

基于 Sugeno 补的广义模糊熵阈值分割方法

范九伦^① 赵 凤^②

^①(西安邮电学院信息与控制系 西安 710061)

^②(西安电子科技大学智能信息处理研究所 西安 710071)

摘 要: 鉴于传统的基于模糊熵的图像阈值分割方法对于光照不均匀图像的分割结果很不理想, 该文提出了基于 Sugeno 补的广义模糊熵图像阈值分割方法。首先按照 Sugeno 补函数不动点的变化, 对一幅图像产生 9 个阈值, 然后利用图像分割质量评价指标对这 9 个阈值进行评价, 最后选择使得评价指标最大的阈值作为最优的阈值。与传统的模糊熵阈值分割方法相比, 新方法增加了选择更好的分割结果的机会, 对于光照不均匀的图像能够获得比传统模糊熵方法更好的分割效果。

关键词: 图像分割; 模糊熵; 广义模糊熵; 补函数; 图像质量评价准则

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)08-1865-04

A Generalized Fuzzy Entropy Thresholding Segmentation Method Based on the Sugeno Complement Operator

Fan Jiu-lun^① Zhao Feng^②

^①(Department of Information and Control, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710061, China)

^②(Institute of Intelligent Information Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: For images with bad illumination, the traditional fuzzy entropy thresholding segmentation method can not achieve satisfactory results. In this paper a generalized fuzzy entropy thresholding method based on the Sugeno complement function is presented. Firstly, nine thresholds are obtained for an image based on the variations of the fixed point in the Sugeno complement function. Secondly, the nine thresholds are evaluated by an image segmentation quality evaluation principle. Finally, the threshold with the maximum quality evaluation value among the nine thresholds is chosen as the optimal threshold. Compared with the traditional fuzzy entropy method, new method increases the opportunity of choosing an optimal threshold and obtains better segmentation result for images with bad illumination.

Key words: Image segmentation; Fuzzy entropy; Generalized fuzzy entropy; Complement operator function; Image quality evaluation principle

1 引言

模糊熵描述了一个模糊集的模糊性程度, 是模糊集理论和应用中的一个非常基本的概念^[1]。1972 年, De Luca 和 Termini^[2]模仿信息论中的 Shannon 熵表达式, 首次给出了有限论域上模糊熵的公理化定义及其表达式, 使得人们明确了模糊熵应具有的基本特征以及与信息论中的概率熵的联系与区别。在 De Luca 和 Termini 给出的定义中, 他们使用了 Zadeh^[3]给出的模糊集上的标准交、并和补运算。其中补运算 $c(x) = 1 - x$ 的显著特点是其不动点位于 0.5 处, 这使得模糊集 $A = [0.5]$ (即 $\forall x \in X, \mu_A(x) = 0.5$) 的模糊性最大。从隶属度的含义上说, 这个要求是非常基本和合理的。模糊熵现在已经作为模糊集理论中一个基本工具被广泛应用于众多工程领域中, 例如, 基于模糊熵的图像分割方法^[4-6]是

一种很常用的分割方法。

早在 1982 年印度学者 Pal^[7]就指出, 在实际问题中以隶属度 0.5 作为模糊性最大的基准并非总是合适的, 但这一现象没有引起广大学者的关注。直到 1998 年在处理图像噪声时, Zenzo 等人^[8]才意识到有必要对模糊熵定义中的条件进行改动, 使得对一个模糊集 A , 可以在 $A = [m]$ ($m \in (0,1)$) 时具有最大的模糊性。在这一认识下, 他们给出了广义模糊熵的一种定义, 并借助一种映射方式, 通过传统的模糊熵表达式来构造广义模糊熵公式。尽管 Zenzo 等人对广义模糊熵的定义和应用作了初步的尝试, 但遗憾的是, 他们给出的定义中没有涉及模糊集的补运算, 使得对广义模糊熵的条件约束显得过于宽泛, 没有和传统模糊熵的条件完全对应起来。鉴于此, 本文基于模糊熵的定义和广义补运算, 重新给出更为合理的广义模糊熵定义, 作为一种应用示例, 基于 Sugeno 补给出在图像分割中的应用。实验表明, 基于广义模糊熵的

分割增多了选择更好的分割结果的机会，能够获得比传统模糊熵分割方法更佳的分割效果。

2 模糊熵

在本文中， X 表示有限论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ， X 上的所有模糊集之集记作 $F(X)$ ， X 上的所有分明集之集记作 $P(X)$ 。对于 $A \in F(X)$ ， $\mu_A(x)$ 表示 A 在点 x 处的隶属度， A 的补集记作 A^c ，即 $\forall x \in X, \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$ 。对于模糊集 A 和 B ，交 $A \cap B$ 定义为 $\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ ；并 $A \cup B$ 定义为 $\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ 。模糊集 A 的分明修改(也称为尖锐化) A^* 定义为当 $\mu_A(x) \geq 1/2$ 时， $\mu_{A^*}(x) \geq \mu_A(x)$ ；当 $\mu_A(x) \leq 1/2$ 时， $\mu_{A^*}(x) \leq \mu_A(x)$ 。 $A = [m]$ 表示 $\forall x \in X, \mu_A(x) = m$ 。

为了描述有限论域 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上的一个模糊集的模糊性程度，De Luca和Termini [2]给出了模糊熵的公理化定义：模糊熵 e 是 $F(X)$ 到 $R^+ = [0, +\infty)$ 上的映射，满足以下4条：

- (1) $e(A) = 0$ 当且仅当 $A \in P(X)$;
- (2) $e(A)$ 值最大当且仅当 $A = [1/2]$;
- (3) 若 A^* 是 A 的分明修改，则 $e(A^*) \leq e(A)$;
- (4) $e(A^c) = e(A)$ 。

上述4条刻画了一个模糊集具有的模糊性程度的合理且基本的要求，分明集是没有模糊性的，因此要求分明集的模糊性为0；隶属度为0.5是界限最为模糊的，因此要求其具有模糊性最大的特性；(3)是关于模糊集的隶属值发生变化时对某种序关系的一种自然要求；特别应强调的是第(4)条，意味着在补运算 $c(x) = 1 - x (x \in X)$ 下 A 与 A^c 具有同等的模糊性。第(4)条是直观而合理的，也是体现模糊集特征的一个关键条件。

3 广义模糊熵

在模糊集理论和应用中，使用最广泛的补函数是 Zadeh 提出的基本补运算 $c(x) = 1 - x$ ，它的显著特点是 0.5 是唯一的不动点。作为一种理论探讨，已有学者对于一般的广义补运算进行了研究[0-11]。在这些补函数中，不动点可以是 (0,1) 内的任意一点。广义补运算 $c: [0,1] \rightarrow [0,1]$ 满足以下4条：

- (1) $c(0) = 1, c(1) = 0$;
- (2) 对于 $0 \leq a \leq b \leq 1$ ，有 $c(a) \geq c(b)$;
- (3) c 是连续函数；
- (4) $c(c(x)) = x$ 。

广义补运算 c 具有唯一的不动点 m ，即 $c(m) = m$ 。日本著名学者 Sugeno 曾给出一个补函数[11]：

$$c_\lambda(x) = (1 - x)/(1 + \lambda x) \tag{1}$$

其中 $\lambda \in (-1, +\infty)$ ，当 $\lambda = 0$ 时，Sugeno 补变成基本补运算 $c(x) = 1 - x$ 。 $c_\lambda(x)$ 的不动点为

$$m = \begin{cases} (\sqrt{1 + \lambda} - 1)/\lambda, & \lambda \neq 0 \\ 1/2, & \lambda = 0 \end{cases} \tag{2}$$

作为实际问题的一种反映，Zenzo 等人[8]给出的广义模糊熵定义中舍去了模糊熵定义中的第4条，使得对广义模糊熵的条件约束显得过于宽泛，没有充分体现模糊集具有的特征。下面我们给出有限论域上广义模糊熵的完整定义，新定义与传统模糊熵的定义是完全对应的。对于 $m \in (0,1)$ 和以 m 为唯一不动点的补函数 c_m ，实函数 $e_m: F(X) \rightarrow R^+$ 叫广义模糊熵，如果 e_m 满足以下4条：

- (1) $e_m(A) = 0$ 当且仅当 $A \in P(X)$;
- (2) $e_m(A)$ 值最大当且仅当 $A = [m]$;
- (3) 若 A^* 是 A 的分明修改，则 $e_m(A^*) \leq e_m(A)$ 。这里 A^* 满足：当 $\mu_A(x) \geq m$ 时 $\mu_{A^*}(x) \geq \mu_A(x)$ ；当 $\mu_A(x) \leq m$ 时 $\mu_{A^*}(x) \leq \mu_A(x)$;
- (4) $e(A^{c_m}) = e(A)$ 。

注意到当 $m = 0.5$ 且 $c_{0.5}(x) = 1 - x$ 时，上述的定义即为模糊熵的表述。因此本文的定义是传统模糊熵定义的合理而自然的推广。作为广义模糊熵的一个具体体现，下面给出一个广义模糊熵表达式。

$$e_m(A) = 1 - D_p(A, A^{c_m})/n^{1/p} \tag{3}$$

式中 $p \geq 1$ ， D_p 定义为 $\forall A, B \in F(X) D_p(A, B) = \left(\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p \right)^{1/p}$ ，特别当 $p = 1$ 时， D_p 叫 Hamming 距离，即 $D_1(A, B) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$ 。

4 广义模糊熵在图像分割中的应用

4.1 图像的模糊集表示及隶属函数

设 $Q = [q(x, y)]_{M \times N}$ 表示大小为 $M \times N$ 的图像， $G = \{0, 1, \dots, L - 1\}$ 表示所有灰度的集合。 $q(x, y) \in G$ 是坐标 (x, y) 处像素的灰度值， $\mu_Q(q(x, y))$ 表示 (x, y) 处像素在图像 Q 中具有某种特性的隶属函数。采用模糊集合表示法，图像 Q 可表示为 $Q = \{(q(x, y), \mu_Q(q(x, y)))\}, x = 1, 2, \dots, M, y = 1, 2, \dots, N\}$ ，式中 $0 \leq \mu_Q(q(x, y)) \leq 1$ 。

本文采用如下形式的 S 型函数[12]作为隶属度函数：

$$S(x; a, b, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{(x - a)^2}{(b - a)(d - a)}, & a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{(x - d)^2}{(d - b)(d - a)}, & b \leq x \leq d \\ 1, & x \geq d \end{cases} \tag{4}$$

其中 x 表示图像 Q 的灰度值， a, b, d 是 S 型隶属函数的3个参数，它们决定了 S 型隶属函数的形状。在这个 S 型函数的定义中，参数 b 不局限于是 a, d 的中点，可以是 a, d 之间的任意一点。

4.2 广义模糊熵用于图像分割

基于模糊熵的图像分割中, 通常把模糊熵最大作为阈值的选取准则。S 型隶属函数的形状由 a, b, d 这 3 个参数决定, 所以图像分割的问题变成寻找使得模糊熵取最大值的参数 a, b, d 的确定问题^[6,13]。按式(5)得到最优的 a, b, d 后, 根据隶属度等于 0.5 的灰度值进行分割, 具体表达形式见式(6)。

$$(a^*, b^*, d^*) = \text{Arg} \max_{0 \leq a < b < d \leq L-1} e(a, b, d) \quad (5)$$

$$T^* = t, \text{ iff } \mu_Q(t) = 0.5 \quad (6)$$

当图像的光照不均匀时, 按隶属度取为 0.5 的阈值进行分割的效果是不理想的。因此我们给出基于广义模糊熵的阈值选取方法, 本文采用的补函数为 Sugeno 补, 广义模糊熵公式为式(3), 该方法不局限于按隶属度取为 0.5 进行分割, 它的最优阈值选取在

$$T^* = t, \text{ iff } \mu_Q(t) = m \quad (7)$$

值得注意的是, 把 Sugeno 补代入式(3)后, 该广义模糊熵公式含有参数 λ, 并不直接涉及参数 m。因为 m 是不动点, m 和 λ 的关系可以表示为

$$\lambda = (1 - 2m) / m^2 \quad (8)$$

式(8)把 m ∈ (0,1) 映射到了 λ ∈ (-1, +∞), 把它代入式(1), 可得到 Sugeno 补的另一表达形式

$$c_m(x) = \frac{(1-x)}{1+(1-2m)x/m^2} \quad (9)$$

把式(9)代入广义模糊熵式(3)后, 这时的广义模糊熵公式含有参数 m。

4.3 利用图像质量评价准则确定广义模糊熵的参数 m

广义模糊熵定义中参数 m 选取问题是应用广义模糊熵于图像分割问题最为关键的一步。在本文中, 针对每一幅图像, m 不恒取某一固定值, 而是以步长 0.1 遍历区间 (0,1), 这样会得到 9 个阈值; 然后利用图像分割质量评价指标对这 9 个阈值进行评价, 找出最优的阈值, 相应的 m 即为最终的 m。采用何种质量评价指标, 取决于具体的分割目的, 本文中采用了形状测度评价指标。

对于一个好的分割结果来说, 它的目标的外轮廓应该是光滑的, 形状测度正是用来测量目标的外轮廓的光滑程度的。如以 f_{N(x,y)} 表示像素 (x, y) 的邻域 N(x, y) 的平均灰度, t(x, y) 表示像素 (x, y) 处的梯度, 对图像以 T 为阈值进行分割所得形状测度 SM 可用下式计算^[14]:

$$SM = \frac{1}{C} \left\{ \sum_{(x,y)} \text{Sgn}[f(x,y) - f_{N(x,y)}] t(x,y) \text{Sgn}[f(x,y) - T] \right\} \quad (10)$$

式中 C 为归一化参数, Sgn 表示符号函数。

最优的 m 由下式确定:

$$m^* = \text{Arg} \max SM(m), \quad m = 0.1, 0.2, \dots, 0.9 \quad (11)$$

5 实验结果及分析

在仿真实验中, 本文采用广义模糊熵对 2 幅光照不均匀

的图像进行了分割。实验图像采用 Rice 和 Circuit board 图, 尺寸分别为 256×256 和 161×161, 如图 1 所示。首先, m 以步长 0.1 遍历区间 (0,1), 这样对每一幅图片, 会得到 9 个阈值, 表 1 列出了当 m 分别等于 0.1, 0.2, ..., 0.9 的阈值结果, 当 m = 0.5 时, 这个阈值就是模糊熵方法的阈值结果; 然后计算各个阈值结果的形状测度评价指标值, 在本文的实验中归一化参数 C = 2 × 10⁶。使得指标值最大的阈值就是最终的阈值, 相应的 m 即为最终的 m, 图 2 给出了 2 幅图像的形状测度评价指标随 m 变化的曲线, 其中横轴表示 m 的取值, 纵轴表示形状测度指标值。图 3 和图 4 列出了 2 幅图像模糊熵和广义模糊熵的对比分割结果。

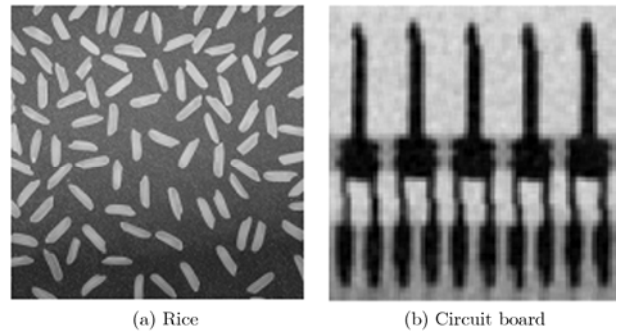


图 1 实验图像

表 1 广义模糊熵的阈值结果

m	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Rice	92	113	104	101	88	101	111	108	152
Circuit board	71	100	122	141	158	173	186	199	153

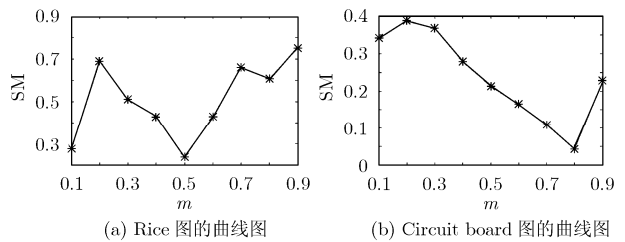


图 2 形状测度评价指标随 m 变化的曲线图

从图 2 (a) 可以看出, 对于 Rice 图, m = 0.9 (阈值为 152) 时具有最大的形状测度评价指标值, 所以最终的 m = 0.9。类似地, 可得 Circuit Board 最终的 m 值为 m = 0.2。从图 3 和图 4 可见, 对于光照不均匀图像, 以 0.5 作为分界线的模糊熵阈值法已经不适用, 而作为可变分割点的广义模糊熵阈值法由于能够适应光照变化, 在合适的地方可以达到较为理想的分割结果。

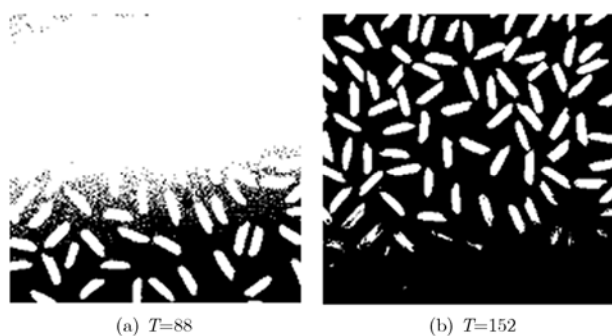


图3 Rice图分割结果



图4 Circuit board图分割结果

6 结束语

本文依据模糊熵和广义补函数，重新定义了广义模糊熵，给出了一个广义模糊熵表达式和在图像阈值分割中的应用，结果表明，对于光照不均匀的图像可以获得比模糊熵更为理想的分割效果。基于广义模糊熵的图像分割方法按隶属度等于 m 对图像进行分割，增多了选择更好的分割结果的机会，获得了优于模糊熵的分割效果。本文所提的方法具有一定的通用性，给定一个广义补函数和相应的广义模糊熵公式，均可照此过程进行。在应用广义模糊熵进行阈值选取时，合理选取广义模糊熵表达式、广义补函数以及参数 m 是关键。本文仅仅给出了示例性说明和实验，可以看到在本文的实验中，对 Circuit board 图获得了较为理想的分割效果，但对 Rice 图的分割结果仍不是很理想，其下部的米粒没有被分割出来，这说明对于这幅图片，采用 Sugeno 补作为补函数可能不太好，也可能是参数 m 遍历区间 $(0,1)$ 的步长 0.1 太大了。作为解决面临问题的一种思路，在下一步的工作中，我们将考虑选用或构造更合适的补函数，并设想利用优化的方法在区间 $(0,1)$ 内确定参数 m 以获得更为理想的分割效果。

参考文献

[1] 范九伦. 模糊熵理论 [M]. 第一版, 西安: 西北大学出版社, 1999: 9-14.

- Fan J L. Fuzzy entropy theory [M]. First Edition, Xi'an: Northwest University Press, 1999: 9-14.
- [2] De Luca A and Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory [J]. *Information and Control*, 1972, 20(4): 301-312.
- [3] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-353.
- [4] Cheng H D, Chen Y H, and Sun Y. A novel fuzzy entropy approach to image enhancement and thresholding [J]. *Signal Processing*, 1999, 75(3): 277-301.
- [5] Huang L K and Wang M J. Image thresholding by minimizing the measures of fuzziness [J]. *Pattern Recognition*, 1995, 28(1): 41-51.
- [6] Li X Q, Zhao Z W, and Cheng H D. Fuzzy entropy threshold approach to breast cancer detection [J]. *Information Sciences*, 1995, 4(1): 49-56.
- [7] Pal S K. A note on the quantitative measure of image enhancement through fuzziness [J]. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1982, 4(2): 204-208.
- [8] Zenzo S D, Cinque L, and Levaldi S. Image thresholding using fuzzy entropies [J]. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 1998, 28(1): 15-23.
- [9] Lowen R. On fuzzy complements [J]. *Information Sciences*, 1978, 14(2): 107-113.
- [10] Yager R R. On the measures of fuzziness and negation, Part II: Lattices [J]. *Information and Control*, 1980, 44(3): 236-260.
- [11] Sugeno M. Fuzzy measures and fuzzy integrals: A survey [A]. *Fuzzy Automata and Decision Processes* [C]. New York: North-Holland, 1977: 89-102.
- [12] Li H and Yang H S. Fast and reliable image enhancement using fuzzy relaxation technique [J]. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 1989, 19(5): 1276-1281.
- [13] Cheng H D and Chen J R. Automatically determine the membership function based on the maximum entropy principle [J]. *Information Sciences*, 1997, 96(3-4): 163-182.
- [14] Sahoo P K, Soltani S, and Wong A K C, et al. A survey of thresholding techniques [J]. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 1988, 41(2): 233-260.

范九伦: 男, 1964年生, 博士后, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为模糊集理论、模糊信息处理、模式识别与图像处理。

赵凤: 女, 1980年生, 博士生, 主要研究方向为机器学习、模糊信息处理和图像处理。