解, 即可获得下一个 IMF, 该 IMF 携带的信息较之前一个 IMF 其振荡频率要慢些。如此获得的 IMF 代表了图像不同的频率属性信息。

2.2 P-M 模型

P-M 模型是各向异性扩散模型, 可表示为^[2]

$$\begin{cases} I_t = \text{div}(g(\|\nabla I\|) \cdot \nabla I) \\ I(x, y, 0) = I_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 t 是演化时间参数, $I(x, y, t)$ 表示 t 时刻 (x, y) 处的像素值, ∇ 为梯度算子, $\nabla I = [I_x, I_y]^T$, div 是散度算子, I_0 表示原始图像。 $g(\cdot)$ 是扩散系数, 满足: (1) $g(s)$ 是 s 的递减函数; (2) $g(0) = 1$; (3) $s \rightarrow \infty$ 时, $g(s) \rightarrow 0$ 。Perona 和 Malik 建议扩散系数选取为 $g(s) = \exp(-(s/k)^2)$ 和 $g(s) = 1/(1 + (s/k)^2)$, k 或者是一个常数, 或者依据图像中噪声的情况来估计。通过对该方程的演化, 即可实现对图像的平滑降噪。该模型的关键是函数 $g(\|\nabla I\|)$, 这包括 $g(\cdot)$ 的选取和以图像的梯度模作为该函数的变量。之所以选择梯度, 是因为梯度在一定程度上反映了图像的边缘信息。由 $g(\cdot)$ 的性质可知, 在梯度值小的图像区域, 对图像的平滑力度大, 而在梯度值较大的边缘附近, 对图像的平滑力度小甚至不平滑, 这样就达到了降噪保边的目的。这也正是 P-M 模型的核心所在。

3 嵌入 IMF 的 P-M 模型

图像经 EMD 分解后可以获得若干个 IMF 分量。这些 IMF_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 代表了图像不同尺度下的信息。随着 i 的增大, IMF_i 的频率变化在减小。图像的变化特征主要集中在 IMF_1 和 IMF_2 。为此, 将 IMF_1 和 IMF_2 同时引入 P-M 模型。令 $F = \text{IMF}_1 + \text{IMF}_2$, 此时, 模型可表示为

$$\begin{cases} I_t = \text{div}(g(\|\nabla F\|) \cdot \nabla I) \\ I(x, y, 0) = I_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\nabla F = [F_x, F_y]^T$ 。模型式(2)与模型式(1)的差异在于扩散系数 $g(\cdot)$ 的自变量的不同, 一个为图像的梯度, 一个为 IMF 的梯度, 称此模型为 IMF-P-M 模型。

图 1 给出了图像的梯度图、 IMF_1 、 IMF_2 、 F 以及 F 的梯度图。 IMF_1 分量(图 1(c))携带了图像的细节信息, IMF_2 分量(图 1(d))携带了图像的部分细节信息, 两者的和 F (图 1(e))较好地反映了图像的细节特征。正因如此, F 的梯度比原图像的梯度更能捕获图像中灰度变化的信息, 特别是纹理信息(如发穗), 以此控制平滑速度就可以达到降噪保边的目的。

图 2 是叠加了 2% 的椒盐噪声后依次得到的图像的梯度图、 IMF_1 、 IMF_2 、 F 以及 F 的梯度图。对加噪图像施行 EMD, 获得的 IMF_1 (图 2(c)) 和 IMF_2 (图 2(d)) 各自均不能很好地反映图像的特征信息, 但它们的叠加(图 2(e))却能完全反映图像的特征。这也正是在 P-M 模型中使用 IMF_1 和 IMF_2 的叠加 F , 而不用 IMF_1 或 IMF_2 的原因所在。

值得注意的一点是, 图 2(f)中的噪声比图 2(b)中的噪声要明显得多。考虑到在保边的同时, 要尽可能地对噪声加以消除, 选取 F 的梯度作为扩散快慢的依据, 但在扩散项中并没有用 F 的梯度, 而是保留了图像的梯度。这样做, 一方面利用了 F 的特征表示能力, 另一方面保留了图像梯度的作用。两者的有机结合, 使得改进后的 IMF-P-M 模型不仅对高斯噪声有很好的降噪效果, 而且对椒盐噪声也有明显地去

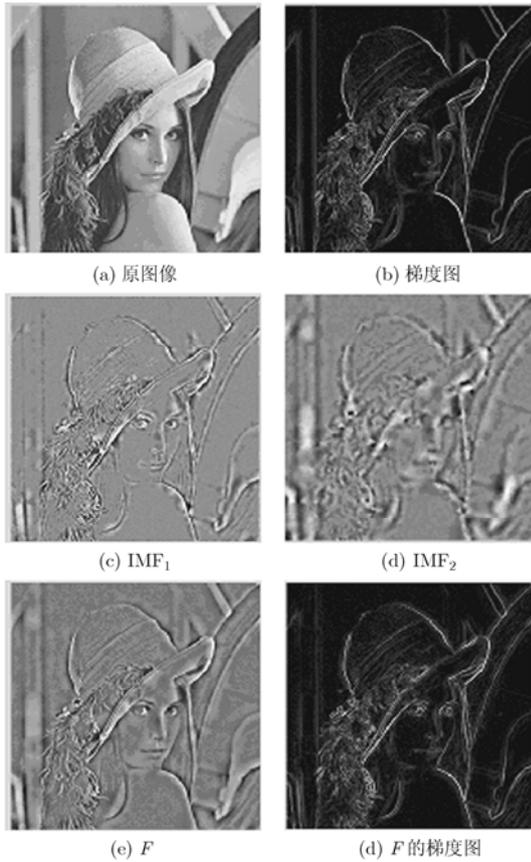


图 1

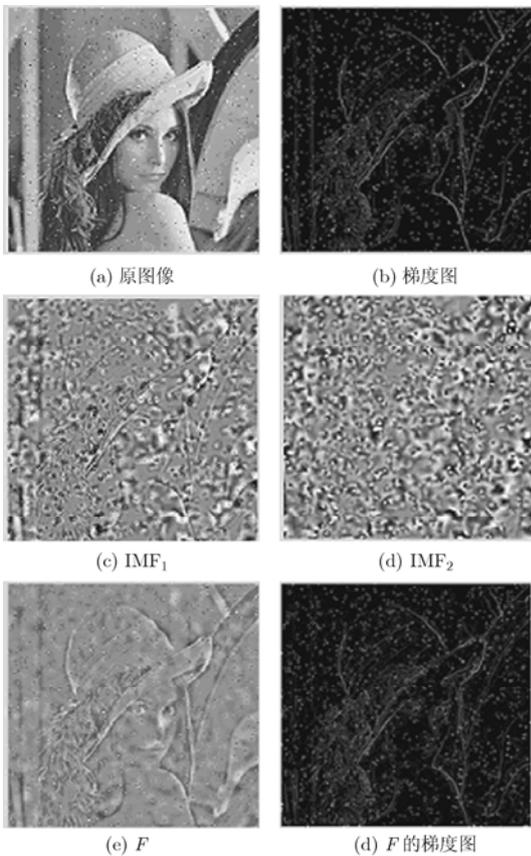


图 2

除作用。

4 实验结果与讨论

IMF-P-M 模型的求解采用文献[2]中的离散格式, 即

$$I_{i,j}^{t+1} = I_{i,j}^t + \lambda [C_N \cdot I_N + C_S \cdot I_S + C_E \cdot I_E + C_W \cdot I_W]_{i,j}^t \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{N_{i,j}}^t &= g(|F_{N_{i,j}}^t|), & F_{N_{i,j}}^t &= F_{i-1,j}^t - F_{i,j}^t, & I_{N_{i,j}}^t &= I_{i-1,j}^t - I_{i,j}^t \\ C_{S_{i,j}}^t &= g(|F_{S_{i,j}}^t|), & F_{S_{i,j}}^t &= F_{i+1,j}^t - F_{i,j}^t, & I_{S_{i,j}}^t &= I_{i+1,j}^t - I_{i,j}^t \\ C_{E_{i,j}}^t &= g(|F_{E_{i,j}}^t|), & F_{E_{i,j}}^t &= F_{i,j+1}^t - F_{i,j}^t, & I_{E_{i,j}}^t &= I_{i,j+1}^t - I_{i,j}^t \\ C_{W_{i,j}}^t &= g(|F_{W_{i,j}}^t|), & F_{W_{i,j}}^t &= F_{i,j-1}^t - F_{i,j}^t, & I_{W_{i,j}}^t &= I_{i,j-1}^t - I_{i,j}^t \end{aligned}$$

参数 $\lambda \in [0, 1/4]$, 实验中均取为 0.2。扩散系数取为 $g(s) = 1 / (1 + (s/k)^2)$ 。实验分为两部分进行, 一是叠加了高斯噪声的图像, 二是叠加了椒盐噪声的图像。实验中需要确定的参数有扩散系数 $g(\cdot)$ 中的 k 和时间参数(也称迭代次数) t 。 k 越大, 平滑的力度越大。

图 3 是高斯噪声的情形。图 3(a)是加入了均值为 0, 方差为 0.01 的高斯噪声的图像。取 $k = 30$, $t = 5$ 分别利用 P-M 模型和 IMF-P-M 模型对图 3(a)中的图像进行降噪, 结果分别为图 3(b)和图 3(d)。从图中可以看出, 在参数相同的条件下 IMF-P-M 模型的降噪效果明显优于原 P-M 模型。保持参数 $k = 30$ 不变, 改变迭代次数 $t = 15$, P-M 模型的降噪效果有所改善(图 3(c))。但随着迭代次数的增加, 会增加运算的时间。

图 4 也是加入高斯噪声的情形。与图 3 不同的是加入的高斯噪声的方差为 0.05。此时, 在迭代次数 $t = 15$ 和参数值



图 3 混有高斯噪声的图像的降噪效果

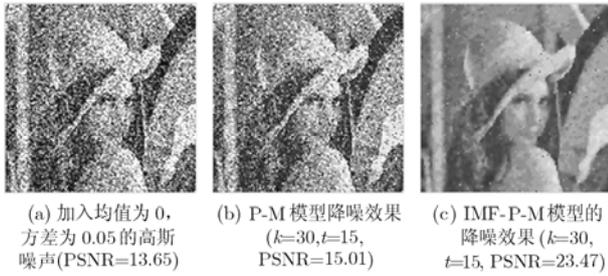


图4 混有高斯噪声的图像的降噪效果

$k = 30$ 的情况下, IMF-P-M 模型的降噪效果明显好于 P-M 模型的降噪效果。

图5是有椒盐噪声的图像的降噪效果。图5(a)中的图像加入了5%的椒盐噪声。选取参数 $k = 60$, 迭代次数 $t = 5$, 分别利用 P-M 模型和 IMF-P-M 模型对图5(a)中的图像进行降噪, 结果分别为图5(b)和图5(c)。P-M 模型对椒盐噪声几乎没有去除效果, 而 IMF-P-M 模型对椒盐噪声有较好的抑制作用。而且, 适当增加迭代次数, 降噪的效果会明显改进。

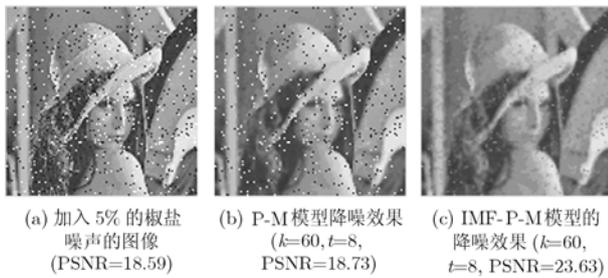


图5 有椒盐噪声的图像的降噪效果

图6是加入20%的椒盐噪声的降噪效果比较。尽管 IMF-P-M 模型对椒盐噪声有一定的抑制作用, 但与中值滤波相比, 其去除椒盐噪声的效果远没有中值滤波理想。

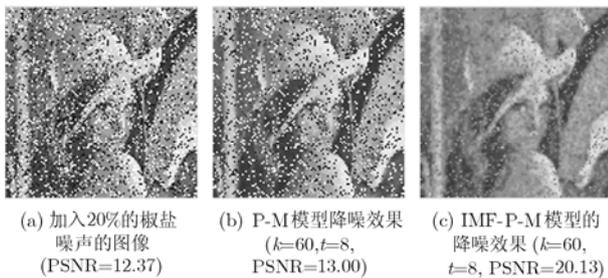


图6 有椒盐噪声的图像的降噪效果

图7是 P-M 模型和 IMF-P-M 模型保边性能的比较。图7(a)是原图像, 图7(b)是加噪图像, 对加噪图像利用 P-M 模型和 IMF-P-M 模型分别进行降噪处理, 在降噪效果相近(为了获得相近的降噪效果, 两个模型的迭代次数不同, P-M 模型取 $t = 12$, IMF-P-M 模型 $t = 4$)的情况下, IMF-P-M

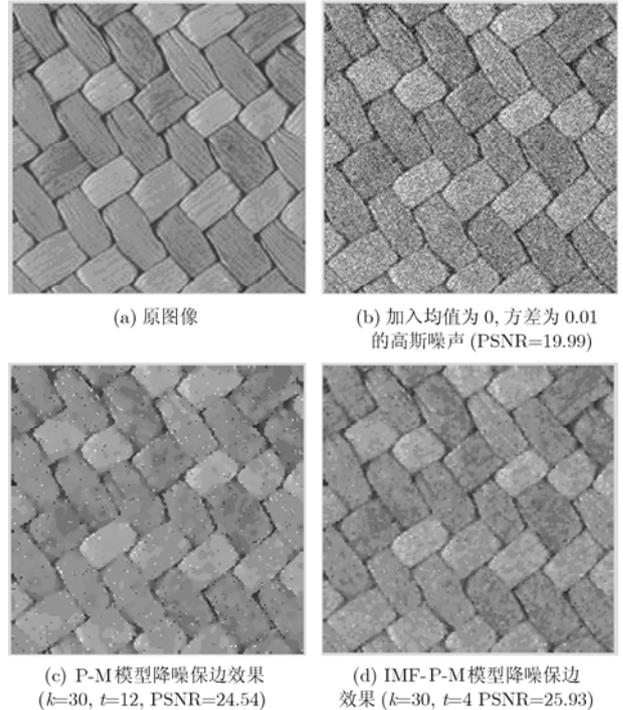


图7 保边性能比较图

模型的保边性能优于 P-M 模型。

表1是加入不同噪声时, 参数 k 和 t 的取值及用不同模型降噪的 PSNR 的比较。

表1 不同噪声时的 PSNR 比较

模型	高斯噪声		椒盐噪声	
	均值 0, 方差 0.01 $t = 5, k = 30$	均值 0, 方差 0.05 $t = 15, k = 30$	5% $t = 8, k = 60$	20% $t = 8, k = 60$
加噪图像	20.01	13.65	18.59	12.37
P-M 降噪图像	23.81	15.01	18.73	13.00
IMF-P-M 降噪图像	27.06	23.47	23.63	20.13

实验结果表明: (1)在对高斯噪声进行降噪时, IMF-P-M 模型的降噪效果在迭代次数和参数取值相同的情况下要优于原 P-M 模型; (2)原 P-M 模型对椒盐噪声几乎没有效果, 而 IMF-P-M 的模型对椒盐噪声有一定的降噪作用; (3)参数 k 的取值, 椒盐噪声时要大于高斯噪声。迭代次数 t 的取值, 随着噪声的增加而增大; (4)在降噪效果相近的情况下, IMF-P-M 模型的保边性能优于 P-M 模型。

5 结束语

本文利用 EMD 技术, 获得了表示图像不同尺度信息的 IMF, 并将小尺度下的 IMF 嵌入到 P-M 模型中, 是一种非

常有意义的尝试。嵌入 IMF 后的 P-M 模型, 无论是对高斯噪声, 还是对椒盐噪声, 在降噪能力方面均有所提高。

将 IMF 与 P-M 模型相结合, 可以对图像进行平滑降噪, 但在噪声污染严重的情况下, 降噪效果还有待于进一步改进。同时, 研究结合后的 P-M 模型在图像处理和分析中的其他应用(如边缘提取, 图像特征检测等)是下一步的工作。

参 考 文 献

- [1] Buades A, Coll B, and Morel J M. A review of image denoising algorithms, with a new one. *Multiscale Model. Simul.*, 2005, 4(2): 490-530.
 - [2] Perona P and Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, 12(7): 629-639.
 - [3] Catte F, Lions P, and Morel J. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1992, 29(1): 182-193.
 - [4] Alvarez L, Lions P, and Morel J. Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1992, 29(3): 845-866.
 - [5] Luo H, Zhu L, and Ding H. Coupled anisotropic diffusion for image selective smoothing. *Signal Processing*, 2006, 86(7): 1728-1736.
 - [6] 林宙辰, 石青云. 一个能去噪和保持真实感的各向异性扩散方程. *计算机学报*, 1999, 22(11): 1133-1137.
Lin Z C and Shi Q Y. An anisotropic diffusion equation that can remove noise and keep naturalness. *Chinese J. Computers*, 1999, 22(11): 1133-1137.
 - [7] 张元林, 郑南宁, 袁泽剑. 一种改进的图像自适应非线性滤波方法. *西安交通大学学报*, 2004, 38(2): 162-166.
Zhang Y L, Zheng N N, and Yuan Z J. Improvement of image adaptive nonlinear filtering. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2004, 38(2): 162-166.
 - [8] Huang N E, Shen Z, Long S R, Wu M C, and Shih H H, *et al.*. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1998, 454: 903-995.
- 戴芳: 女, 1966年生, 副教授, 博士生, 研究方向为图像分析、计算机视觉与模式识别。
薛建儒: 男, 1972年生, 博士, 教授, 主要研究方向为计算机视觉与模式识别、视频分析与视频编码。
郑南宁: 男, 1952年生, 博士, 教授, 中国工程院院士, 主要研究方向为智能信息处理、计算机视觉与模式识别。