

## 基于 Shilnikov 定理构造分段线性混沌系统

陈希有<sup>①</sup> 李冠林<sup>①②</sup>

<sup>①</sup>(大连理工大学电气工程与应用电子技术系 大连 116023)

<sup>②</sup>(哈尔滨工业大学电气工程系 哈尔滨 150001)

**摘要:** 该文基于异宿轨道 Shilnikov 定理, 构造了一类分段线性混沌系统。这类混沌系统具有至少两个平衡点, 且在各个平衡点处具有相同的雅戈比矩阵。通过改变系统的平衡点及相应转换平面, 可以得到这类混沌系统的其他形式。理论研究和实验证明了该方法的有效性。

**关键词:** 混沌系统; 分段线性; Shilnikov 定理; 混沌吸引子

**中图分类号:** TP271;O415.5

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2008)08-1932-04

## Synthesize Piecewise Linear Chaotic System with Shilnikov Theorem

Chen Xi-you<sup>①</sup> Li Guan-lin<sup>①②</sup>

<sup>①</sup>(Department of Electrical and Electronics Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

<sup>②</sup>(Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** According to the heteroclinic shilnikov theorem, a kind of piecewise linear chaotic system is presented in this paper. These systems have at least two equilibriums and at each equilibrium they have the same Jacobian. Changing the equilibriums and the separating planes, the other forms of these systems can be got. Theoretical analysis and experimental results confirm the method is effective.

**Key words:** Chaotic system; Piecewise linear; Shilnikov theorem; Chaotic attractor

### 1 引言

自上世纪 60 年代 Lorenz 系统被发现以来, 人们通过各种数值仿真和实验相继发现了许多新颖的混沌系统<sup>[1-3]</sup>。这些系统的提出, 一方面有利于理解非线性动力系统的复杂行为, 另一方面也为混沌在信息处理、保密通讯等工程技术领域内的应用提供了支持, 具有十分重要的意义。

在各种混沌系统中, 分段线性混沌系统是比较特殊的, 它的电路实现相对容易并且理论分析相对简单。研究表明, 利用分段线性函数可以比较容易的产生各种混沌吸引子<sup>[4,5]</sup>。另外也有一些分段线性混沌系统是利用状态反馈控制和延时控制产生<sup>[6-8]</sup>。

尽管目前已经有很多混沌系统被提出, 但如何根据实际需要来构造所需的混沌系统仍然是十分值得研究的课题。构造混沌系统必须深入理解混沌产生的机制, 而 Shilnikov 定理正是判断三维系统是否存在混沌现象的重要理论依据。文献[9,10]利用 Shilnikov 定理分别对蔡氏电路和分段线性 Lorenz 系统进行分析, 证明了这些系统中存在 Smale 马蹄混沌。由于 Shilnikov 定理揭示了混沌产生的机制, 因此不仅可以用于证明系统中是否存在混沌现象, 同时也可以作为构造混沌系统的依据<sup>[11]</sup>。

本文基于 Shilnikov 定理, 提出了一类分段线性混沌系

统的构造方法。这类系统含有两个或者两个以上的平衡点, 并且在平衡点处具有相同的特征矩阵。通过分析平衡点处的特征值及其特征向量, 确定平衡点附近的稳定子空间和不稳定子空间, 并在此基础上给出相应的转换平面, 得到系统方程。改变系统的平衡点及相应的转化平面, 可以得到此类混沌系统的其他形式。最后文章给出了这类混沌系统的电路实现。

### 2 Shilnikov 定理

Shilnikov 定理是研究连续时间自治混沌系统的有效工具<sup>[12]</sup>, 其中包含对同宿轨道和异宿轨道两种情况的阐述。

考察一个三维自治动力系统:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x), \quad t \in R, \quad x \in R^3 \quad (1)$$

其中  $\xi: R^3 \rightarrow R^3$  属于  $C^r (r \geq 2)$ , 并且  $x_e \in R^3$  是系统的一个平衡点,  $\xi(x_e) = 0$ 。如果系统在  $x_e$  点的雅戈比矩阵  $J = D\xi(x_e)$  具有如下形式的特征值:  $\gamma, \sigma \pm i\omega$ , 且  $\sigma\gamma < 0, \omega \neq 0$ , 其中,  $\gamma, \sigma, \omega$  均为实数, 那么称该平衡点  $x_e$  为双曲鞍焦点。

**定理 1** (同宿轨道 Shilnikov 定理<sup>[12]</sup>): 给定如式(1)所示的三阶自治系统, 假定满足以下条件: (1)平衡点  $x_e$  为鞍焦点, 并且满足如下 Shilnikov 不等式,  $|\gamma| > |\sigma| > 0$ ; (2)存在通过平衡点  $x_e$  的一条同宿轨道  $H$ 。那么, 在系统式(1)及其相应的扰动系统中存在 Smale 马蹄混沌。

**定理 2** (异宿轨道 Shilnikov 定理<sup>[12]</sup>): 给定如式(1)所示的三阶自治系统, 令  $x_{e1}$  和  $x_{e2}$  分别为系统式(1)的两个不同的平衡点, 假定满足以下条件: (1)  $x_{e1}$  和  $x_{e2}$  均为鞍焦点, 并且满足如下 Shilnikov 不等式,  $|\gamma_i| > |\sigma_i| > 0$ , ( $i = 1, 2$ ), 同时满足  $\sigma_1\sigma_2 > 0$  或者  $\gamma_1\gamma_2 > 0$ ; (2) 存在连接  $x_{e1}$  和  $x_{e2}$  的异宿环 (heteroclinic loop)  $H_i$ , 它是由两个异宿轨道  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ) 构成的。那么, 式(1)所示系统及其扰动系统存在 Smale 马蹄混沌。

上述 Shilnikov 定理是分析连续时间混沌系统的有效工具。在应用该定理进行分析时, 困难的是如何找到同宿轨道和异宿轨道。

### 3 构造混沌系统

本文基于 Shilnikov 定理, 通过寻找异宿轨道, 提出了一类分段线性混沌系统。

在构造混沌系统过程中, 首先给定该系统的雅各比矩阵和平衡点, 计算其相应的特征值及特征空间, 然后根据不同平衡点的稳定子空间和不稳定子空间的交点适当选择转换平面  $S$ , 使平衡点对称分布在  $S$  平面两侧。根据这种构造方法, 能够确保稳定子空间与平面  $S$  的交点位于不稳定子空间与平面  $S$  的交线上, 从而确保该系统在一定参数下存在异宿轨道。以下将以一个具有特殊特征矩阵的系统为例, 说明混沌系统的构造过程。

三维自治系统在平衡点  $P^+(1, 1, 1)$  和  $P^-(1, 0, 0)$  处的雅各比矩阵如下:

$$J_{\pm} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (2)$$

平衡点处的特征值为  $\gamma, \sigma \pm i\omega$ 。根据 Shilnikov 定理, 令  $\gamma < 0, \sigma > 0, |\sigma/\gamma| < 1$ , 且  $\omega \neq 0$ 。假定  $u_{\pm}, v_{\pm}$  和  $w_{\pm}$  分别为平衡点  $P^{\pm}$  处相应于  $\gamma$  和  $\sigma \pm i\omega$  的特征向量。令  $n_{\pm} = u_{\pm} \times w_{\pm}$ ,  $n_{\pm}$  为  $u_{\pm}$  和  $w_{\pm}$  所构成平面的法向量。特征向量  $u_{\pm}$  及法向量  $n_{\pm}$  分别为:  $(\gamma I - J_{\pm})u_{\pm} = 0, n_{\pm}^T(\gamma I - J_{\pm}) = 0$ 。经过计算得,

$$u_{\pm} = [0, 0, 1]^T, \quad n_{\pm} = [0, 0, 1]^T \quad (3)$$

由式(3)可以确定, 系统在平衡点  $P^{\pm}$  处相应于  $\gamma$  的一维稳定子空间  $E^s(P^{\pm})$  为过平衡点与  $z$  轴平行的直线, 而相应于  $\sigma \pm i\omega$  的二维不稳定子空间  $E^u(P^{\pm})$  为过平衡点与  $z$  轴垂直的平面, 如图 1 所示。  $C = E^s(P^-) \cap E^u(P^+)$ ,  $A = E^s(P^+) \cap E^u(P^-)$ , 过  $A, C$  两点及  $B$  点作转换平面  $S$ , 平面方程为  $x + y + z = 2$ 。  $BC = E^u(P^+) \cap S$ ,  $EF = E^u(P^-) \cap S$ , 显然  $A$  点在交线  $EF$  上,  $C$  点在交线  $BC$  上, 由此可以确定, 在一定参数下存在异宿轨道。因此该系统在参数满足 Shilnikov 不等式的条件下, 存在 Smale 马蹄混沌。

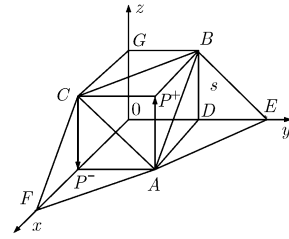


图 1 混沌系统在平衡点处的特征空间示意图

根据上述方法构造的分段线性混沌系统的方程如下所示:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - f_1(x, y, z) \quad (4)$$

其中  $f_1(x, y, z)$  为控制器, 其表达式如下:

$$f_1(x, y, z) = \begin{cases} [\sigma + \omega, \sigma - \omega, \gamma]^T, & x + y + z \geq 2 \\ [\sigma, -\omega, 0]^T, & x + y + z < 2 \end{cases}$$

系统式(4)在控制器  $f_1(x, y, z)$  作用下, 在  $S$  平面两侧围绕两平衡点  $(1, 1, 1)$  和  $(1, 0, 0)$  运动。当参数  $\gamma = -5, \sigma = 1, \omega = 8$  时系统的混沌吸引子如图 2 所示。

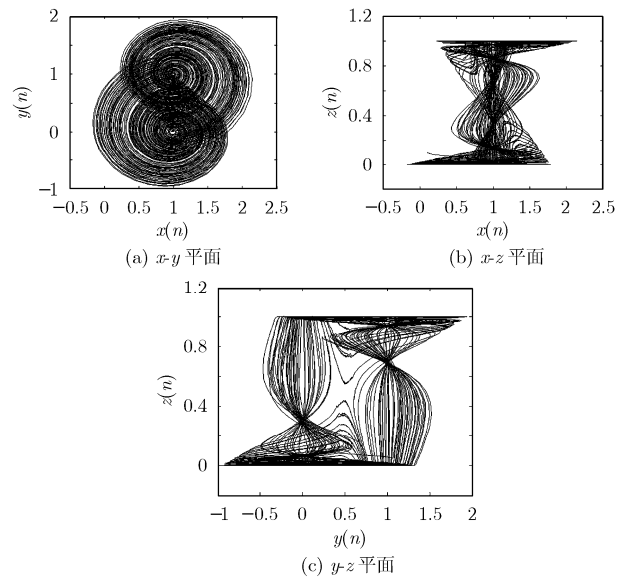


图 2 系统式(4)的相轨迹,  $\gamma = -5, \sigma = 1, \omega = 8$

由式(4)可见, 控制项  $f_1(x, y, z)$  决定了系统的平衡点的位置, 而参数  $\gamma, \sigma$  和  $\omega$  则确定了系统在平衡点处特征值的大小。根据 shilnikov 不等式的要求, 需满足  $\sigma\gamma < 0$  且  $|\sigma/\gamma| < 1$ 。参数  $\gamma < 0$ , 它决定了系统轨迹在稳定子空间方向上向平衡点处的运动状态, 参数  $\sigma$  和  $\omega$  则决定了系统轨迹在不稳定子空间方向的运动情况。

为进一步说明系统式(4)中存在混沌, 给出该系统的一条异宿轨道及相应参数值。由于异宿轨道对参数极为敏感, 当

参数稍有变化时, 就偏离轨道, 因此一般在选取时需要采用累试法近似得到异宿轨道<sup>[10,12]</sup>。取参数  $\gamma = -1.425$ ,  $\sigma = 0.713$ ,  $\omega = 10$ , 在一定初始值下得到系统的异宿轨道如图 3 所示。

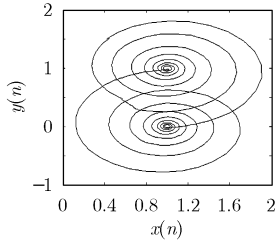


图 3 系统式(4)的一条异宿轨道环,  $\gamma = -1.425$ ,  $\sigma = 0.713$ ,  $\omega = 10$

改变平衡点及相应转换平面, 可以得到这类混沌系统的其他形式。例如, 系统的平衡点为(0,1,1)和(1,0,0), 选择  $y + z = 1$  为相应转换平面, 则系统方程可以由式(5)表示。

$$\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{cases} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - f_2(x, y, z) \quad (5)$$

其中

$$f_2(x, y, z) = \begin{cases} [\omega, \sigma, \gamma]^T, & y + z \geq 1 \\ [\sigma, -\omega, 0]^T, & y + z < 1 \end{cases}$$

对比式(4), 式(5)可以发现, 改变控制项  $f$  能够改变系统的平衡点和相应的转换平面, 但是系统的雅各比矩阵未变, 在平衡点附近的特征值仍保持不变。

#### 4 混沌系统的电路实现

根据系统方程的形式, 这类混沌系统的电路实现可分为两部分, 一部分为主电路, 另一部分为控制电路。当各系统雅各比矩阵形式相同的情况下, 主电路结构一致。系统式(4)和系统式(5)主电路结构相同, 如图 4(a)所示。其中  $x, y, z$  为系统状态变量,  $a, b, c$  为控制系统输出信号,  $\sigma, \omega, \gamma$  为系统参数。系统的控制电路根据  $f$  的不同而各异, 系统式(5)的控制电路示意图如图 4(b)所示。针对系统式(5), 进行电路实验, 得到系统的相轨迹如图 5 所示。

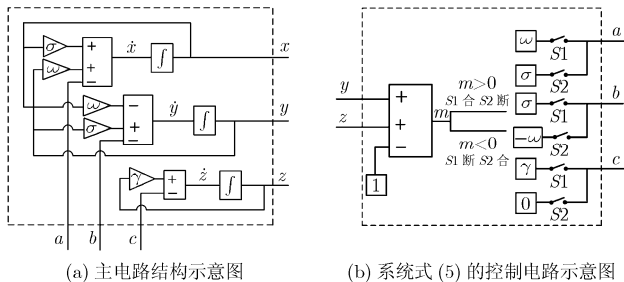


图 4 混沌系统电路结构示意图

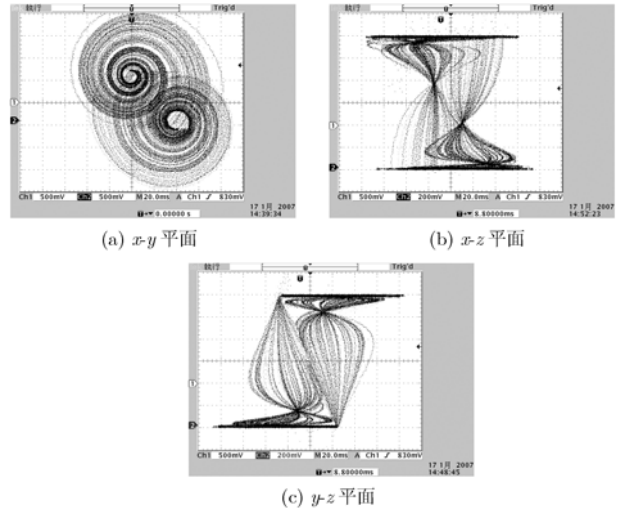


图 5 电路实现系统式(5)的相轨迹

#### 5 结束语

本文基于 Shilnikov 定理, 通过寻找异宿轨道, 提出了一类分段线性混沌系统。这类混沌系统具有两个或两个以上平衡点, 在平衡点处具有相同的雅各比矩阵。研究发现, 改变系统方程中的控制项  $f$ , 能够改变系统的平衡点和相应的转换平面, 但是系统在平衡点处的雅各比矩阵未变, 在平衡点附近的特征值仍保持不变。根据这类混沌系统方程的形式, 将其电路实现分为主电路和控制电路两部分, 使得这类混沌系统的电路实现更加简明而系统化。

#### 参考文献

- [1] Rössler O E. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 1976, 57(5): 397-398.
- [2] Chua L O and Lin G N. Canonical realization of Chua's circuit family. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1990, 37(7): 885-902.
- [3] Chen G and Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1465-1466.
- [4] Elwakil A S and Kennedy M P. A system for chaos generation and its implementation in monolithic form. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems [C]*, Geneva, 2000: 217-220.
- [5] Yalcin M E, Ozoguz S, and Suykens J A K, et al. n-scroll chaos generators: a simple circuit model. *Electronics Letters*, 2001, 37(3): 147-148.
- [6] Wang X F and Chen G R. Generating topologically conjugate chaotic systems via feedback control. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 2003, 50(6): 812-817.
- [7] Takahashi Y and Saito T. A simple Hyperchaos generator based on impulsive switching. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 2004, 51(9): 468-472.

- [8] Wang X F and Chen G R. Chaotification of continuous-time systems via time-delay feedback. *International Conference on Control of Oscillations and Chaos[C]*, St.Petersburg, 2000, 2: 213-216.
- [9] Chua L O, Komuro M, and Matsumoto T. The double scroll family. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1986, 33(11): 1073-1118.
- [10] Li Z, Chen G R, and Halang W A. Homoclinic and heteroclinic orbits in a modified Lorenz system. *Information Sciences*, 2004, 165(3): 235-245.
- [11] Zhou Tinshou, Chen Guanrong, and Yang Qigui. Constructing a new chaotic system based on the Shilnikov criterion. *Chaos Solitons & Fractals*, 2004, 19(9): 985-993.
- [12] Silva C P. Shilnikov's theorem-A tutorial. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1993, 40(10): 675-682.
- 陈希有: 男, 1962 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为电力电子变换技术、电力系统分析等。
- 李冠林: 女, 1979 年生, 博士生, 研究方向为混沌理论及其在电力变换中的应用。