

# 一种基于三维匀加速直线运动的导弹与目标脱靶量测量方法

李昭慧 徐海霞

(西北电子设备研究所 西安 710065)

**摘要:** 本文提出了一种对雷达测量数据进行处理而得到导弹与目标间脱靶量的算法,该算法在建立精确的空间运动模型的基础上,对雷达数据处理所得的弹目之间的距离平方进行非线性拟合,进而对拟合曲线求导并进行零点搜索得到脱靶时刻,之后在三维方向上再次拟合并内插得到矢量脱靶量和标量脱靶量。仿真实验表明,该算法具有很好的精度和稳定性,可在实际应用中提供有效数据。

**关键词:** 雷达; 脱靶量; 空间运动模型; 三维匀加速; 最小二乘拟合

中图分类号: TN95

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)10-2329-04

## Measurement for Missile-target Miss Distance Based on 3D Rectilinear Motion with Constant Acceleration

Li Zhao-hui Xu Hai-xia

(Northwest Institute of Electronic Equipments, Xi'an 710065, China)

**Abstract:** An algorithm for measuring missile-target miss distance using radar data processing is presented. Based on accurate three-dimensional motion mode, the curve of square-distance translated from radar data between missile and target is fitted with nonlinear method, and differentiated and sought on the zero point to confirm the miss time. The vector miss distance and scalar miss distance can be obtained by fitting three-dimensional motion function and substituting the miss time into that. The simulation experiment shows that the algorithm has good accuracy and stability, which can apply valid result for practical applying.

**Key words:** Radar; Miss distance; Three-dimensional motion mode; 3D rectilinear motion with constant acceleration; Least square fitting

### 1 引言

在靶场测量和侦察中,探测并描绘拦截导弹与目标的交会轨迹,获得矢量或标量脱靶量,是雷达信号和数据处理的主要任务之一,在导弹性能评估、雷达优化设计以及雷达数据处理等方面都有重要的意义,在国内外引起了广泛的关注<sup>[1,2]</sup>。

目前,脱靶量测量方法主要有两类:一类是由测量得到的空间位置数据,经滤波、拟合后得出空间轨迹,通过内插得到非测量点的数据,从而获得脱靶时刻和脱靶量<sup>[3-5]</sup>,此类方法主要用于基于地面坐标系的脱靶量测量,算法核心在于对空间轨迹的重建。另一类是由测量得到的径向速度,通过建立弹目之间的相对运动方程,进而得到脱靶时刻和脱靶量<sup>[6,7]</sup>,此类方法主要用于基于靶坐标系的脱靶量测量,算法核心在于对相对运动方程的重建。

无论哪一种测量体制,都是要通过建立被测物的运动模型,进而对原始数据进行处理,最终得到结果。对于如何确定运动模型和如何进行数据处理,国内外学者进行了深入的研究,最初是通过假设弹目之间是匀速直线运动来确定运动模型,并得到广泛的应用<sup>[2-7]</sup>。然而导弹与目标的实际运动

非常复杂,这种模型上的简化必然带来计算上的误差,吴嗣亮<sup>[8]</sup>等注意到这种由于实际运动和数学模型不符带来的误差,通过假设弹目做加速度未知的匀加速直线运动来减小这种误差,并建立该情况下弹目相对径向速度的时间函数,利用此函数研究脱靶量的计算问题。但是此模型是采用重建相对径向速度函数的方法来实现脱靶量的计算,因此不适用于基于地面坐标系的弹目轨迹测量。在确定运动模型后,对运动轨迹的重建方法上,王菊等采用Kalman滤波的方法<sup>[9,10]</sup>,但在实际应用中,由于测量噪声的统计特性很难直接得到,因此限制了该方法的使用。

在分析以上算法优缺点的基础上,本文将加速度未知的匀加速直线运动模型应用于基于地面坐标系下的运动轨迹重建,给出了一种更为精确的运动轨迹重建模型。假定在弹目交会期间,导弹和目标在笛卡尔坐标系的各个方向上分别作匀加速直线运动,建立该情况下的数学模型,将原始数据转换为弹目间距离平方的时间函数序列,使脱靶时刻的求解转换为数据的非线性拟合与极值问题。结合基于靶坐标系的脱靶量测量的思想,通过在三维方向上进行数据拟合和内插获得精确的矢量脱靶量。最后,由实验证明本文算法的有效性。

## 2 模型建立

假设在弹目交会的很短的时间段内, 目标(靶机或靶弹)在笛卡儿坐标系的各个方向上作匀加速直线运动, 其运动方程为

$$\left. \begin{aligned} X_t &= c_{xt} + v_{xt}t + a_{xt}t^2 \\ Y_t &= c_{yt} + v_{yt}t + a_{yt}t^2 \\ Z_t &= c_{zt} + v_{zt}t + a_{zt}t^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

目标的运动是各方向上分运动的矢量合成, 相比于假定导弹在一个方向上作匀速或匀加速直线运动<sup>[8]</sup>的简化模型来说, 这种三维模型可以描述更为复杂的运动(如抛物线), 更接近运动的真实情况。

同时假定导弹在笛卡儿坐标系的各个方向上也同样作匀加速直线运动, 其运动方程为

$$\left. \begin{aligned} X_m &= c_{xm} + v_{xm}t + a_{xm}t^2 \\ Y_m &= c_{ym} + v_{ym}t + a_{ym}t^2 \\ Z_m &= c_{zm} + v_{zm}t + a_{zm}t^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

导弹和目标皆被当作点目标处理, 因此弹目之间以目标为原点的各个方向上的距离为

$$\left. \begin{aligned} X_m - X_t &= (c_{xm} - c_{xt}) + (v_{xm} - v_{xt})t + (a_{xm} - a_{xt})t^2 = c_x + v_x t + a_x t^2 \\ Y_m - Y_t &= (c_{ym} - c_{yt}) + (v_{ym} - v_{yt})t + (a_{ym} - a_{yt})t^2 = c_y + v_y t + a_y t^2 \\ Z_m - Z_t &= (c_{zm} - c_{zt}) + (v_{zm} - v_{zt})t + (a_{zm} - a_{zt})t^2 = c_z + v_z t + a_z t^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

可见, 弹目间的相对运动依然可以表示为各个方向上匀加速直线运动的合成。

弹目之间距离模量的平方为

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}(t)|^2 &= (X_m - X_t)^2 + (Y_m - Y_t)^2 + (Z_m - Z_t)^2 \\ &= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)t^4 + (2a_x v_x + 2a_y v_y + 2a_z v_z)t^3 \\ &\quad + (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2a_x c_x + 2a_y c_y + 2a_z c_z)t^2 \\ &\quad + (2v_x c_x + 2v_y c_y + 2v_z c_z)t + (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \end{aligned} \quad (4)$$

标量脱靶量是指遭遇时期弹目间的最小相对距离, 达到最小相对距离的时刻即为脱靶时刻, 标量脱靶量和脱靶时刻的求解转化为函数的最小值问题。如果函数 $|\mathbf{r}(t)|$ 的极值存在, 则当 $\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}|_{t=t_m} = 0$ 时,  $|\mathbf{r}(t)|$ 取得最小值, 由于 $\frac{d|\mathbf{r}|^2}{dt} = 2|\mathbf{r}(t)| \cdot \frac{d|\mathbf{r}|}{dt}$ , 当 $\frac{d|\mathbf{r}|}{dt}|_{t=t_m} = 0$ 时, 使 $\frac{d|\mathbf{r}|^2}{dt}|_{t=t_m} = 0$ , 即当 $|\mathbf{r}(t)|^2$ 取得最小值时(此时 $\mathbf{r}(t) \neq 0$ ),  $|\mathbf{r}(t)|$ 同时取得最小值。因此, 脱靶时刻的计算可以不通过寻求 $|\mathbf{r}(t)|_{\min}$ 对应的时刻, 而是直接寻求 $|\mathbf{r}(t)|_{\min}^2$ 对应的时刻。

## 3 基于多项式拟合的数据处理

基于三维方向上匀加速直线运动模型的弹目间脱靶量计算方法的流程如图1所示。

图1中,  $|\mathbf{r}[N]|^2$ 是弹目间距离平方的离散序列, 由雷达

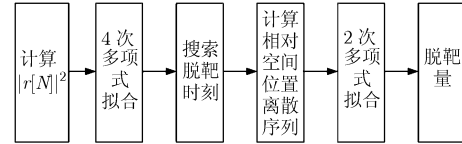


图1 脱靶时刻与脱靶量计算流程图

原始数据计算获得。4次多项式拟合是在 $|\mathbf{r}[N]|^2$ 最小值附近进行, 脱靶时刻即是拟合后函数的极小值所在时刻。导弹相对于目标(或目标相对于导弹)的空间位置矢量序列, 也是由雷达原始数据计算得到, 在三维方向上进行2次多项式拟合之后, 内插得到脱靶时刻各方向上的相对位置, 也就是脱靶量。

雷达的工作方式通常是在以雷达接收天线为原点的极坐标系下进行, 测量所得数据是飞行物的极坐标矢量 $(\alpha, \beta, \rho)$ ,  $\alpha$ 为方位角, 一般为矢量同正北或正东方向的夹角;  $\beta$ 为俯仰角, 为矢量同水平面的夹角;  $\rho$ 为矢量的极距。如果选取笛卡儿坐标系下的 $Y$ 轴作为 $0^\circ$ 正东方位, 极坐标矢量同笛卡儿坐标矢量的转换关系为

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho \cos \beta \sin \alpha \\ Y &= \rho \cos \beta \cos \alpha \\ Z &= \rho \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

弹目间的距离平方为

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}|^2 &= (\rho_m \cos \beta_m \sin \alpha_m - \rho_t \cos \beta_t \sin \alpha_t)^2 + (\rho_m \cos \beta_m \\ &\quad \cdot \cos \alpha_m - \rho_t \cos \beta_t \cos \alpha_t)^2 + (\rho_m \sin \beta_m - \rho_t \sin \beta_t)^2 \\ &= \rho_m^2 + \rho_t^2 - 2\rho_m \rho_t \{ \cos(\beta_m - \beta_t) + \cos \beta_m \cos \beta_t \\ &\quad \cdot [\cos(\alpha_m - \alpha_t) - 1] \} \end{aligned} \quad (6)$$

注意到当 $X$ 轴作为 $0^\circ$ 正东方位,  $|\mathbf{r}|^2$ 的计算表达式是不变的, 这表示式(6)具有普适性。

雷达测量得到目标的空间轨迹采样点, 数据保存为离散序列 $\alpha(nT) = \alpha[N]$ ,  $\beta(nT) = \beta[N]$ ,  $\rho(nT) = \rho[N]$ ,  $T$ 为测量周期。利用测量获得的数据, 构建离散序列 $|\mathbf{r}[N]|^2$ , 从中寻找最小值 $|\mathbf{r}[N]|_{\min}^2$ 。由于采样的栅栏效应,  $|\mathbf{r}[N]|_{\min}^2$ 不一定是 $|\mathbf{r}(t)|_{\min}^2$ ,  $|\mathbf{r}[N]|_{\min}^2$ 对应的时刻不一定是脱靶时刻, 需要进一步计算处理。

由式(4)可知, 在本文模型下, 距离平方是一个有关时间 $t$ 的4次多项式函数, 可表示为

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = \sum_{i=0}^4 q_i t^i, \quad i \in \mathbb{Z}^+ \quad (7)$$

数据处理的任务就是估算出参数 $q_i$ , 当存在测量误差时, 常采用多点数据, 平滑滤波后拟合出相应的表达式和连续曲线。平滑滤波和数据拟合的算法有很多, 常用的有kalman滤波法<sup>[9, 10]</sup>、最小二乘拟合法<sup>[5, 8]</sup>等。文献[11]已经论证: 当观测数据是由一个确定性信号和零均值加性噪声组成时, 使用最小二乘拟合来拟合整条曲线和估算其中的参数, 其结果是一个最小方差无偏估计。本文采用最小二乘拟

合法计算  $q_i$  的估计值  $\hat{q}_i$ , 由于实际脱靶时刻是在最小离散距离时刻  $t_0$  附近, 若  $|\mathbf{r}[N_0]|^2$  是离散距离平方最小值, 以  $N_0$  为中心, 前后各选取  $n$  个点, 共  $2n+1$  点数据, 构建一组线性方程, 计算得到式(8)所示向量, 具体过程参照文献[11]。

$$\hat{\mathbf{Q}} = [\hat{q}_0 \quad \hat{q}_1 \quad \hat{q}_2 \quad \hat{q}_3 \quad \hat{q}_4]^T \quad (8)$$

拟合数据的点数  $n$  的选取对拟合结果的影响很大, 更大的  $n$  值可以降低噪声的影响, 提高拟合的精度, 但同时意味着在更长的时间段内假定物体是遵从同样的运动方程, 会造成实际运动的过度简化, 引入模型误差, 反而使拟合精度下降。

脱靶时刻的搜索, 是在得到多项式系数后, 寻找某一时刻  $t_m$ , 使

$$\left. \frac{d|\mathbf{r}|^2}{dt} \right|_{t=t_m} = \sum_{i=1}^4 iq_i t_m^{i-1} = 0, \quad i \in Z^+ \quad (9)$$

对式(9)在  $t_0$  附近搜索其零点估值  $t_m$ ,  $t_m$  即为真实脱靶时刻的估计。由于拟合和搜索是在  $|\mathbf{r}[N]|^2$  一维函数上进行, 将此方法称为 4 次多项式一维拟合。

由于导弹和目标是在三维空间运动, 仅仅知道两者间的标量脱靶量是没有意义的, 导弹可以位于以目标为中心、以标量脱靶量为半径的球壳上的任一点, 因此只有得到矢量脱靶量才能精确定位。利用原始雷达数据, 获得笛卡儿坐标系下弹目的相对空间位置矢量序列, 对导弹和目标的每个方向上的相对运动方程都进行 2 次多项式的最小二乘拟合, 可以得到它们的空间相对运动轨迹, 即式(3)的估计方程, 本文将这种方法称为 2 次多项式三维拟合, 拟合的任务是得到式(10)。

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{c}_x & \hat{v}_x & \hat{a}_x \\ \hat{c}_y & \hat{v}_y & \hat{a}_y \\ \hat{c}_z & \hat{v}_z & \hat{a}_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

相对位置矢量序列的计算和 2 次多项式三维拟合同样只选取以  $N_0$  为中心的若干数据点进行拟合, 在此可以选择更少的数据, 在更短的时间段内拟合, 以保证模型同实际运动的吻合。将  $t_m$  代入拟合后的多项式, 得到  $t_m$  时刻导弹相对目标的空间位置——矢量脱靶量  $\mathbf{r}(t_m)$ , 矢量脱靶量的模量即为标量脱靶量  $|\mathbf{r}(t_m)|$ 。

从算法的执行流程可以看出, 相比于假设弹目做某一方

向匀速直线运动的模型, 本文的模型在算法的复杂度上要高, 计算量要大。算法需要做一次 4 次多项式拟合和三次 2 次多项式拟合, 因此要多次矩阵运算, 搜索非线性函数零点的步骤也需要多次迭代运算。因此, 本算法适用于对实时性要求不高, 而对精确度要求较高的事后处理场合。

#### 4 实验与分析

为检测算法的性能, 本文进行如下计算机仿真实验。

假定某一目标在 0 时刻从坐标为(1000,6000,0)处起飞, 它的空间运动方程为

$$\left. \begin{aligned} X_t &= 1000 + 75.32t + 121.86t^2 \\ Y_t &= 6000 - 84.6t - 130.29t^2 \\ Z_t &= 110.5t - 7.10t^2 \end{aligned} \right\}$$

某一导弹在 0 时刻从坐标原点处发射, 对目标进行拦截, 导弹的飞行轨迹为

$$\left. \begin{aligned} X_m &= 312.96t + 95.65t^2 \\ Y_m &= 205.34t + 53.00t^2 \\ Z_m &= 120.54t - 10.19t^2 \end{aligned} \right\}$$

理论上, 导弹与目标的相遇是在起飞后的 6.6626s, 真实的矢量脱靶量为(1.567m, -0.077m, -1.690m), 标量脱靶量为 2.3066m。

现假定有一雷达位于(2000, -2000, 0)坐标位置处, 导弹和目标的交会处于雷达的视场之内, 雷达可以分别得到导弹和目标在以雷达为原点的极坐标系中的空间位置矢量, 即两者的径向距离、方位角、俯仰角。雷达每隔 0.01s 测量一次, 测量无延时, 测量持续时间足够长。根据系统设计要求, 不存在固定的系统误差, 噪声来源是热噪声, 所以在径向距离数据上叠加均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声, 此处设置  $\sigma^2=1$ 。

由原始数据得到  $|\mathbf{r}[N]|^2$  序列, 搜索到在 667 点处,  $t_0 = 6.67s$  时刻, 距离平方的离散序列取得最小值  $|\mathbf{r}[N]|^2_{\min} = 18.70 \text{ m}$ 。4 次多项式一维拟合选择 7 点拟合, 即认为在 0.07s 的时间内, 物体的运动规律不变。之后使用弦割法搜索零点, 2 次多项式三维拟合选用 5 点拟合。

1000 次蒙特-卡罗实验结果如表 1 所示。

表 1 实验结果

脱靶时刻 均值(s)	脱靶时刻 误差均值(s)	脱靶时刻 误差方差(s)	矢量脱靶量 均值(m)	矢量脱靶量 误差均值 (m)	矢量脱靶量 误差方差 (m)	标量脱靶量 均值(m)	标量脱靶量 误差均值 (m)	标量脱靶量 误差方差 (m)
6.6626	$3.37 \times 10^{-5}$	$7.04 \times 10^{-8}$	1.573, -0.048, -1.689	0.010, 0.033, 0.001	0.124, 0.888, 0.009	2.510	0.171	0.082

估计误差的分布如图2、图3所示,可以看出:

(1)利用4次多项式对弹目间距离平方进行一维拟合,进而求导并搜索脱靶时刻的方法性能优良,有很好的精度和稳定性,这是由于假定物体的运动是笛卡儿坐标系下各方向上匀加速直线运动的合成,这一数学模型可描述更复杂的运动,使因模型不匹配而带来的误差大为减小。对拟合后的弹目间距离平方曲线求导,消除了测量误差和拟合误差造成的曲线浮动,使脱靶时刻的搜索更为精确。

(2)矢量脱靶量的误差分布同弹目的相对运动有关,如果在某一方向上,相对运动方程为  $R = c + vt + at^2$ , 那么误差传递公式为  $\Delta R = (2at + v)\Delta t$ , 当  $t = t_m$ ,  $\Delta t \sim N(0, \sigma_t^2)$  时,  $\Delta R \sim N(0, (2at_m\sigma_t + v\sigma_t)^2)$ , 不同方向上的  $a$ ,  $v$  不同,其脱靶量误差方差也不同。例如在Z方向上,  $a_z$  和  $v_z$  相比于其他方向上的同等参数要小,所以Z方向上的脱靶量误差方差也比其他方向上的小。

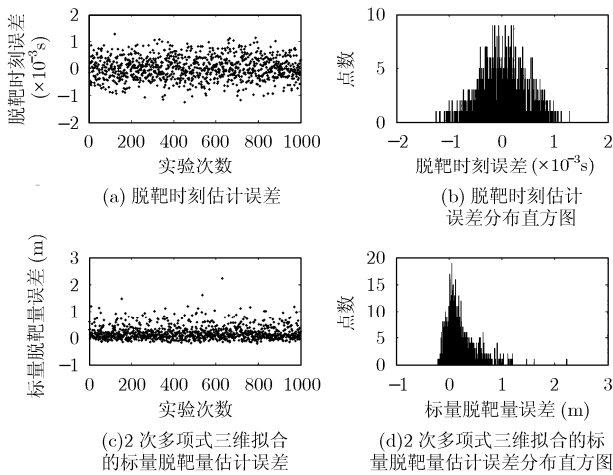


图2 脱靶时刻与标量脱靶量误差分布

(3)在三维方向上对弹目相对运动方程分别进行拟合,并利用一维拟合、搜索得到的精确的脱靶时刻进行内插,可以获得精确的矢量脱靶量和标量脱靶量。由于矢量脱靶量的计算是在三维方向上拟合和内插,误差被扩散到三个方向上,各自服从零均值高斯分布,因而使标量脱靶量的估计误差服从  $\chi^2$  分布。

### 5 结束语

本文将加速度未知的匀加速直线运动模型应用于基于地面坐标系下的运动轨迹重建,给出了一种更为精确的运动轨迹重建模型。假定在弹目交会期间,导弹和目标在笛卡儿坐标系的各个方向上分别作匀加速直线运动,建立该情况下的数学模型,将原始数据转换为弹目间距离平方的时间函数序列,使脱靶时刻的求解转换为数据的非线性拟合与极值问题。结合基于靶坐标系的脱靶量测量的思想,通过在三维方向上进行数据拟合和内插获得精确的矢量脱靶量。实验表明,本文方法具有很好的精度和稳定性,可以在实际应用中提供有效数据。

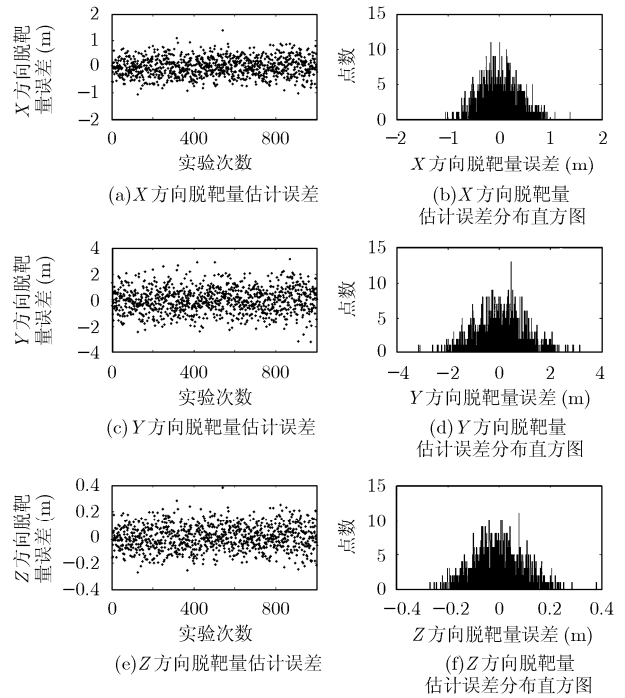


图3 矢量脱靶量误差分布

### 参考文献

- [1] 魏国华, 吴嗣亮, 王菊, 毛二可. 脱靶量测量技术综述[J]. 系统工程与电子技术. 2004, 26(6): 768-772.
- [2] Hoffman J R and Mahler R P S. Multitarget miss distance via optimal assignment. *IEEE Trans. on Man and Cybernetics, Part A*, 2004, 34(3): 327-336.
- [3] AD-A089487. data reduction and analysis techniques for Miss Distance Determination (MDD) and scoring systems[R]. Sep 1980.
- [4] 单月晖, 楼生强, 皇甫堪. 匀速直线运动目标脱靶量测量方法[J]. 国防科技大学学报, 2001, 23(5): 5-8.
- [5] 卢川, 王展. 多频连续波测量雷达脱靶量的研究[J]. 制导与引信, 2004, 25(1): 47-50.
- [6] Bradley L, Whiteman Don, and Mills T. Miss distance vector scoring system[P]. United States Patent: 5614910, Mar 1997.
- [7] Wang Ju and Wu Si-liang. New method for extraction of Doppler frequency in scalar miss distance measurement system. *Proc. of SPIE*, 2005, 5637: 249-256.
- [8] 吴嗣亮, 毛二可. 匀加速直线运动目标脱靶量测量方法. 电子学报, 2000, 28(3): 99-100.
- [9] Farina A, Studer F A. 匡永胜译. 雷达数据处理. 国防工业出版社 1988: 74-85.
- [10] 王菊, 吴嗣亮. 基于目标运动轨迹提取的矢量脱靶量测量方法[J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(2): 164-168.
- [11] Kay Steven M. 罗鹏飞等译. 统计信号处理基础——估计与检测理论. 北京 电子工业出版社. 2003: 179-214.

李昭慧: 女, 1979年生, 助理工程师, 主要从事雷达信号处理方面的研究工作。

徐海霞: 女, 1961年生, 研究员, 一直致力于数字信号处理系统设计与应用方面的研究工作。