

宽带相干信源 DOA 估计及其阵列校正方法

汪 玲 殷吉昊 陈天麒
(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

摘 要: 本文针对宽带相干信号,应用正交投影子空间算法提出了一种新的 DOA 估计方法。该方法不需要相干信号子空间方法(CSS)中聚汇矩阵所需的 DOA 先验信息,也不需要插值法中对扇区的划分。并且应用 Toeplitz 对角化方法修正数据协方差矩阵,使该方法能够处理相干信号和对阵列位置误差进行校正。仿真实验结果表明了该方法的有效性。

关键词: 信号处理; DOA 估计; 宽带相干信号; 阵列校正

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)08-1878-04

The Method of DOA Estimation and Array Calibration for Wideband Coherent Sources

Wang Ling Yin Ji-hao Chen Tian-qi

(College of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: In this paper, a new method is proposed to estimate the DOA of wideband coherent signals. The orthogonality of projected subspaces method is used to estimate DOA. This method does not require the primary information of DOA for focusing matrix and need not the sector dividing of interpolated method. And it can deal with coherent signals and array calibration by using the Toeplitz method to modify the data covariance matrix. The simulation results illustrated the effectiveness of this method.

Key words: signal processing; DOA estimation; Wideband coherent signals; Array calibration

1 引言

信号到达角(DOA)估计作为阵列信号处理的一个重要研究方向,自从上世纪 80 年代以来得到广泛重视,研究学者提出了许多估计方法。如针对窄带信号的极大似然法(ML),多信号分类法(MUSIC),旋转子空间不变法(ESPRIT),以及子空间拟合等基于特征结构的子空间类方法。

而实际应用中,宽带信号源大量存在,宽带信源的 DOA 估计成为近年来阵列信号处理中的一个重点研究方向。对宽带阵列信号处理的研究主要分为两类:

一类是基于不相干信号的处理方法。该类算法处理的主要思想是将宽带数据分解到不重叠的频带上,对每个频带进行窄带信号子空间处理,从而获得初始角度的估计;然后再对这些估计的组合得到最终结果。这类算法由于计算量大,且不能估计相干信号源,应用较少。

另一类方法则是基于相干信号处理的算法。其基本思想是把频带内不重叠的频率点的信号空间聚汇到参考频率点,对聚汇得到的单一频率点的协方差矩阵应用窄带信号处理方法,进行 DOA 估计。典型的相干信号处理方法有相干信号子空间算法(CSS)^[1]以及基于插值技术的虚拟阵列变换

法^[2]等。

但是由于 CSS 类方法需要 DOA 先验信息形成聚汇矩阵,插值法有时候需要对观测扇区进行重新划分,增加了算法计算量。在文献[3]中,作者针对宽带信号提出了一种验证正交投影子空间算法(TOPS),该方法不需要聚汇矩阵和波束形成矩阵,具有一定的实用性,但不能处理相干信号。

本文通过 Toeplitz 对角化方法修正数据协方差矩阵,改进 TOPS 方法,使该算法能够处理相干信号,并且能对阵列位置误差进行校正。

本文安排如下:第 2 节为宽带信号模型;第 3 节应用 Toeplitz 方法修正数据协方差矩阵,使该方法能够解相干及校正阵元位置误差;第 4 节是仿真实验。

2 宽带信源模型

在实际应用中,为了在空间传播信息,通常把待传送的基带信号 $s(t)$ 进行调制,即与载波 $\cos 2\pi f_L t$ 混合产生射频信号 $\tilde{s}(t)$,其中 f_L 为本振频率。设有 K 个信号源入射到 M 阵元的均匀线阵($K < M$)上。则第 m 个阵元的射频(RF)输出信号

$$\tilde{x}_m(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{s}_k(t - \tau_{mk}) + \tilde{n}_m(t) \quad (1)$$

其中 $\tilde{s}_k(t)$ 为第 k 个射频信号, $\tilde{n}_m(t)$ 为第 m 阵元的射频噪声。 $\tau_{mk} = d_m \sin \theta_k / c$ 是第 k 个信源在第 m 阵元上的传播时延,

d_m 为第 m 阵元与参考阵元的间距, θ_k 为第 k 个信号源的到达角, c 为光速。

一旦信号 $\tilde{s}(t)$ 被接收, 会解调还原为基带信号。由于中频 (IF) 信号与射频信号存在关系 $\tilde{s}_k(t) = s_k(t)e^{j2\pi f_L t}$, $\tilde{x}_k(t) = x_k(t)e^{j2\pi f_L t}$, 则阵列中频输出

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t - \tau_{mk})e^{-j2\pi f_L \tau_{mk}} + n_m(t) \quad (2)$$

对 m 阵元输出做 Fourier 变换有

$$X_m(f) = \sum_{k=1}^K S_k(f)e^{-j2\pi(f_L+f)\tau_{mk}} + N_m(f) \quad (3)$$

阵列输出写成矩阵形式为

$$\mathbf{X}(f) = \mathbf{A}(f, \boldsymbol{\theta})\mathbf{S}(f) + \mathbf{N}(f) \quad (4)$$

其中 $\mathbf{X}(f) = [X_1(f), \dots, X_M(f)]^T$, $\mathbf{S}(f) = [S_1(f), \dots, S_K(f)]^T$, $\mathbf{A}(f, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}(f, \theta_1), \dots, \mathbf{a}(f, \theta_K)]$, $\mathbf{a}(f, \theta_k) = [1, e^{-j2\pi(f_L+f)\tau_{1k}}, \dots, e^{-j2\pi(f_L+f)\tau_{(M-1)k}}]^T$, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_K]^T$ 。

对于间距为最大波长一半的均匀线阵, $\tau_{mk} = (m-1) \cdot \sin \theta_k / 2f_{\max}$, f_{\max} 为接收信号的最高频率。则 $\mathbf{a}(f, \theta_k)$ 可简化为 $\mathbf{a}(f, \theta_k) = [1, e^{-j\tau_k}, \dots, e^{-j(M-1)\tau_k}]^T$, $\tau_k = \pi(f_L + f) \sin \theta_k / f_{\max}$ 。

在宽带信号处理中, 通常通过 Fourier 变换将阵列输出划分为多个窄带。假设阵列输出按时间分为 J 个子带, 每个子带有 P 点频点, 则阵列输出数据协方差矩阵为

$$\hat{\mathbf{R}}(f_i) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathbf{X}_j(f_i) \mathbf{X}_j^H(f_i), \quad i = 1, \dots, P \quad (5)$$

由子空间理论, 若 K 个信源互不相关, 信号子空间和噪声子空间可由特征分解 $\hat{\mathbf{R}}(f_i)$ 得到, 即

$$\mathbf{U}_s(f_i) = [\mathbf{u}_1(f_i), \dots, \mathbf{u}_K(f_i)] \quad (6)$$

$$\mathbf{U}_n(f_i) = [\mathbf{u}_{K+1}(f_i), \dots, \mathbf{u}_M(f_i)] \quad (7)$$

其中 $\mathbf{u}_m(f_i), (m = 1, \dots, M)$ 为 $\hat{\mathbf{R}}(f_i)$ 的特征向量, 对应的特征值由大到小排列。于是信源 DOA 可由子空间算法估计得到。

3 基于正交投影技术的相干信号 DOA 估计及其阵列校正方法

正交投影子空间算法的主要思想为: 通过传输矩阵的作用, 将不同频点的阵列方向向量固定到某一频率点, 而不改变其 DOA 信息。然后利用信号子空间与噪声子空间的正交性估计信号 DOA。

对于线阵, 假定存在对角矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(f_i, \theta_i)$, 其对角元素

$$[\boldsymbol{\Phi}(f_i, \theta_i)]_{m,m} = e^{-j2\pi f_i \tau_{mi}} \quad (8)$$

由 $\boldsymbol{\Phi}(f_i, \theta_j)$ 与原阵列方向向量 $\mathbf{a}(f_i, \theta_i)$ 的乘积得到一个新的方向向量

$$\mathbf{a}(f_k, \theta_k) = \boldsymbol{\Phi}(f_j, \theta_j) \mathbf{a}(f_i, \theta_i) \quad (9)$$

其中 $f_k = f_i + f_j$, $\sin \theta_k = (f_i / f_k) \sin \theta_i + (f_j / f_k) \sin \theta_j$ 。

若 $\theta_i = \theta_j$, 则有 $\theta_k = \theta_i$ 。即方向向量由频率点 f_i 变为 f_k , 而不改变其 DOA 信息。式(9)可扩展到空间任意阵列, 即有 $\mathbf{a}(f_k, \boldsymbol{\alpha}_k) = \boldsymbol{\Phi}(f_j, \boldsymbol{\alpha}_j) \mathbf{a}(f_i, \boldsymbol{\alpha}_i)$, 其中 $\mathbf{r}_m = (x_m, y_m, z_m) / c$,

$\boldsymbol{\alpha}_i = (\cos \theta_i \sin \varphi_i, \sin \theta_i \sin \varphi_i, \cos \varphi_i)$ (证明详见文献[3])。

由于信号子空间 $\mathbf{U}_s(f_0)$ 与方向矩阵 $\mathbf{A}(f_0, \boldsymbol{\theta})$ 的值域相同, 即存在满秩矩阵 $\mathbf{G}(f_0)$, 使得 $\mathbf{U}_s(f_0) = \mathbf{A}(f_0, \boldsymbol{\theta})\mathbf{G}(f_0)$ 。定义一个 $M \times K$ 的矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(f_i, \boldsymbol{\theta}) &= \boldsymbol{\Phi}(\Delta f_i, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{U}_s(f_0) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(\Delta f_i, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{A}(f_0, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{G}(f_0) = \mathbf{A}(f_i, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{G}(f_0) \end{aligned} \quad (10)$$

即 $\mathbf{U}(f_i, \boldsymbol{\theta})$ 的值域与 $\mathbf{A}(f_i, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ 相同。其中 $\Delta f_i = f_i - f_0$, $\mathbf{U}_s(f_0)$ 为参考频率 f_0 对应的信号子空间, $\boldsymbol{\theta}$ 为一假定角度, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数

$$[\tilde{\boldsymbol{\theta}}]_k = \arcsin \left[\frac{f_0}{f_i} \sin \theta_k + \frac{\Delta f_i}{f_i} \sin \theta \right], \quad k = 1, \dots, K \quad (11)$$

由信号子空间理论, 若 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k$, 则方向向量与噪声子空间正交, 即 $\mathbf{a}^H(f_i, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{U}_n(f_i) = \mathbf{0}$ 。于是矩阵 $\mathbf{U}^H(f_i, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{U}_n(f_i)$ 由式(10)有

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^H(f_i, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{U}_n(f_i) &= \mathbf{G}^H(f_0) \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(f_i, \theta_1) \mathbf{U}_n(f_i) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^H(f_i, \theta_K) \mathbf{U}_n(f_i) \\ \vdots \\ \mathbf{a}^H(f_i, \theta_K) \mathbf{U}_n(f_i) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{G}^H(f_0) \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H(f_i, \theta_1) \mathbf{U}_n(f_i) \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}^H(f_i, \theta_K) \mathbf{U}_n(f_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

即矩阵 $\mathbf{U}^H(f_i, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{U}_n(f_i)$ 为秩亏矩阵。

对于所有的 Fourier 变换频率点, 定义一个 $K \times (P-1)$ 的 $(M-K)$ 矩阵 $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) &= [\mathbf{U}^H(f_1) \mathbf{U}_n(f_1), \dots, \mathbf{U}^H(f_P) \mathbf{U}_n(f_P)], \\ &f_i, i = 1, \dots, P, f_i \neq f_0 \end{aligned} \quad (13)$$

由式(12)分析, 则有如下结论:

若 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_k$, $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})$ 为秩亏矩阵; 若 $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_k$, 则 $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})$ 为满秩矩阵。

由于子空间投影方法能减小噪声干扰, 用 $\mathbf{a}(f_i, \boldsymbol{\theta})$ 的正交投影向量修正 $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})$, 即

$$\mathbf{P}(f_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - (\mathbf{a}^H(f_i, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{a}(f_i, \boldsymbol{\theta}))^{-1} \mathbf{a}(f_i, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{a}^H(f_i, \boldsymbol{\theta}) \quad (14)$$

$$\mathbf{U}'(f_i, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(f_i, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{U}(f_i, \boldsymbol{\theta}) \quad (15)$$

于是由式(14), 式(15)和式(13)得到 $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})$, 对 $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})$ 作奇异值分解, 由最小奇异值 $\sigma_{\min}(\boldsymbol{\theta})$ 对应的角度估计的信号到达角, 即由下式

$$P_{\min}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(\boldsymbol{\theta})} \quad (16)$$

的谱峰对应的角度 $\boldsymbol{\theta}$ 估计得信源 DOA。

针对窄带相干信号 DOA 估计, 学者研究提出了许多方法, 如空间平滑类算法^[4, 5], 矩阵分解类算法^[6, 7]。但是这些方法大多计算量较大, 并且是以牺牲阵列孔径为代价解相干

的,有一定的应用局限性。

考虑到理想的数据协方差矩阵 $\widehat{\mathbf{R}}(f_p)$ 为一 Toeplitz 矩阵,而实际中由于噪声干扰仅为对角占优矩阵,因此,可通过 Toeplitz 对角化方法^[8]修正数据协方差矩阵。因为当信号源相干时,阵列接收的数据协方差矩阵 $\widehat{\mathbf{R}}(f_p)$ 会降秩,从而导致信号子空间的维数小于信源个数,即某些相干源的方向向量与噪声子空间不完全正交,以至于无法正确估计信源 DOA。而 Toeplitz 对角化方法对 $\widehat{\mathbf{R}}(f_p)$ 进行空间平滑,能够使其秩得到有效恢复,并接近理想 Toeplitz 矩阵结构,实现解相干和阵元位置误差的校正。

Toeplitz 对角化方法实质上是对数据协方差矩阵的斜对角元素的幅度进行平均,而不改变其相位信息,即

$$\begin{aligned} \hat{r}_T(-n) &= \frac{1}{M-n} \sum_{i=1}^{M-n} |\hat{r}_{i(i+n)}| e^{j\phi(-n)}, \\ \hat{r}_T(n) &= \hat{r}_T^*(-n) \end{aligned} \quad (17)$$

其中 \hat{r}_{ij} 为 $\widehat{\mathbf{R}}$ 的元素, $\hat{r}_{Tij} = \hat{r}_T(i-j)$ 为修正后的协方差矩阵 $\widehat{\mathbf{R}}_T$ 的元素, $\phi(-n)$ 为 $\hat{r}(-n)$ 的相位 ($0 \leq n < M$)。

定义状态空间

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \Phi \mathbf{Z}_k, \quad X_k(f) = \mathbf{h} \mathbf{Z}_k \quad (18)$$

其中 $\mathbf{Z}_1 = [S_1(f), \dots, S_K(f)]^T$, $\Phi = \text{diag}(e^{-j\tau_1}, \dots, e^{-j\tau_K})$, $\mathbf{h}_{1 \times K} = [1, 1, \dots, 1]$ 。

于是,式 $\mathbf{X}(f) = [X_1(f), \dots, X_M(f)]^T$ 可以表示为

$$\mathbf{X}(f) = [\mathbf{h}, \mathbf{h}\Phi, \mathbf{h}\Phi^2, \dots, \mathbf{h}\Phi^{M-1}]^T \mathbf{Z}_1 = \mathbf{A} \mathbf{Z}_1 \quad (19)$$

且式(17)可写作

$$\hat{r}_T(-n) = \frac{1}{M-n} \sum_{i=1}^{M-n} |x_i x_{i+n}^*| e^{j\phi(-n)} \quad (20)$$

将 $x_{i+n} = \mathbf{h}\Phi^n \mathbf{Z}_i, x_i = \mathbf{h}\mathbf{Z}_i$ 代入式(20)有

$$r(-n) = \mathbf{h}\Phi^n \mathbf{P} \mathbf{h}^H \quad (21)$$

其中 $\mathbf{P} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{Z}_i \mathbf{Z}_i^H$, 是对 \mathbf{Z}_i 进行空间平滑的估计值,通常为满秩矩阵。

于是经过 Toeplitz 方法修正的协方差矩阵

$$\widehat{\mathbf{R}}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{h}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{h}\Phi^{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \mathbf{h}^H, \Phi^{-1} \mathbf{P} \mathbf{h}^H, \dots, \Phi^{-(M-1)} \mathbf{P} \mathbf{h}^H \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H \quad (22)$$

即通过 Toeplitz 方法并不没有改变阵列流型,且 $\widehat{\mathbf{R}}_T$ 为满秩矩阵,实现解相干和阵列校正。用修正后的 $\widehat{\mathbf{R}}_T$ 替代式(5)中的协方差矩阵进行特征分解,得到相应的信号子空间 $\mathbf{U}_s(f_i)$ 和噪声子空间 $\mathbf{U}_n(f_i)$, 利用正交投影子空间算法估计宽带信源的 DOA。

4 仿真实验

实验1 解相干性能比较

假设有2个相干宽带线性调频信号入射到5阵元的均匀线阵上,

$$x(t) = s_1(t) + s_2(t) + n(t), \quad s_1(t) = e^{j2\pi[f_{01}t + (1/2)m_1t^2]}$$

其中归一化采样频率,信源初始频率 $f_{01} = 0.2\text{Hz}$, 调频斜率 $m_1 = 0.0012\text{Hz/s}$, $f_L = 1$, $\text{SNR} = 0\text{dB}$, $\theta_1 = -15^\circ$, $\theta_2 = 10^\circ$, $s_2(t) = s_1(t - \tau), \tau = 10$ 阵元间距满足空间采样定理。阵列输出划分为16个子带 ($J=16$), 每个子带有16点快拍, 并做64点 DFT ($P=64$)。

仿真结果如图1所示。图1(a)中, TOPS 方法不能区分两到达角, 而图1(b)正确估计得信号 DOA。用本文方法做100次 Monte-Carlo 实验, 估计得到到达角分别为 $\theta_1 = -14.8^\circ$, $\theta_2 = 9.3^\circ$, 标准偏差 $\text{std}_{\theta_1} = 1.74$, $\text{std}_{\theta_2} = 0.47$ 。

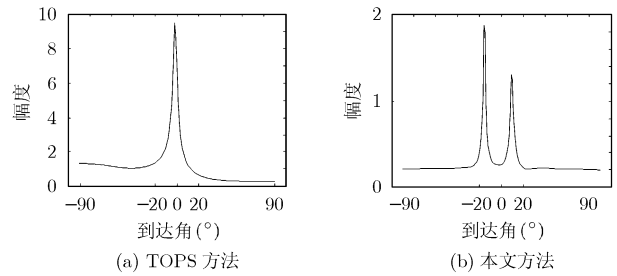


图1 TOPS方法与本文方法解相干性能对比

实验2 阵列位置误差校正性能比较

假设阵列为8阵元的线阵, 且具有零均值方差为0.1的随机扰动位置误差 $(\Delta x_i, \Delta y_i)$, ($i = 1, \dots, M$)。入射信号源为两个宽带线性调频信号, $s_1(t)$ 与实验1相同, $s_2(t) = e^{j2\pi[f_{02}t + (1/2)m_2t^2]}$, $f_{02} = 0.3\text{Hz}$, $m_2 = -0.0008\text{Hz/s}$, 入射角分别为 $\pm 30^\circ$, $\text{SNR} = 0\text{dB}$ 。

做100次 Monte-Carlo 实验。性能比较如表1所示, 其中成功率表示以归一化幅度的75%为域值截取的谱峰数。到达角估计均值如图2所示。

表1和图2的仿真结果表明, 在存在阵元位置误差时, 本文修正的 TOPS 方法具有较高的估计精度和成功率(分辨

表1 阵列校正性能比较

| DOA | TOPS | | 本文方法(MTOPS) | |
|------------------|--------|-------|-------------|--------|
| 均值($^\circ$) | -25.12 | 24.52 | -30.07 | 29.975 |
| 标准偏差($^\circ$) | 6.1 | 2.63 | 1.54 | 1.47 |
| 成功率(%) | 0.52 | | 0.9 | |

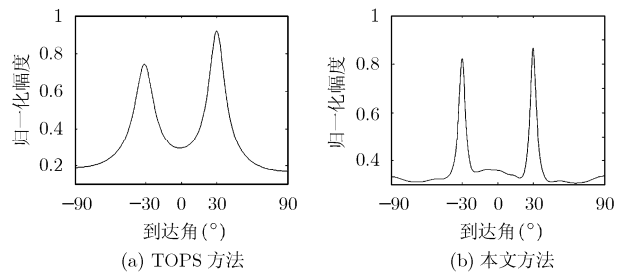


图2 TOPS方法与本文方法阵列校正性能比较

率)。

5 结束语

本文对 TOPS 方法进行了改进, 由 Toeplitz 对角化方法使其具有解相干能力。相比较空间平滑算法, Toeplitz 对角化方法计算量较低, 并且没有阵列孔径损失, 在低信噪比下具有较好性能, 能够对阵列位置误差进行校正。仿真实验表明了该方法的有效性。

参 考 文 献

- [1] Wang H and Kaveh M. Coherent signal-subspace processing for the detection and estimation of angle of arrival of multiple wide-band sources. *IEEE Trans. on ASSP*, 1985, 33(4): 823-831.
- [2] Benjamin F and Anthony W J. Direction finding for wideband signals using an interpolated array. *IEEE Trans. on SP*, 1993, 41(4): 1618-1634.
- [3] Yeo sun, Kaplan L M, and McClellan J H. TOPS: new DOA estimator for wideband signals. *IEEE Trans. on SP*, 2006, 54(6): 1977-1989.
- [4] Shan T J, Wax M, and Kailath T. On spatial smoothing for estimation of coherent signals. *IEEE Trans. on ASSP*, 1985, 33(4): 806-811.
- [5] Pillai S U and Byung B H. Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification. *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, 37(1): 8-15.
- [6] Di A. Multiple sources location—A matrix decomposition approach. *IEEE Trans. on ASSP*, 1985, 33(4): 1086-1091.
- [7] Cadzow J A, Kim Y S, and Shiue D C. General direction-of-arrival estimation: a signal subspace approach. *IEEE Trans. on AES*, 1989, 25(1): 31-46.
- [8] Chen Y M, Lee J H, and Yeh C C. Bearing estimation without calibration for randomly perturbed arrays. *IEEE Trans. on SP*, 1991, 39(1): 194-197.

汪 玲: 女, 1975 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理及非平稳信号处理.

殷吉昊: 男, 1978 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理及信号多参量估计.

陈天麒: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事自适应信号处理、阵列信号处理、信号多参量估计与跟踪、高阶谱估计等方面的研究工作, 已发表学术论文 100 余篇.