

## 利用 ASTFT 谱有效抑制 WVD 交叉项的方法

程发斌<sup>①</sup> 汤宝平<sup>①</sup> 钟佑明<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(重庆大学机械学院机械电子系 重庆 400030)

<sup>②</sup>(重庆交通大学计算机与信息学院 重庆 400074)

**摘要:** 该文分析了Wigner-Ville Distribution (WVD)中自项与交叉项相互关系,提出了一种利用自适应短时傅里叶变换(ASTFT谱)有效抑制WVD交叉项的新方法。该方法首先对信号进行ASTFT得到信号的ASTFT谱图,以确定出信号分量在时频平面内的位置,然后将ASTFT谱作为窗函数对信号的WVD进行加窗处理,从而有效消除掉WVD中的交叉项,并保留WVD的高分辨率和能量聚集性等优良特性。最后通过实例验证了该方法的有效性。

**关键词:** 维格纳分布(WVD); 自适应短时傅里叶变换(ASTFT); 交叉项; 时频分布

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)10-2299-04

## A Method to Suppress Cross-Terms of Wigner-Ville Distribution Using ASTFT Spectrum

Cheng Fa-bin<sup>①</sup> Tang Bao-ping<sup>①</sup> Zhong You-ming<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(College of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

<sup>②</sup>(Computer and Information College, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

**Abstract:** The rules of correlation between auto-terms and cross-terms of Wigner-Ville Distribution(WVD) are obtained by analyzing the WVD and a new method to suppress cross-terms of WVD using Adaptive Short-Time Fourier Transform (ASTFT) spectrum is put forward. Firstly, the signal ASTFT spectrum which can determine the signal component positions in the time-frequency plane is obtained. Then, window function, ASTFT spectrum, is selected to process the signal WVD. Thus the cross-term interference can be effectively restrained, and it retains the much finer characteristics of WVD, such as high resolution jointly in time and frequency and energy centralizing. The examples indicate that a better resolution and more effective suppression of cross-term interference is obtained in the end.

**Key words:** Wigner-Ville Distribution(WVD); Adaptive Short-Time Fourier Transform (ASTFT); Cross-terms; Time-frequency distribution

### 1 引言

维格纳分布 Wigner-Ville Distribution (WVD)是一种重要的双线性时频分布,具有高分辨率、能量集中性和满足时频边缘特性等许多优良特性<sup>[1, 2]</sup>。但由于该时频分布是双线性的,对于多分量信号而言,WVD存在严重的交叉项干扰,阻碍了其对信号的有效分析、解释和各分量参数的提取。因此,抑制WVD交叉项、研究改进WVD一直是时频分析研究中一个活跃的领域。近年来,已有许多学者对WVD中交叉项的抑制进行了研究工作。比如文献[3]从模糊域滤波的角度提出了一种高时频分辨率抑制交叉项的核函数设计与思路,探索了该分布在抑制交叉项并保持较高时频分辨率方面的有效性;文献[4]中将Gabor变换和WVD结合起来,得到一种新的时频分布,以有效地抑制或者减弱交叉项干

扰;文献[5]中采用了一种滤波器组和WVD相结合的方法;文献[6]中利用小波包无冗余、无疏漏、正交地分解信号到独立的频带内的能力,提出了用小波包对信号的维格纳时频分布进行分解,并利用分解系数重构时频图来抑制WVD交叉项的方法;文献[7]中讨论了一种使用中心仿射滤波器来抑制WVD交叉项的方法;文献[8]结合盲源分离方法(BSS)来抑制WVD的交叉项;文献[9]中给出了一种改进的WVD,其用卷积代替相乘来计算模糊函数。这些研究成果对WVD的交叉项干扰起到了很大的抑制作用,但目前的方法基本上都是在自项成分保留与交叉项成分抑制方面取得某种折衷,从根本上消除WVD的交叉项干扰并保留WVD的高时频聚集性等优良特性,仍是研究者努力奋斗的目标。

### 2 利用 ASTFT 谱抑制 WVD 交叉项的原理与方法

#### 2.1 WVD中的交叉项问题

对任一可测的、平方可积的信号  $s(t) \in L^2(R)$ , 其WVD定义为

$$\text{WVD}_s(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^* \left( t - \frac{1}{2}\tau \right) s \left( t + \frac{1}{2}\tau \right) e^{-j\tau\omega} d\tau \quad (1)$$

2007-04-02 收到, 2007-09-17 改回

国家自然科学基金(50405009, 50735008), 霍英东教育基金会 11 届青年教师基金(111057)和教育部新世纪人才支持计划(NCET-04-0849)资助课题

WVD中的被积函数核  $s^*\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)s\left(t + \frac{1}{2}\tau\right)$  称之为维格纳自相关函数, 记为  $r_s(t, \tau)$ 。显然, 信号  $s(t)$  的WVD就是  $r_s(t, \tau)$  对  $\tau$  的傅里叶变换。

注意式(1)中信号  $s(t)$  在右端出现了两次, 因而WVD隶属一类“二次型(或双线性)时频分布”。目前已经公认, WVD具有许多时频分析所希望的优良性质, 如高分辨率、能量集中性、时频边缘特性等等。但遗憾的是, 当WVD分析由多个分量组成的多分量信号时, 结果会出现交叉项问题。即若  $s(t) = \sum_i s_i(t)$ , 则

$$r_s(t, \tau) = s^*\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)s\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) = \left[\sum_i s_i^*\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)\right] \cdot \left[\sum_i s_i\left(t + \frac{1}{2}\tau\right)\right] = \sum_i s_i^*\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)s_i\left(t + \frac{1}{2}\tau\right) + \left[\sum_i \sum_{j, i \neq j} s_i^*\left(t - \frac{1}{2}\tau\right)s_j\left(t + \frac{1}{2}\tau\right)\right] = r_A(t, \tau) + r_c(t, \tau) \quad (2)$$

上式右端包含了有效的自相关部分  $r_A(t, \tau)$  和干扰的互相关部分  $r_c(t, \tau)$ 。分别对  $r_A(t, \tau)$  和  $r_c(t, \tau)$  做傅里叶变换, 得到信号WVD的自项  $WVD_{s,auto}(t, \omega)$  和交叉项  $WVD_{s,cross}(t, \omega)$  部分, 其中自项  $WVD_{s,auto}(t, \omega)$  是人们希望得到的分析结果, 而交叉项  $WVD_{s,cross}(t, \omega)$  往往是人们所不希望干扰, 这就是WVD中的交叉项问题。

### 2.2 WVD中自项与交叉项的相互关系

为了从根本上消除WVD中的交叉项干扰, 特别探索了自项与交叉项的相互关系。根据式(2), 信号  $s(t)$  的维格纳分布  $WVD_s(t, \omega)$  可表示为

$$WVD_s(t, \omega) = WVD_{s,auto}(t, \omega) + WVD_{s,cross}(t, \omega) \quad (3)$$

式中

$$WVD_{s,auto}(t, \omega) = F_s\{r_A(t, \tau)\} = \sum_i WVD_{s_i,auto}$$

$$WVD_{s,cross}(t, \omega) = F_s\{r_c(t, \tau)\} = \left[\sum_i \sum_{j, i \neq j} WVD_{s_i,s_j,cross}\right]_{i \neq j}$$

$F_s$  表示傅里叶变换。

研究中发现自项  $WVD_{s,auto}(t, \omega)$  和交叉项  $WVD_{s,cross}(t, \omega)$  具有如下规律: 交叉项  $WVD_{s_i,s_j,cross}(t, \omega)$  的中心位置一般出现在自项  $WVD_{s_i,auto}(t, \omega)$  和  $WVD_{s_j,auto}(t, \omega)$  之间。假设  $WVD_{s_i,auto}(t, \omega)$  和  $WVD_{s_j,auto}(t, \omega)$  存在于中心点  $(t_{fi}, \omega_{fi})$  和  $(t_{fj}, \omega_{fj})$  的邻域内, 则交叉项  $WVD_{s_i,s_j,cross}(t, \omega)$  分布在自项  $WVD_{s_i,auto}(t, \omega)$  和  $WVD_{s_j,auto}(t, \omega)$  的连线上, 存在于中心点  $(t_{fc}, \omega_{fc}) = ((t_{fi} + t_{fj})/2, (\omega_{fi} + \omega_{fj})/2)$  的邻域内。如图1给出了由3个信号分量组成的信号  $z(t) = z_1(t) + z_2(t) + z_3(t)$  的时域波形及WVD, 其中各信号分量表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} z_1(t) &= 5 * e^{-(t-50)^2/200} e^{j2\pi(t-50)/10} \\ z_2(t) &= 5 * e^{-(t-200)^2/200} e^{j2\pi(t-200)/10} \\ z_3(t) &= 5 * e^{-(t-125)^2/200} e^{j2\pi(t-125)/3} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

从图1中还可看出自项  $WVD_{s,auto}(t, \tau)$  在  $t-\omega$  平面变化较慢, 没有从正到负的振荡起伏。交叉项  $WVD_{s,cross}(t, \tau)$  在  $t$  轴和  $\omega$  轴方向则表现为从正到负的振荡起伏。  $t$  轴方向振荡起伏的频率正比于两个信号成分  $s_i(t)$  和  $s_j(t)$  的中心频率  $\omega_i, \omega_j$  之差。  $\omega$  轴方向振荡起伏的频率正比于  $s_i(t)$  和  $s_j(t)$  的中心位置  $t_i, t_j$  之差。因此, 可进一步推论出, 将交叉项与自项做内积, 交叉项的正负相互抵消, 其内积结果近似等于零, 或者  $r_A(t, \tau)$  与  $r_c(t, \tau)$  互不相关。即

$$\langle r_A(t, \tau), r_c(t, \tau) \rangle = 0 \quad (5)$$

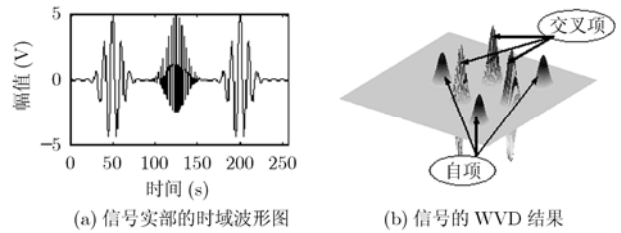


图1

### 2.3 利用ASTFT谱抑制WVD交叉项的方法

式(5)是一个具有普遍性的规律, 发现该规律具有重要价值。因为据此可以想到, 假如能用  $r_A(t, \tau)$  做模板与  $r_s(t, \tau)$  做二维互相关, 就可以从根本上很好地消除  $r_s(t, \tau)$  中的交叉项  $r_c(t, \tau)$ , 再对  $\tau$  做傅里叶变换, 就可以得到有效抑制交叉项  $WVD_{s,cross}(t, \omega)$  后的时频分布  $WVD_{s,Mod}(t, \omega)$ , 即

$$WVD_{s,Mod}(t, \omega) = WVD_s(t, \omega) \cdot WVD_{s,auto}(t, \omega) \quad (6)$$

式(6)表示的实质是一种加窗处理方法, 其中自项  $WVD_{s,auto}(t, \omega)$  不仅起到消除交叉项  $WVD_{s,cross}(t, \omega)$  的作用, 还起到对自身定位的作用。由于不能预先知道分析信号的自项  $WVD_{s,auto}(t, \omega)$ , 因此本文采用信号  $s(t)$  的自适应短时傅里叶时频谱  $ASTFT_s(t, \omega)$  来代替。令  $WVD_{s,auto}(t, \omega) = |ASTFT_s(t, \omega)|^2$ , 则式(6)就转换为可实现的公式

$$WVD_{s,Mod}(t, \omega) = WVD_s(t, \omega) \cdot |ASTFT_s(t, \omega)|^2 \quad (7)$$

### 3 ASTFT谱中窗函数的设计

由式(7)可知, 利用ASTFT谱抑制WVD交叉项时ASTFT谱起着关键作用, 因此, 它的质量是影响新方法的一个重要因素。

#### 3.1 传统STFT谱图的不足

传统的STFT分析方法是假定信号在一较短的时间间隔内是平稳的前提下, 采用非振荡低通型窗函数的一种分析方法, 表达式为

$$STFT_s(t, \omega) = \int s(\tau)g^*(t - \tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (8)$$

$P_s(t, \omega) = |STFT_s(t, \omega)|^2$  定义为谱图。短时傅里叶变换的时间、频率和时-频分辨率是分别由窗函数的时宽  $\sigma_t$ 、带宽  $\sigma_\omega$  和时宽-带宽积确定的。由于时宽-带宽积  $\sigma_t\sigma_\omega$  受不确定原理的制约 ( $\sigma_t\sigma_\omega > 1/2$ ), 谱图不能同时达到高的时间和频率

分辨率:窄的窗函数提供了高的时间分辨率,但频率分辨率低,而宽的窗函数正好相反,这种矛盾的根源在于式(8)中 $g(t)$ 是任意的低通型窗函数。因此,对于时变特征比较显著的信号,传统STFT谱图不能获得高分辨的时频表示,不能很好代替文中提到的自项WVD $_{s,\text{auto}}(t,\omega)$ 。于是本文采用自适应短时傅里叶变换谱ASTFT作为抑制维格纳分布交叉项的窗函数。对于时变特征比较显著的信号,将较短的时间间隔内的信号近似看作为一个线性调频信号(LFM),为此需要构造一个线性调频窗函数来代替低通型窗函数 $g(t)$

$$\gamma(t) = a(t)e^{j c_t t^2 / 2} \quad (9)$$

式中 $a(t)$ 是一低通型窗函数, $c_t$ 是线性调频信号部分的调频指数,它是时间的函数。从对信号瞬时频率(IF)的逼近来看,采用非振荡低通型窗函数的传统STFT是用平行于时间轴的直线(频率不变)来逼近信号的IF曲线,可看作为是对信号IF的零阶近似;而采用调频指数可变的线性调频窗函数的STFT则是用一条斜线(频率线性变化)逼近信号的IF曲线,因而可看作为是对信号IF的一阶近似。所以,在调频指数选择合适的情况下,采用线性调频窗函数的STFT将比传统的STFT方法获得更积聚的信号时频表示,能更好地获得信号自项在时频面的支撑区域。

### 3.2 ASTFT谱中窗函数参数的改进

式(9)中的调频指数 $c_t$ 改变着窗函数在时频平面上的倾斜角度,并影响LFM信号与窗内信号的近似度,理想情况下应使某一时刻的 $c_t$ 等于该时刻信号的瞬时刻调频指数。本文利用时间-时延-多普勒函数(TLDF)和Radon变换技术估计信号的瞬时刻调频指数<sup>[10]</sup>,并自适应地调整窗函数的参数,获得了高分辨率的时频表示。与现有的自适应STFT方法相比,该方法是一种开环的计算方法,避免了非线性优化和迭代运算。

对于一个二维函数 $f(x,y)$ ,其Radon变换即在 $x-y$ 平面上所有直线上的线积分

$$T_R \varphi \{f(x,y)\} = \iint f(x,y) \delta(x \sin \varphi + y \cos \varphi - s) dx dy \quad (10)$$

式(10)中的 $s$ 表示积分直线与原点的距离, $-\infty < s < +\infty$ ;  $\varphi$ 表示积分直线与 $x$ 轴的夹角, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ;  $\delta$ 函数确定了积分直线的位置和方向; $T_R$ 表示Radon变换算子。

某一时刻在由TLDF确定的S-T平面上,线性分布结构通过该平面的原点。如果以S-T平面的原点作为Radon变换的原点,那么对线性分布的检测可以简化为计算通过该平面原点的所有直线上的线积分,具有最大值的线积分对应的直线的斜率即是调频指数 $c_t$ 的估计值。此时只需计算 $s=0$ 时的Radon变换即可得到调频指数 $c_t$ <sup>[11]</sup>。

$$c_t(t) = \arg \max_m \iint |(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v)| \delta(v-m\tau) d\tau dv \quad (11)$$

或

$$c_t(t) = \arg \max_m \iint |(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v)|^2 \delta(v-m\tau) d\tau dv \quad (12)$$

其中 $(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v)$ 表示定义为光滑时间-时延-多普勒函数

(STLDF),表示为

$$(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v) = \int s \left( t + \frac{\eta}{2} + \frac{\tau}{2} \right) s^* \left( t + \frac{\eta}{2} - \frac{\tau}{2} \right) \cdot s^* \left( t - \frac{\eta}{2} + \frac{\tau}{2} \right) s \left( t - \frac{\eta}{2} - \frac{\tau}{2} \right) h(\eta) e^{-j\eta v} d\eta \quad (13)$$

其中 $h(\eta)$ 是一个低通函数。实际应用中,为了避免STLDF中的交叉项影响对调频指数的估计,并不对STLDF的包络或模平方直接做Radon变换,而是设定一个合适的门限,对超过该门限的STLDF值做Radon变换。设门限系数为 $0 < k < 1$ ,则首先对STLDF做预处理

$$D_s(t,\tau,v) = \begin{cases} |(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v)|, & |(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v)| \\ & > \lambda \cdot \max(|(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v)|) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

或

$$D_s(t,\tau,v) = \begin{cases} |(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v)|^2, & |(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v)|^2 \\ & > \lambda \cdot \max(|(T_s)_{\text{STLDF}}(t,\tau,v)|^2) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (15)$$

然后再对 $D_s(t,\tau,v)$ 做Radon变换。

### 3.3 ASTFT谱的算法

当我们要在计算机上实现一个信号的分析时,该信号必须是离散的。实际工程应用中常分析的是有限长的离散时间信号,虽然前面的分析过程是针对连续无限长信号得到的结论,但是只要离散时间信号序列足够大,足够反映信号的整体信息,完全可以近似地应用于有限长离散时间序列的分析。综上所述,自适应STFT算法可描述如下:

(1)对于有限长离散信号 $s(n), n=0,1,2,\dots,N-1$ ,计算其光滑时间-时延-多普勒函数(STLDF);

(2)选择合适的低通型函数 $a(n)$ 和窗长 $L$ , $L$ 为奇数且 $L \ll N$ ;

(3)对于每个时刻 $n$ ,根据信号 $s(n)$ 的STLDF估计瞬时刻调频指数 $c_t(n)$ ;

(4)构造线性调频窗函数 $\gamma(m), m \in -(L-1)/2, (L-1)/2$ ,计算出自适应短时傅里叶谱ASTFT $_s(n,k)$ ;

(5)重复步骤(3)和步骤(4),直至 $n=N-1$ 。

## 4 数值实验

如图2所示,图中表示的是对由3个线性调频信号构成的多分量信号的各种时频分析结果,信号的采样频率为1024Hz,采样时间为1s,各线性调频信号的频率分别是在250Hz到50Hz之间线性变化、450Hz到250Hz之间线性变化和50Hz到450Hz之间的线性变化。图2(a)表示未对信号进行交叉项抑制的维格纳分布结果,尽管分辨率和能量聚集性很好,但信号自项之间出现明显的交叉项。图2(b)表示采用线性调频窗的自适应短时傅里叶变换谱,分辨率很低。图2(c)表示乔伊-威廉姆斯分布结果,分析时间窗采用Hamming窗,频率窗采用为Hanning窗,可以得到分辨率相对ASTFT

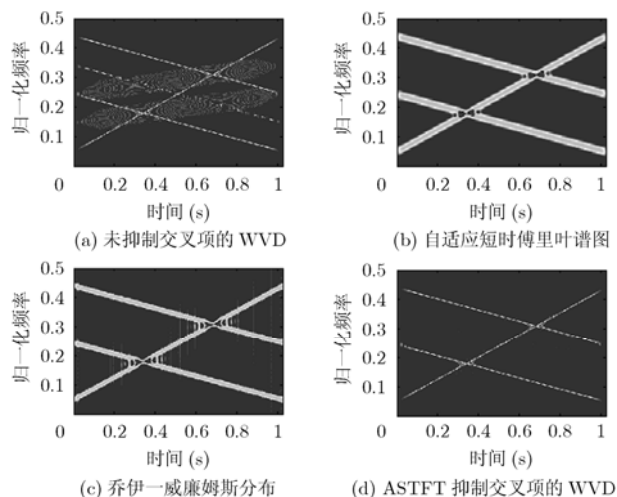


图2 信号的各种时频分析结果

更高的时频谱,但仍然有部分交叉项出现,而且边缘有明显的毛刺。图2(d)所示为本文方法的处理结果,效果非常明显,不但抑制了交叉项,而且保留了WVD的优良特性。

## 5 结束语

本文在分析了WVD自项与交叉项的相互关系规律基础上,提出了一种利用ASTFT谱有效抑制WVD交叉项的新方法。该方法将ASTFT和WVD相结合,充分利用了它们各自的优点,即ASTFT确定自项位置的准确性及WVD的高分辨率和积聚性,从而很好地抑制了交叉项的产生,同时也保留了WVD分布的优良特性。与模糊域滤波方法和卷积方法不同,新方法是在时频域上对WVD加窗,没有平滑效应。与传统的核函数方法中利用线性平滑滤波平滑交叉项的方法也不同,它不需要设计核函数,方法简单,实现容易。另外,由于本文采用的是线性调频窗函数的STFT谱作窗,不需要主观的选择窗函数,比传统的STFT方法能获得更积聚的信号时频表示,即信号自项在时频面的位置和支撑区域,降低了处理过程的主观性。

## 参考文献

- [1] Baraniuk R G and Jones D J. A signal-dependent time-frequency representation: Fast algorithm for optimal kernel design. *IEEE Trans. on Signal Process*, 1994, 42(1): 134-146.
- [2] Zhu Y M, Peyin F, and Goutte R. Equivalence between two-dimensional analytic and real signal Wigner distribution. *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, 37(10): 1631-1634.
- [3] 李波, 沈福民. 一种新的抑制交叉项的时-频分布的分析. *雷达与对抗*, 2003, (1): 16-18.  
Li B and Shen F M. Analysis of a new time-frequency distribution for suppressing the cross terms. *Radar and Electronic Counter Measures*, 2003, (1): 16-18.
- [4] Mirela B and Isar A. The reduction of interference terms in the time-frequency plane. *Signals, Circuits and Systems*, 2003, 2: 461-464.
- [5] 郭福成, 皇甫堪. 基于滤波器组的改进型 Wigner-Ville 分布. *信号处理*, 2001, 17(1): 1-4.  
Guo F C and Huang F K. The improved Wigner-Ville Distribution based on filter bank. *Signal Processing*, 2001, 17(1): 1-4.
- [6] 陈洁, 沈远彤. 基于小波包变换的威格纳分布交叉项的抑制. *湖北大学学报*, 2006, 28(1): 4-6.  
Cheng J and Shen Y T. Applying wavelet packet transform to the suppression of the Interference term of Wigner Ville distribution. *Journal of Hubei University*, 2006, 28(1): 4-6.
- [7] Khandan F and Ayatollahi A. Performance region of center affine Filter for liminating of interference terms of discrete Wigner distribution. *Image and Signal Processing and Analysis*, 2003, 2: 621-625.
- [8] Chen J. Time frequency-based blind source separation technique for elimination of cross-terms in Wigner distribution. *Electronics Letters*, 2003, 39(5): 475-477.
- [9] Lu F S, Yang C X, and Lin P L. An improved Wigner distribution based algorithm for signal identification. Proc. IEEE International Symposium on Underwater Technology (UT'04), Tapei, Taiwan, 2004: 39-45.
- [10] 徐春光, 谢维信. 一种高分辨自适应信号时频表示. *西安电子科技大学学报*, 1999, 26(6): 718-723.  
Xu C G and Xie W X. Time-frequency representation of a high resolution adaptive signal. *Journal of Xidian University*, 1999, 26(6): 718-723.
- [11] Ristic B and Boashash B. Kernel design for time-frequency signal analysis using the radon transform. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(5): 1996-2008.

程发斌: 男, 1978年生, 博士生, 研究方向为信号处理、智能测试与虚拟仪器技术。

汤宝平: 男, 1971年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为机械测试原理与技术、信号分析与处理、虚拟仪器技术。

钟佑明: 男, 1970年生, 博士, 副教授, 主要研究方向为信号处理、虚拟仪器技术。