

## 基于四阶累积量的稳健的通信信号盲分离算法

付卫红<sup>①</sup> 杨小牛<sup>②</sup> 刘乃安<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(西安电子科技大学 ISN 国家重点实验室 西安 710071)

<sup>②</sup>(通信系统信息控制技术国家级重点实验室 嘉兴 314033)

**摘要:** 该文针对有噪环境中的通信信号盲分离问题, 提出了一种在噪声环境下性能良好的盲分离算法, 该算法将稳健的白化算法与四阶累积量矩阵的联合对角化相结合。仿真结果表明, 该算法分离性能比一般的近似联合对角化(JAD)算法有很大改善, 干信比可降低近 10dB, 而算法的运算量没有太多增加。

**关键词:** 通信信号; 盲源分离; 四阶累积量; 稳健; 联合近似对角化

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)08-1853-04

## Robust Algorithm for Communication Signal Blind Separation Fourth-Order-Cumulant-Based

Fu Wei-hong<sup>①</sup> Yang Xiao-niu<sup>②</sup> Liu Nai-an<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(State Key Lab. of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China)

<sup>②</sup>(National Laboratory of Information Control Technology for Communication System, Jiaxing 314033, China)

**Abstract:** Aiming at the problem of communication signal blind separation in the noisy circumstance, a Blind Source Separation(BSS)algorithm in the case of noise is presented which combined the robust whitening algorithm and Joint Approximate Diagonalization (JAD) of the fourth order cumulant matrix and has good separation performance. Simulation results show that the separation performance of the algorithm proposed in the paper is greatly improved upon the normal fourth order cumulant matrix JAD algorithm, and the Interference-Signal-Ratio (ISR) can be decreased 10dB without increasing much too computation quantity.

**Key words:** Communication signal; Blind Source Separation(BSS); Fourth order cumulant; Robust; Joint Approximate Diagonalization(JAD)

### 1 引言

在通信侦察中, 首先需要采用盲源分离(BSS)技术对接收到的多个信号进行分离, 估计出源信号波形, 然后进行后续的处理。BSS 技术在语音信号<sup>[1-3]</sup>、生物医学信号<sup>[4,5]</sup>、以及通信信号处理中都有广泛的应用。目前对 BSS 的研究大部分都集中在实值信号分离<sup>[6]</sup>, 而且为了简化问题, 也都假设噪声很小(信噪比很高)而不予考虑。但是在通信信号处理领域, 处理的往往是信号的解析形式, 即复值信号, 而且噪声往往也不可忽略。鉴于此, 本文将提出一种有噪环境下的可同时适用于实值和复值信号的盲源分离算法。由于实值信号可以认为是复值信号的特殊情况, 因此本文只考虑复值信号的情形。

### 2 系统模型

假设从  $n$  个天线观察到的信号向量为  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ ,  $m$  个信号源发射的信号向量为  $\mathbf{s}(t) =$

$[s_1(t) \ s_2(t) \ \cdots \ s_m(t)]^T$ , 其中  $x_i(t)$  表示第  $i(i=1, 2, \dots, n)$  个接收天线在  $t$  时刻观察到的信号值, 而  $s_i(t)$  则表示第  $i(i=1, 2, \dots, m)$  个信号源在  $t$  时刻发射的信号值。并且假设各个信号源  $s_i(t) (i=1, 2, \dots, m)$  之间相互统计独立, 统计独立是 ICA 的前提条件。设混合矩阵为  $\mathbf{H} \in C^{n \times m} (n \geq m)$ , 则  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}\mathbf{s}(t) + \mathbf{v}(t)$ , 其中  $\mathbf{v}(t)$  是复高斯白噪声向量。不失一般性, 我们还假设源信号具有单位方差, 即  $E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}(t)^H] = \mathbf{I}$ 。

BSS 的任务就是在只知道观察信号矢量的前提下, 寻找一个分离矩阵  $\mathbf{W} \in C^{m \times n}$ , 使得  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{H}\mathbf{s}(t) + \mathbf{W}(t)\mathbf{v}(t)$  是  $\mathbf{s}(t)$  的一个估计。本文研究的是信号线性混合时的情形, 因此为了表述方便, 后面将省略参数  $t$ 。

在对信号进行分离之前, 往往需要对观察信号  $\mathbf{x}$  进行白化预处理, 然后对白化后的信号  $\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{x}$  进行盲分离, 其中  $\mathbf{B}$  为白化矩阵。

### 3 信号的白化预处理

设  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$ , 对  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$  做特征值分解  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \mathbf{U} \times$

$D \times U^H$ , 其中  $U = [U_s \ U_v]$ ,  $D = \begin{bmatrix} D_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D_v \end{bmatrix}$ , 而  $U_s = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ ,  $U_v = [u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_n]$ ,  $D_s = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ,  $D_v = \text{diag}(\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_n)$ ,  $\mathbf{O}$  是元素都为 0 的矩阵,  $u_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是  $R_{xx}$  的特征向量,  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是  $R_{xx}$  的特征值。

在无噪声即  $x=Hs$  时,  $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_n = 0$ , 即  $D_v = \mathbf{O}$ 。此时白化矩阵可取为

$$B = D_s^{-1/2} \times U_s^H \tag{1}$$

则对于白化信号  $z=Bx \in C^{m \times 1}$  有:

$$E[zz^H] = E[Bxx^H B^H] = D_s^{-1/2} U_s^H U D U^H U_s D_s^{-1/2} = I \tag{2}$$

又  $z=Bx=BHs=Vs$ , 所以  $E[zz^H]=E[Vss^H V^H]=VE[ss^H] \cdot V^H=VV^H=I$ , 即  $V=BH \in C^{m \times m}$  是正交矩阵。因此此时只要估计出正交矩阵  $V$ , 则源信号的估计为

$$\hat{s} = V^{-1}z = V^H z \tag{3}$$

正如前文所述, 一般情况下都存在噪声的污染, 即  $x=Hs+v$ 。这时如果仍采用式(1)表示的白化矩阵, 则获得的  $V$  将不满足正交矩阵的条件。

**定理 1** 当有噪声时, 如果白化矩阵  $B=(D_s - \sigma^2 I_m)^{-1/2} \times U_s^H$ , 则  $V=BH$  为正交矩阵。其中  $D_s$ 、 $U_s$  的定义同上,  $\sigma^2$  是噪声功率或协方差, 即  $E(vv^H)=\sigma^2 I_n$ 。这里噪声功率  $\sigma^2$  可以通过求  $n-m$  个小特征值的平均来估计得到。

**证明** 当有噪声时,  $\lambda_{m+1}=\lambda_{m+2}=\dots=\lambda_n=\sigma^2$ , 即  $D_v = \sigma^2 I_{n-m+1}$ 。而由

$$B = (D_s - \sigma^2 I_m)^{-1/2} \times U_s^H \tag{4}$$

则  $z=Bx=BHs+Bv=\tilde{z}+\tilde{v}$ , 其中  $\tilde{z}=BHs=Vs$ ,  $\tilde{v}=Bv$  仍为高斯白噪声。

$$E(zz^H)=BE(xx^H)B^H=(D_s - \sigma^2 I_m)^{-1/2} \cdot U_s^H U D U^H U_s (D_s - \sigma^2 I_m)^{-1/2} \tag{5}$$

经过简单的数学推导后有

$$E(zz^H) = (D_s - \sigma^2 I_m)^{-1/2} D_s (D_s - \sigma^2 I_m)^{-1/2} \tag{6}$$

另外,  $E[\tilde{z}\tilde{z}^H]=E[(z - Bv)(z - Bv)^H]$

$$\begin{aligned} &= E[zz^H] - E[Bvz^H] - E[z(Bv)^H] + E[Bvv^H B^H] \\ &= E[zz^H] - E[Bv(Vs+Bv)^H] - E[(Vs+Bv) \cdot (Bv)^H] + E[Bvv^H B^H] \\ &= E[zz^H] - BE[vv^H]B^H \\ &= E[zz^H] - \sigma^2 BB^H \end{aligned} \tag{7}$$

由式(4)和式(6)可得

$$E[\tilde{z}\tilde{z}^H] = (D_s - \sigma^2 I_m)^{-1/2} D_s (D_s - \sigma^2 I_m)^{-1/2} - \sigma^2 (D_s - \sigma^2 I_m)^{-1} \tag{8}$$

因为  $D_s$  是对角矩阵, 所以由式(8)有  $E[\tilde{z}\tilde{z}^H]=I$ , 又由  $\tilde{z}=BHs=Vs$  可知此时  $V$  也为正交矩阵, 定理得证。

由定理 1 知只要估计出正交矩阵  $V$ , 则可用式(3)估计出源信号。采用式(4)所示的白化矩阵对观察信号  $x$  进行白化的算法, 我们称之为“稳健的白化算法”, 而采用式(1)作为白化矩阵的算法这里称之为“普通白化算法”。可以看出白化后的信号  $z$  的维数从  $n$  降到  $m$ 。

### 4 信号的累积量矩阵

信号矢量  $z$  的四阶累积量定义为<sup>[7]</sup>:  $Q_z(i, j, k, l) = \text{cum}(z_i, z_j^*, z_k, z_l^*)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , 另外, 对于任意一个  $n \times n$  的矩阵  $M$ , 定义一个与之相关的累积量矩阵:

$$N=Q_Z(M) \Leftrightarrow n_{ij} = \sum_{k,l=1}^n Q_z(i, j, k, l) m_{lk} \tag{9}$$

由第 2 节可知  $z=\tilde{z}+\tilde{v}$ , 则

$$\begin{aligned} \text{cum}(z_i, z_j^*, z_k, z_l^*) &= \text{cum} \left( \sum_{p=1}^n V_{i,p} s_p + \tilde{v}_i, \sum_{p=1}^n V_{j,p}^* s_p^* \right. \\ &\quad \left. + \tilde{v}_j^*, \sum_{p=1}^n V_{k,p} s_p + \tilde{v}_k, \sum_{p=1}^n V_{l,p}^* s_p^* + \tilde{v}_l^* \right) \end{aligned} \tag{10}$$

根据累积量的性质及高斯白噪声的四阶累积量为 0 这一特性, 有:

$$\begin{aligned} \text{cum}(z_i, z_j^*, z_k, z_l^*) &= \sum_{p=1}^n \text{cum}(V_{i,p} s_p, V_{j,p}^* s_p^*, V_{k,p} s_p, V_{l,p}^* s_p^*) \\ &\quad + \text{cum}(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j^*, \tilde{v}_k, \tilde{v}_l^*) \\ &= \sum_{p=1}^n V_{ip} V_{jp}^* V_{kp} V_{lp}^* \text{cum}(s_p, s_p^*, s_p, s_p^*) \end{aligned} \tag{11}$$

令  $k_p = \text{cum}(s_p, s_p^*, s_p, s_p^*)$ , 则由式(11)可知

$$\begin{aligned} n_{ij} &= \sum_{k,l=1}^n \left\{ \sum_{p=1}^n k_p V_{ip} V_{jp}^* V_{kp} V_{lp}^* \right\} m_{lk} \\ &= \sum_{p=1}^n \left\{ k_p \sum_{k,l=1}^n [V_{k,p} V_{l,p}^* m_{lk}] [V_{ip} V_{jp}^*] \right\} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\text{故 } Q_Z(M) = \sum_{p=1}^n k_p (u_p^H M u_p) u_p u_p^H = V \Lambda_M V^H \quad \forall M \tag{13}$$

其中  $u_p$  是正交矩阵  $V$  的第  $p$  列,  $\Lambda_M = \text{diag}(k_1 u_1^H M u_1, k_2 u_2^H M u_2, \dots, k_n u_n^H M u_n)$ 。由式(13)可知只要找到一个正交矩阵  $\hat{V}$ , 使得矩阵  $\hat{V}^H Q_Z(M) \hat{V}$  对任意的  $M$  都为对角矩阵, 则这时  $\hat{V}$  就是  $V$  的估计。到此正交矩阵  $V$  的估计问题就转换为对矩阵集合  $Q_Z(M_i) (i = 1, 2, \dots)$  的联合对角化问题, 这里  $M_i (i = 1, 2, \dots)$  是选取的多个矩阵。

### 5 $M_i$ 的选择

**定理 2** 对存在四阶累积量的  $n$  维的复随机向量  $z$ , 存在  $n^2$  个数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^2}$  和  $n^2$  个矩阵  $M_1, M_2, \dots, M_{n^2}$ , 满足  $Q_Z(M_i) = \lambda_i M_i$ 。

**证明** 设  $(\tilde{Q})_{ab} = \text{cum}(z_i, z_j^*, z_k, z_l^*)$ , 其中  $a = i + (j-1)n$ ,  $b = l + (k-1)n$ , 同时定义两个操作符  $\text{vec}(\cdot)$  和  $\text{vec}^{-1}(\cdot)$ , 即  $\tilde{m}_i = \text{vec}(M_i)$  表示将矩阵  $M_i \in C^{n \times n}$  按列排成的  $n^2 \times 1$

的列向量, 而  $\text{vec}^{-1}(\cdot)$  则表示  $\text{vec}(\cdot)$  的逆操作。

由上述定义以及累积量矩阵的定义式(9)可知, 如果  $\tilde{q}_z(M_i) = \text{vec}[Q_z(M_i)]$ ,  $\tilde{m}_i = \text{vec}(M_i)$ , 则  $\tilde{q}_z(M_i) = \tilde{Q}\tilde{m}_i$ 。由式(13)不难看出  $\tilde{Q}$  是  $n^2 \times n^2$  的 Hermit 矩阵, 因此对  $\tilde{Q}$  进行特征值分解有:  $\tilde{Q} = \tilde{U}\tilde{D}\tilde{U}^H$ , 其中  $\tilde{U} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{n^2}]$  是由  $\tilde{Q}$  的特征向量组成的矩阵,  $\tilde{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^2})$  是由其特征值组成的实对角矩阵。则有

$$\tilde{Q}\tilde{u}_i = \lambda_i\tilde{u}_i, (i = 1, 2, \dots, n^2) \quad (14)$$

如果  $\tilde{m}_i = \tilde{u}_i$ , 即  $M_i = \text{vec}^{-1}(\tilde{m}_i) = \text{vec}^{-1}(\tilde{u}_i)$ , 则  $\tilde{q}_z(M_i) = \tilde{Q}\tilde{m}_i = \lambda_i\tilde{u}_i$ , 则

$$\begin{aligned} Q_z(M_i) &= \text{vec}^{-1}(\tilde{q}_z(M_i)) = \text{vec}^{-1}(\lambda_i\tilde{u}_i) \\ &= \lambda_i\text{vec}^{-1}(\tilde{u}_i) = \lambda_i M_i \end{aligned} \quad (15)$$

定理 2 得证。

由定理 2 可知, 可以选矩阵  $\tilde{Q}$  的  $n$  个最大特征值  $\lambda_i$  对应的  $n^2 \times 1$  个特征向量  $\tilde{u}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 对应的矩阵  $\text{vec}^{-1}(\tilde{u}_i)$  作为  $M_i$ , 则只要对  $n$  个矩阵  $\lambda_i\text{vec}^{-1}(\tilde{u}_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 做联合近似对角化<sup>[8]</sup>, 就可以求得  $V$  的估计  $\hat{V}$ 。

## 6 稳健的通信信号盲分离算法

由前面几节的论述, 现将稳健的通信信号盲分离算法总

$$H = \begin{bmatrix} -0.2612 & -0.9653i & 0.2143 & -0.9768i & 0.8653 & -0.5013i & 0.8584 & +0.5130i \\ -0.6290 & -0.7774i & -0.9081 & -0.4187i & -0.9553 & -0.2957i & -0.7213 & -0.6926i \\ 0.9147 & -0.4041i & 0.2143 & -0.9768i & -0.6784 & -0.7347i & -0.9745 & -0.2244i \\ -0.2612 & +0.9653i & 0.2143 & +0.9768i & 0.8653 & +0.5013i & 0.8584 & -0.5130i \\ -0.6290 & +0.7774i & -0.9081 & +0.4187i & -0.9553 & +0.2957i & -0.7213 & +0.6926i \\ 0.9147 & +0.4041i & 0.2143 & +0.9768i & -0.6784 & +0.7347i & -0.9745 & +0.2244i \end{bmatrix}$$

本文采用干信比(ISR)来衡量分离算法的分离效果, ISR 定义如下:

$$|g_{i,k}|^2 = \max\{|g_{i,1}|^2, |g_{i,2}|^2, \dots, |g_{i,m}|^2\} \quad (16)$$

$$c_i = \frac{1}{|g_{i,k}|^2} \times \left[ \sum_{1 \leq j \neq k \leq m} |g_{i,j}|^2 \right] \quad (17)$$

$$\text{ISR}(i) = 10 \times \lg(c_i) \quad (18)$$

$$\text{ISR} = \frac{1}{m} \times \sum_{i=1}^m \text{ISR}(i) \quad (19)$$

其中  $G = \hat{V}^H B A \in C^{m \times m}$  是系统的全局矩阵。

首先在信噪比为 18dB 时, 分别采用一般的四阶累积量矩阵的联合对角化算法(即采用普通的白化算法进行白化预处理, 简称“JAD”)以及本文中提出的稳健的盲分离算法(简称“稳健的 BSS”)对源信号进行分离。图 1 中给出了不同迭代次数下两种算法的干信比。从图 1 中可以看出, 算法收敛后本文中给出的稳健的 BSS 算法的 ISR 比 JAD 的要低 9.2dB, 而需要的迭代次数却没有增加很多, 即没有增加太多的额外开销。

为了研究不同信噪比下两种算法的性能, 我们在不同信

结如下:

第 1 步 对观察信号  $x$  按第 2 节的方法作稳健的预白化处理, 白化矩阵为  $B$ , 白化后的信号  $z = Bx$ 。

第 2 步 对  $z$  求四阶累积量, 并按照式(14)的规则映射为  $n^2 \times n^2$  的矩阵  $\tilde{Q}$ 。

第 3 步 对  $\tilde{Q}$  进行特征值分解, 获得  $\tilde{Q}$  的  $n$  个最大的特征值  $\tilde{d}_i$  以及对应的特征向量  $\tilde{u}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

第 4 步 根据式(15), 求得  $n$  个矩阵  $Q_z(M_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 然后对这  $n$  个矩阵进行联合对角化<sup>[8]</sup>, 求得正交矩阵  $\hat{V}$ 。

第 5 步 估计源信号  $\hat{s} = \hat{V}^{-1}z = \hat{V}^H Bx$ , 即分离矩阵  $W = \hat{V}^H B$ 。

## 7 仿真实验

假设有 4 个源信号, 他们分别是: 载频为 610kHz 的 2ASK 信号, 载频为 690kHz 的 4FSK 信号, 载频为 770kHz 的 SPSK 信号以及载频为 790kHz 的 chirp 信号。所加噪声是高斯白噪声。4 个源信号被一个 6 阵元的均匀圆阵接收。并且假设 4 个源信号的入射角度分别为  $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$  和  $100^\circ$ , 则此时的混合矩阵为

噪比下进行仿真。图 2 是经过多次蒙特卡洛仿真后, 给出的在算法收敛后不同信噪比下两种算法的 ISR 比较。从图 2 可知, 在有噪环境下, 本文中的算法比一般的 JAD 算法分离效果好很多, ISR 有时可降低近 10dB, 特别是在低信噪比条件下, 其性能更优。

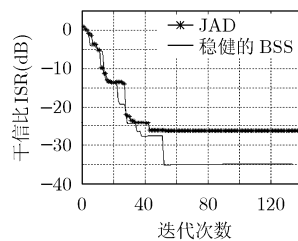


图 1 信噪比为 18dB 时, 两种算法的性能比较

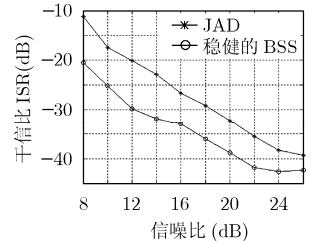


图 2 不同信噪比时, 不同算法分离性能比较

## 8 结束语

本文针对有噪环境中的通信信号盲分离问题, 提出了一种在噪声环境下性能良好的盲分离算法。仿真结果表明, 该

算法分离性能比一般的 JAD 算法有很大改善, 干信比可降低近 10dB, 而对系统的额外开销没有太多增加。另外, 从推导中可以看出, 本文中的算法还可以适用于实值和复值信号, 因此该算法在通信侦察中将会有很好的应用前景。

### 参考文献

- [1] 何培宇, 殷斌, Sommen P C W. 一种有效的语音盲信号分离简化混合模型. 电子学报, 2002, 30(10): 1438-1441.  
He Pei-yu, Yin Binm, and Sommen P C W. An effective simplified mixing model in audio blind signal separation. *Acta Electronica Sinica*, 2002, 30(10): 1438-1441.
- [2] 张玲, 何培宇, 刘开文. 关于噪声环境中语音信号盲分离的研究. 四川大学学报(自然科学版) 2004, 41(1): 97-100.  
Zhang Ling, He Pei-yu and Liu Kai-wen. The study of blind speech signal separation in noisy environment. *Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)*, 2004, 41(1): 97-100.
- [3] 苏野平, 何量, 杨荣震等. 一种改进的基于高阶累积量的语音盲分离算法. 电子学报, 2002, 30(7): 956-958.  
Su Ye-ping, He Liang, and Yang Rong-zhen, *et al.* An improved higher order cumulants based blind speech separation method. *Acta Electronica Sinica*, 2002, 30(7): 956-958.
- [4] 姚毅, 贾金玲, 姚娅川. 盲分离技术在识别生物信号中的应用. 仪器仪表学报, 2004, 25(4): 155-156.  
Yao Yi, Jia Jin-ling, and Yao Ya-chuan. Application of Blind Source Separation Technique in Identification of Creature Signal. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2004, 25(4): 155-156.
- [5] 傅彦, 周俊临. 基于无监督学习的盲信号源分离技术研究. 电子科技大学学报, 2004, 33(1): 63-66.  
Fu Yan and Zhou Jun-lin. Research of blind source separation technology which based on unsupervised learning. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 2004, 33(1): 63-66.
- [6] Mitsuru K, Kiyotaka K, and Yujiro I. Robust super-exponential methods for deflationary blind source separation of instantaneous mixtures. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(5): 1933-1937.
- [7] cardoso J F and Souloumiac A. Blind beamforming for non-gaussian signals. *IEE Proc. -F*, 1993, 140(6): 362-370.
- [8] Cardoso J F and Souloumiac A. Jacobi angles for simultaneous diagonalization. *SIAM J. Matrix Anal. Appli.* 1996, 17(1): 161-164.
- 付卫红: 女, 1979年生, 讲师, 博士生, 研究方向为盲信号处理、无线通信。
- 杨小牛: 男, 1961年生, 研究员, 博士生导师, 研究方向为电子对抗、软件无线电。
- 刘乃安: 男, 1966年生, 教授, 研究方向为无线通信、无线局域网。