

基于正交变换的相位估计方法性能分析

李滔 李勇

(西北工业大学电子信息学院 西安 710072)

摘要: 论文分析了采用正交变换的相位差算法中量化误差与噪声对估计结果的影响,得到了估计值的分布特性、方差以及偏差的分布规律。分析表明:大多数情况下即使信号中叠加的噪声均值为零,信号相位的估计值也是有偏的,因此不能通过平均的方法完全消除噪声影响。同时估计的偏差和方差是相位真值、信噪比及量化误差三者的函数;相应的仿真实验也支持了理论分析结论。

关键词: 相位估计; 信噪比; 正交变换; 概率密度函数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)08-1857-04

The Analysis of Phase Estimation Algorithm Based on Orthogonal Transformation

Li Tao Li Yong

(School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: This paper discusses the influence of both quantization and noise upon the estimation results in phase estimation algorithm based on orthogonal transformation. The bias, variance and distribution property of estimated values are provided, the theoretical analysis shows that the expectation of the phase estimated is biased in most of the cases even the noise is zero-mean-valued, and the effect could not be removed by averaging. In addition the variance of the estimated result is a function of SNR (Signal-Noise Ratio), quantization and its value. This conclusion is supported by simulations.

Key words: Phase estimation; SNR; Orthogonal transformation; Function of probability density

1 引言

估计相位是信号处理的一项重要研究内容。例如:瞬时频率是被定义为相位的导数;在相位干涉仪测向技术中,通过测量到达位于空间不同位置接收机的信号之间的相位差来换算辐射源方位;而利用相位差变化率的无源定位算法,也需要准确估计出相位差的时间变化规律以保证其精度。因此研究噪声干扰下的相位估计精度就成为有意义的研究课题。

现有的相位以及相位差估计算法各有特点:如相关函数分析方法,利用信号的自相关和互相关函数推导出相位角;正弦波参数方法通过建立线性方程组,求得正弦波参数的最小二乘解,进而估计信号的相位;同时还有改进的相关方法,以及FFT谱分析方法等用来估计相位。

目前考虑噪声对相位估计的影响时,主要有两类做法:文献[1-6]中为分析噪声的影响,通过相位以及相位差估计值的均值与方差两个参数来描述相位差以及方位的估计性能。而在文献中[7-9]为简化分析只考虑高信噪比的情况,近似将噪声等效到信号相位上面。这些做法存在如下的不足:高信噪比只是实际应用中的特例,因此不具有代表性;另外,高

信噪比的概念较模糊,并不能够回答是否存在一个对所有相位值都适合的信噪比门限来应用这个结论;最后,以往的处理方法中被忽略的基本问题是:能否仅依靠均值与方差就足够完整描述估计的性能?

本文的研究是对前人工作的深入和推广。从上述的认识出发,本文讨论了噪声以及量化对估计的影响,并获得了相位估计值的概率密度函数,同时初步掌握不同条件下相位估计精度的变化规律。

2 基于正交变换的相位差测量方法

设被测信号的离散形式为

$$v(n) = A \sin(2\pi f_0 T_s n - \phi) = A \sin\left(\frac{2\pi n}{N} - \phi\right) \quad (1)$$

令采样频率为 $f_s = 1/T_s = Nf_0$, 对信号作正交变换以计算相位 ϕ :

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} v(n) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \\ &= \frac{2}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} A \sin\left(\frac{2\pi n}{N} - \phi\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \\ &= \frac{A}{N_0} \left\{ \sum_{n=0}^{N_0-1} \left[\sin\left(\frac{4\pi n}{N} - \phi\right) \right] + \sum_{n=0}^{N_0-1} -\sin(\phi) \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

当 $N_0 = pN$ 时,

$$\frac{A}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \left[\sin\left(\frac{4\pi n}{N} - \phi\right) \right] = 0$$

因此有结论:

$$a = -A \sin(\phi) \quad (3)$$

$$\text{同理, 可以计算得到 } b = \frac{2}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} v(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right).$$

经化简后有 $b = A \cos(\phi)$ 。通过求反正切的方法估计信号相位:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{a}{b}\right) \quad (4)$$

3 性能分析

3.1 考虑噪声与量化的信号模型

在实际应用中考虑两类噪声的影响, 首先是经A/D变换后信号离散化带来的量化误差, 第二类是信号上叠加的噪声, 通常在大多数情况下, 噪声可看作是高斯分布。因此信号的形式为连续输入经过A/D变换器后与噪声叠加的结果, 同时两类噪声之间相互独立。

设A/D变换器的量化噪声为 $e_1(n)$, 并将其看作是均匀分布的噪声, 当量化间距为 Δ 时, ($\Delta = 2A/(2^m - 1)$), m 为A/D变换器的位数。 $e_1(n)$ 以等概率分布于 $(-\Delta/2, \Delta/2)$ 的区间内。量化噪声均值为0, 而方差为 $\Delta^2/12$; 零均值的高斯白噪声方差为 σ_g^2 。因此得到如下的信号形式:

$$v_x(n) = v(n) + e_g(n) + e_1(n) \quad (5)$$

$v_x(n)$ 是考虑量化噪声 $e_1(n)$, 以及高斯白噪声 $e_g(n)$ 后得到的信号。用 $v_x(n)$ 代替 $v(n)$ 后, 计算参数 a 得到:

$$a_x = \frac{2}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} v_x(n) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = a + a_g + a_1 \quad (6)$$

其中 a_g 、 a_1 分别为高斯噪声以及量化噪声经过变换后的值。

3.2 正交变换后噪声影响分析

由于噪声的影响, 相位的估计值是随机的, 但只有当服从高斯分布时才能根据均值与方差唯一确定其分布特性。因此数字正交变换后, 需要考虑哪些是影响相位估计结果的因素, 这是我们进一步研究的出发点。

根据概率论, 计算参数 a 的过程中, 式(5)中的噪声经过变换服从高斯分布, 其均值为0, 而方差为

$$\sigma_{a_x}^2 = \sigma_{a_g}^2 + \sigma_{a_1}^2 \quad (7)$$

根据式(2)有

$$\sigma_{a_g}^2 = \sigma_g^2/N_0 \quad (8)$$

$$\sigma_{a_1}^2 = \Delta^2/(6N_0) \quad (9)$$

两者分别对应量化噪声与附加的高斯噪声经过变换后的方差。

同理有 $\sigma_{b_x}^2 = \sigma_{b_g}^2 + \sigma_{b_1}^2$, 其中 $\sigma_{a_g}^2 = \sigma_{b_g}^2$, $\sigma_{a_1}^2 = \sigma_{b_1}^2$ 。所以有等式 $\sigma^2 = \sigma_{a_x}^2 = \sigma_{b_x}^2 = \sigma_g^2/N_0 + \Delta^2/(6N_0)$ 。

用 u , v 分别代表叠加在 a , b 上的噪声, 可以证明: 它们是同分布的零均值高斯白噪声, 方差为 σ^2 , 并且相互独立。

3.3 相位估计值的分布特性分析

用下面的公式研究相位估计性能:

$$\phi' = \arctan \frac{A \sin \varphi + v}{A \cos \varphi + u} \quad (10)$$

其中 ϕ' 是相位的估计值, ϕ 为相位的真值。不失一般性可以认为 $0 \leq \phi(t) < \pi/2$, 则可以把上面的表示式改写为

$$\phi'(t) = \arctan \frac{Aq + v}{A\sqrt{1-q^2} + u}$$

计算相位估计值的概率分布函数:

$$\begin{aligned} F(\phi') &= P(\Phi < \phi') \\ &= P\left(\arctan \frac{Aq + v}{A\sqrt{1-q^2} + u} < \phi'\right) \end{aligned} \quad (11)$$

由于在 $-\pi/2 \leq \phi(t) < \pi/2$ 之间, 反正切函数是单调的增函数, 因此可通过变量代换的方法得到:

$$\begin{aligned} F(\phi') &= P\left(\frac{Aq + v}{A\sqrt{1-q^2} + u} < \tan \phi'\right) \\ &= P\left(\frac{q + y}{\sqrt{1-q^2} + x} < \tan \phi'\right) \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)中 $x = u/A$, $y = v/A$, 因此 x, y 分别与 u 、 v 同分布, 是均值为0, 而方差为 $\sigma_1^2 = \sigma^2/A^2$ 的白噪声。

令 $p = \sqrt{1-q^2}$ 。如果 x 与 y 的联合概率分布函数为 $f(x, y)$, 并分别考虑 $p+x \geq 0$ 与 $p+x < 0$ 两种情况以确定积分区间。则可以计算相位估计值的概率分布函数, 有如下结果:

$$\begin{aligned} F(\phi') &= \int_{-\infty}^{-p} \int_{\tan \phi'(x+p)-q}^{\infty} f(x, y) dy dx \\ &\quad + \int_{-p}^{\infty} \int_{\tan \phi'(x+p)-q}^{\infty} f(x, y) dy dx \end{aligned} \quad (13)$$

对得到的概率分布函数求微分可得到信号相位估计值的概率密度函数:

$$\begin{aligned} f(\phi') &= \frac{dF(\phi')}{d\phi'} = \int_{-p}^{\infty} f(x, \tan \phi'(x+p)-q) \frac{(p+x)}{[\cos(\phi')]^2} dx \\ &\quad - \int_{-\infty}^{-p} f(x, \tan \phi'(x+p)-q) \frac{(p+x)}{[\cos(\phi')]^2} dx \end{aligned} \quad (14)$$

前面分析表明: x, y 为独立同分布的高斯白噪声, 则根据式(14), 可以获得下面的结论:

$$\begin{aligned} f(\phi') &= \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} \int_{-p}^{\infty} \exp\left\{-\frac{[x^2 + (\tan \phi'(x+p)-q)]^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\ &\quad \cdot \frac{(p+x)}{[\cos(\phi')]^2} dx - \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{-p} \exp\left\{-\frac{[x^2 + (\tan \phi'(x+p)-q)]^2}{2\sigma_1^2}\right\} \frac{(p+x)}{[\cos(\phi')]^2} dx \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)说明: 概率密度函数与相位本身数值以及信噪比有关, 并具有复杂积分的形式。因此在估计算法中, 可以根据上面理论分析所得到的概率密度函数来了解相位估计的分布形式, 并确定其均值与方差。

4 仿真结果

本文做了相应的仿真以验证理论分析结果, 研究在不同条件下, 信号相位估计值的概率密度函数、偏差、方差与信噪比及相位真值之间的关系, 并且对比理论计算值与实验数据之间的符合程度。

实验 1 主要研究不同条件下相位估计值的概率分布, 实验中采取 1024 级数字量化, 数据长度为 200 点。图 1(a) 中归一化频率 0.05, 信噪比为 -10 dB, 相位真值 60° ; 图 1(b) 归一化频率 0.1, 信噪比为 -15 dB, 相位真值 40° 。图中方块代表仿真测量值, 实线为理论值。实验显示: 由于噪声影响, 相位估计值不再具有高斯的分布特性; 且不是沿相位真值的对称分布, 所以即使平均后的结果也不会完全等于相位真值。

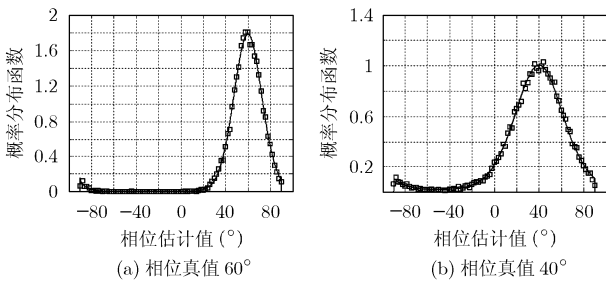


图 1 信号相位估计值的概率分布仿真数值与理论分析结果对比

实验 2 研究了相位估计值的方差与偏差随信噪比的变化规律, 如图 2 所示, 图 2(a)、2(b)表示相位真值为 40° 时的方差与偏差; 图 2(c)、2(d)表示相位真值为 70° 时的方差与偏差;。图中方块代表仿真测量值, 实线为理论值。同样采用 1024 级数字量化, 数据长度为 200 个点, 归一化频率 0.1。当信噪比在 -20dB 到 20dB 之间变化时, 相位估计值的方差与均值的变化规律由图 2 表示。

仿真试验说明: 当相位真值为 40° 时, 信噪比只要超过 -10dB, 相位估计的期望可以收敛于真值; 相位真值为 70° 度时, 信噪比需要超过 -3dB, 估计的期望才能够达到真值。因此如果要进行高信噪比假设下的近似, 对不同的相位真值这个门限是不同的。

实验 3 研究了信噪比一定, 而相位真值不同时进行估计, 所得到结果的均方差与偏差的变化规律。实验采用 1024 级数字量化, 数据长度为 200 个点, 归一化频率 0.1, 信噪比为 5dB, 方块代表仿真测量值, 实线为理论值。

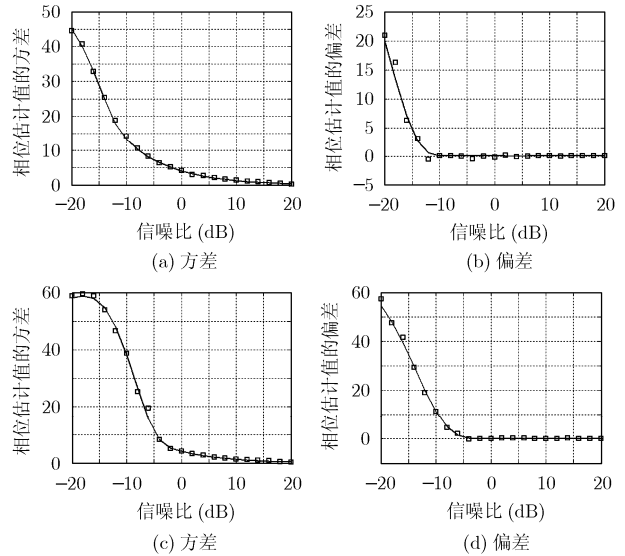


图 2 相位估计值的方差、偏差随信噪比的变化

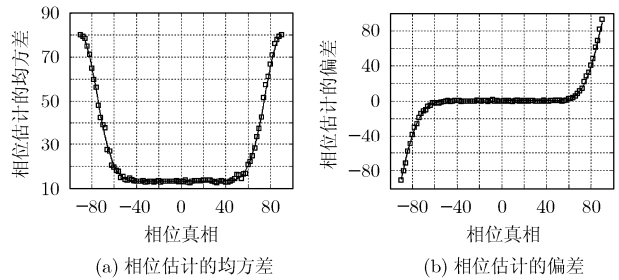


图 3 信号相位估计值的均方差与偏差变化规律

5 结束语

本文分析了利用正交方法的相位差估计算法的性能, 讨论了严格意义下的信号相位估计值的分布特性, 并且获得了其概率分布函数。通过理论分析以及仿真实验对相位差估计算法的性能有了进一步的了解, 为相位估计算法的参数选择提供了一定的参考价值。同时也研究了信号相位真值、信噪比等因素变化对估计值的方差与偏差所产生的影响。得到的结果为需要相位估计算法的各种应用场合提供了理论分析依据, 并且可以用来确定相位估计的置信区间。

参 考 文 献

- [1] Rao P and Taylor F J. Estimation of instantaneous frequency using the discrete Wigner distribution [J]. *IEE, Electronics Letter*, 1990, 26(4): 246-248.
- [2] Stankovic L and Katkovic V. Algorithm for the instantaneous frequency estimation using time-frequency distributions with adaptive window width [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1998, 5(9): 224-227.
- [3] Kwok H K and Jones D L. Improved instantaneous frequency estimation using an adaptive short-time Fourier transform [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2000, 48(10): 2964-2972.

- [4] Kay S. Statistically/computationally efficient frequency estimation [J]. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-88*, New York, 1988, 4: 2292-2295.
- [5] 孙圣和, 吴岩巍. WVD 瞬时频率估计无偏估计研究. *电子学报*, 1996, 24(9): 102-105.
- [6] 宋长宝, 李志刚. 基于数字正交变换的相位差测量方法及误差分析. *电路与系统学报*, 2006, 11(1): 1143-1146.
- [7] Boashash Boualem. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1992, 80(4): 520-568.
- [8] Qu Lunji, Kot A C, and Soon Hwa Lum. Comparative study of some discrete instantaneous frequency estimators [C]. *International Conference on Information Engineering, Proceedings of IEEE Singapore International Conference, Singapore*. 1995: 608-612.
- 李 滔: 男, 1971年生, 副教授, 主要研究方向为信号检测与估计、时频分析、阵列信号处理、DSP系统设计.
- 李 勇: 男, 1962年生, 教授, 从事机载雷达技术、信号处理、多媒体数据压缩、高速实时信号处理系统等方面科研工作.