

一种新的含噪混沌信号降噪算法

刘凯 李辉 戴旭初 徐佩霞

(中国科学技术大学电子工程与信息科学系 合肥 230027)

摘要: 该文针对低信噪比、非高斯加性噪声和混沌动力学系统参数未知的含噪混沌信号降噪问题,提出了一种基于粒子滤波(Particle Filtering, PF)的降噪新算法。该算法将混沌信号和动力学系统中的未知参数作为一个多维状态矢量,利用PF方法递推计算多维状态矢量的联合后验概率分布,进而实现了对混沌信号的最优估计。对于混沌信号轨道分离过快所导致的退化问题,提出了有效的解决方法,并利用核平滑和自回归(Auto-Regression, AR)模型建模的方法分别实现了非时变以及时变参数的递推估计。仿真实验的结果表明,与现有的降噪方法相比,该文提出的新算法能够更加有效地抑制含噪混沌信号中的加性噪声。

关键词: 混沌信号; 粒子滤波; 核平滑

中图分类号: TN911.4

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)08-1849-04

A Novel Denoising Algorithm for Contaminated Chaotic Signals

Liu Kai Li Hui Dai Xu-chu Xu Pei-xia

(Department of Electronic Engineering and Information Science,
University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: A novel algorithm for denoising the contaminated chaotic signals is proposed, which is based on Particle Filtering (PF), and adapted for low SNR, additive non-Gaussian noise and the chaotic dynamic system with unknown parameters. Basic idea behind the proposed algorithm is that, chaotic signal and unknown parameters in the chaotic dynamic system are considered as a high dimension state vector, and the joint posterior probability density of these state vectors can be recursively calculated by utilizing the principle of Particle Filtering, then the optimum estimation of chaotic signal can be attained. In order to overcome the degenerate phenomena caused by the rapid divergence of the chaotic orbits, an effective strategy is taken in the proposed algorithm. Kernel smoothing method and Auto Regression (AR) model are used to recursively estimate the non-time-varying and time-varying parameters, respectively. The simulation results show that, compared with the existing denoising methods, the proposed algorithm can more effectively denoise additive noise in contaminated chaotic signals.

Key words: Chaotic signal; Particle filtering; Kernel smoothing

1 引言

随着人们对混沌现象认识的不断深入,混沌应用已经拓展到通信、信号检测、生物工程等诸多领域^[1, 2]。在混沌信号的产生、传输和再生过程中,不可避免地受到各种加性噪声的影响,因此抑制加性噪声,提高信噪比是混沌信号处理的一个重要研究课题。

由于混沌信号有着极强的“伪随机”性和“宽频”性,传统的线性滤波技术不能有效地抑制混沌系统的加性噪声^[3]。然而混沌信号是由确定性的动力学系统产生,若能充分利用混沌信号和随机噪声在动力学特征上的差异设计算法,就有可能滤除加性噪声。基于这一思想,不少研究者已经提出了一些滤除含噪混沌信号中加性噪声的方法,相空间

重构方法^[4]利用混沌时间序列在相空间中所表现出的方向性和噪声序列的无向性,保留一定方向上的分量而抑制其它方向上的分量,从而达到降低噪声的目的;EKF(Extended Kalman Filter)和UKF(Unscented Kalman Filter)方法则是线性化非线性动力学模型,然后利用卡尔曼滤波抑制噪声^[5, 6]。在混沌动力学系统已知、高斯噪声以及高信噪比条件下,现有降噪方法具有良好的性能。然而当面临信噪比较低,加性噪声是非高斯,混沌动力学方程中的参数未知的实际应用环境,已有的降噪方法性能会严重恶化。本文将提出一种基于粒子滤波的算法来解决这类条件下的含噪混沌信号降噪问题。

粒子滤波(Particle Filtering, PF)是非线性非高斯条件下系统状态估计的一个有效方法,已经被广泛地应用于通信信号处理、目标跟踪等问题中^[7]。PF主要依据信号和系统的状态空间模型,递推计算系统状态的后验概率分布,而系统

状态的后验概率分布包含了状态估计所需要的所有信息。将PF方法应用于混沌信号中加性噪声的抑制,其基本思想是:首先,将混沌信号和混沌系统未知参数看成一个多维状态矢量,利用PF算法估计其后验概率分布;然后,利用后验概率分布来估计混沌信号和未知的系统参数。由于混沌系统的初值敏感性,直接采用常规PF算法将导致严重的退化现象,为了有效地避免算法的退化,本文提出了基于有限记忆时间的粒子轨道选取方法;对混沌信号采用有效粒子轨道的统计平均方法来估计;而对于混沌动力学模型中未知参数的估计,当参数为非时变时,采用核函数平滑^[7]的方法来估计,当参数为时变时,则采用自回归AR建模进行递推估计。仿真实验表明,在高斯和非高斯加性噪声环境下,该算法都能在较低信噪比下有效地对混沌系统未知参数和混沌信号进行估计,抑制了观测信号中的加性噪声。

2 信号模型

设由非线性映射 $f(\bullet)$ 产生的混沌信号为 \mathbf{x}_t , 观测信号 \mathbf{y}_t 是 \mathbf{x}_t 与加性噪声 \mathbf{v}_t 的和, 即

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1}) \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\theta}_t$ 为系统参数矢量, 当 $\boldsymbol{\theta}_t$ 处于混沌区域时, \mathbf{x}_t 为混沌信号, 式(1)称为状态空间模型。基于这一模型, 本文研究的问题可描述为, 在 $f(\bullet)$ 和 \mathbf{v}_t 的概率分布已知的条件下, 依据观测序列 $\mathbf{y}_{1:t} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_t\}$, 递推估计联合状态矢量 $\mathbf{z}_t = \{\boldsymbol{\theta}_t, \mathbf{x}_t\}$, 从而抑制 \mathbf{y}_t 中的加性噪声 \mathbf{v}_t 。

需要指出的是, 当 $f(\bullet)$ 的非线性程度不高, \mathbf{v}_t 为高斯噪声时, 可以利用EKF和UKF的方法估计状态 \mathbf{z}_t ; 但随着 $f(\bullet)$ 非线性程度的增加, 由于忽略了泰勒展开式高阶项而导致的误差将增大, 特别当 \mathbf{v}_t 为非高斯噪声时, EKF和UKF算法性能将明显下降, 而且算法很容易发散。PF作为一种递推估计后验概率分布的非线性方法, 对于一般的非线性非高斯系统能估计出后验概率分布 $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{y}_{1:t})$, 从而能对 \mathbf{z}_t 进行最优估计。

3 粒子滤波算法

PF方法在一组离散样本点 $\mathbf{z}_{1:t}^1, \dots, \mathbf{z}_{1:t}^N$ (称为粒子)上计算后验概率分布, 从而将积分运算变为求和运算。若离散样本点 $\mathbf{z}_{1:t}^1, \dots, \mathbf{z}_{1:t}^N$ 由 $p(\mathbf{z}_{1:t} | \mathbf{y}_{1:t})$ 抽样得到, 则 $p(\mathbf{z}_{1:t} | \mathbf{y}_{1:t})$ 可用如下经验概率分布来近似估计:

$$\hat{p}(\mathbf{z}_{1:t} | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{z}_{1:t} - \mathbf{z}_{1:t}^i) \quad (2)$$

3.1 重要性抽样

通常情况下, 很难直接从 $p(\mathbf{z}_{1:t} | \mathbf{y}_{1:t})$ 抽样得到离散样本, 因此需要引入一个容易抽样的已知概率分布 $q(\mathbf{z}_{1:t} | \mathbf{y}_{1:t})$, 称为重要性函数, 同时定义与之对应的重要性权重 $w_t^i \propto p(\mathbf{z}_{1:t}^i | \mathbf{y}_{1:t}) / q(\mathbf{z}_{1:t}^i | \mathbf{y}_{1:t})$, 则 t 时刻的后验概率分布可以用离散测度 $\Xi_t = \{\mathbf{z}_{1:t}^i, w_t^i\}_{i=1}^N$ 来表示, 即

$$\hat{p}(\mathbf{z}_{1:t} | \mathbf{y}_{1:t}) \approx \sum_{i=1}^N w_t^i \delta(\mathbf{z}_{1:t} - \mathbf{z}_{1:t}^i) \quad (3)$$

进一步地, 假设重要性函数满足 $q(\mathbf{z}_{1:t} | \mathbf{y}_{1:t}) = q(\mathbf{z}_{1:t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1})q(\mathbf{z}_t | \mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t-1})$, 则只需要产生 t 时刻的粒子, 而不需要更新 t 时刻以前的粒子轨道, 此时重要性权重为

$$w_t^i \propto w_{t-1}^i \frac{p(\mathbf{z}_t^i | \mathbf{z}_{1:t-1}^i)p(\mathbf{y}_t | \mathbf{z}_t^i)}{q(\mathbf{z}_t^i | \mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t-1}^i)} \quad (4)$$

容易证明当 $q(\mathbf{z}_t | \mathbf{y}_{1:t}, \mathbf{z}_{1:t-1}) = p(\mathbf{z}_t | \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_{t-1})$ 时, 重要性权重的方差最小, 即此时为最优重要性函数^[8]。然而在实际应用中, 选取最优重要性函数可能会在粒子抽样和权重递推计算上存在问题, 故本文选取先验分布 $p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{t-1})$ 作为重要性函数。由于模型式(1)中不含状态噪声, 粒子轨道可直接根据状态方程 $f(\mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_{t-1})$ 计算得到, 此时重要性权值化简为

$$w_t^i \propto w_{t-1}^i g_t^i \propto \prod_{j=1}^t g_j^i \quad (5)$$

其中 $g_t^i = p(\mathbf{y}_t | \mathbf{z}_t^i)$ 。

3.2 退化问题

由于混沌信号的初值敏感性, 轨道分离的速度很快, 从而导致PF算法出现严重的退化现象, 经过几步迭代后, 大部分粒子的重要性权值就会接近零, 有时甚至会出现所有粒子的权重都退化为零, 导致算法无法运行。避免退化现象的一般方法是采用重抽样, 其主要思想是去除那些重要性权值小的粒子, 复制重要性权值较大的粒子。

应该注意到, 由于式(1)中不含状态噪声, 状态迭代是一个确定过程, 因此如果使用重抽样来解决退化问题会导致严重的粒子枯竭现象, 导致算法性能严重恶化。为此, 本文采用了基于有限记忆时间的粒子轨道选取方法来替代重抽样。对于混沌序列, 某一时刻的信号与后面信号的相关性随时间呈指数减小, 当前重要性权重 w_t^i 只跟最近几步的 g_t^i 相关性较大, 在计算重要性权重时可以只利用最近几步的 g_t^i , 即用有限长截取的方法来替代重抽样。令 q_m 为与粒子数 N 有关的正整数, 则 w_t^i 可估计为

$$w_t^i \propto \prod_{j=t-q_m}^t g_j^i \quad (6)$$

通常 q_m 取为 $2\sqrt{\lg(N)}$ 的整数部分即可。

3.3 参数的迭代

利用先验分布进行粒子轨道迭代更新时, 由于含有未知参数 $\boldsymbol{\theta}$, 需要先根据分布 $p(\boldsymbol{\theta}_t^i | \boldsymbol{\theta}_{t-1}^i)$ 对未知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 进行参数迭代估计, 然后再抽样得到 \mathbf{x}_t^i 。对于 $\boldsymbol{\theta}$ 为时变的情况, 直接根据时变模型 $p(\boldsymbol{\theta}_t^i | \boldsymbol{\theta}_{t-1}^i)$ 进行迭代即可, 如果时变模型未知, 则可以使用AR模型对其进行建模, 此时 $\boldsymbol{\theta}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\theta}_t = \sum_{j=1}^p c_j \boldsymbol{\theta}_{t-j} + \mathbf{u}_t \quad (7)$$

当 $\boldsymbol{\theta}$ 为非时变参数时, 应用文献[7]中提出的核平滑方法, 用下式来进行估计

$$p(\boldsymbol{\theta}_t^i | \boldsymbol{\theta}_{t-1}^i) \approx \hat{p}(\boldsymbol{\theta}_t^i | \boldsymbol{\theta}_{t-1}^i) = \sum_{i=1}^N w_{t-1}^i \kappa_{t-1}^i(\boldsymbol{\theta}) \quad (8)$$

其中 $\kappa_{t-1}^i(\bullet) = \kappa(\bullet | \hat{\theta}_{t-1}^i, \sigma_{\theta,t-1}^2)$ 是均值为 $\hat{\theta}_{t-1}^i$ 方差为 $\sigma_{\theta,t-1}^2$ 的核分布。核分布有很多种选择方法, 本文选为高斯分布, 同时为了保证 t 时刻得到的抽样点和 $t-1$ 时刻具有相同的均值和方差, 采用收缩方法:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}_{t-1}^i &= \gamma \theta_{t-1}^i + (1-\gamma) \bar{\theta}_{t-1} \\ \sigma_{\theta,t-1}^2 &= \beta^2 \sum_{i=1}^N (\theta_{t-1}^i - \bar{\theta}_{t-1})^2 w_{t-1}^i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 $\bar{\theta}_{t-1} = \sum_{i=1}^N \theta_{t-1}^i w_{t-1}^i$ 是 $t-1$ 时刻参数的加权平均值, $\beta^2 = 1 - \gamma^2$, 通常 $\beta = 0.1$ 是比较好的选择。

4 状态估计

用PF算法得到离散测度 Ξ_t 后, 就可以对混沌信号和系统参数进行估计。由于 Ξ_t 中重要性权重 w_t^i 表示状态 z_t^i 的概率, 在轨道足够多的理想情况下, 根据最大后验准则, 在每步迭代时选取最大 w_t^i 所对应的 z_t^i 作为当前时刻的估计值是最优的。然而在实际应用中, 考虑到计算量的因素, 轨道数不可能取得过大, 而且在低信噪比下, Ξ_t 所描述的后验概率分布峰值比较平缓, 直接利用最大后验准则选取最大 w_t^i 所对应的 z_t^i 会受到统计误差的影响, 导致错误的估计, 故利用粒子轨道中有效粒子的均值来估计混沌信号和参数, 有效粒子数 N_{eff} 定义为

$$N_{\text{eff}} = 1 / \sum_{i=1}^N (w_t^i)^2 \quad (10)$$

选定 w_t^i ($i = 1, 2, \dots, N$) 中最大的 N_{eff} 个重要性权重所对应的粒子作为有效粒子, 并利用它们的统计均值作为信号和参数的估计, 即

$$\hat{z}_t = \sum_{i=1}^{N_{\text{eff}}} z_t^i w_t^i \quad (11)$$

需要指出的是, 不同SNR下, 粒子重要性权重方差会有所不同, 随着SNR的降低, 重要性权重方差会变小, N_{eff} 变大。因此, 根据有效粒子数随着SNR变化而改变的特性, 利用有效粒子的均值进行状态估计, 在低SNR下使用更多的粒子进行加权平均, 而高SNR时则只需要考虑少数有效粒子, 从而可以在估计性能和计算复杂度上取得较好的折中。

5 仿真结果

在仿真中, 输入信噪比(SNR)定义为 $10 \lg(\text{var}(\mathbf{x}_t) / \sigma^2)$, 其中 σ^2 为噪声方差; 利用均方误差(MSE)来评价算法的降噪性能, 定义为

$$\text{MSE} = 10 \lg \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t|^2 \right) \quad (12)$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}_t$ 为混沌信号的估计值, \mathbf{x}_t 为相应的真实值, T 为实验中混沌序列的时间长度。仿真实验中粒子总数为 $N = 400$, 仿真结果都为 20 次 Monte Carlo 实验的平均值。

5.1 观测噪声为高斯噪声

当观测噪声 v_t 为高斯噪声时, 分别对混沌系统参数为未知常数和时变的情况进行仿真实验。

(1)混沌系统参数为未知常数 考虑一维 Logistic 映射:

$$x_t = \mu x_{t-1} (1 - x_{t-1}) \quad (13)$$

和二维 Henon 映射:

$$\left. \begin{aligned} x_{1,t} &= 1 + x_{2,t-1} - ax_{1,t-1}^2 \\ x_{2,t} &= bx_{1,t-1} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

取 $\mu = 3.8$, $a = 1.4$, $b = 0.3$ 。图 1 给出了传统 EKF, UKF 和本文提出的 PF 算法在不同信噪比下的 MSE 性能比较, 其中图 1(a)是 Logistic 映射下的状态估计均方误差(MSE)与信噪比(SNR)的关系曲线, 由于它非线性程度并不高, PF 算法只是在较低信噪比下显示出了更优的性能。从图 1(b)中可以看到, PF 算法在处理非线性程度较高的 Henon 映射时, 性能明显优于 EKF 和 UKF 算法, 其原因在于 EKF 和 UKF 对于状态空间模型的估计只分别精确到泰勒展开式的 1 阶项和 3 阶项, 会引入较大的估计误差, 影响滤波性能。图 2 显示的 Logistic 映射去噪时输入信噪比和输出信噪比间的关系, 输出信噪比定义为 $10 \lg(\text{var}(\mathbf{x}_t) / \text{var}(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t))$, 从图中可以看出去噪算法确实提高了信噪比, 消除了部分噪声。

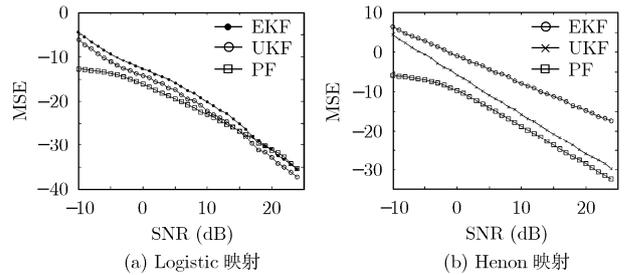


图 1 高斯噪声下非时变混沌系统降噪性能比较图

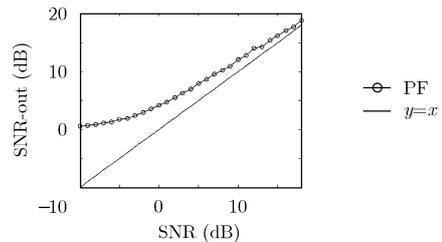


图 2 输出信噪比与输入信噪比关系图

(2)混沌系统参数时变 当混沌系统的参数随时间变化时, 通常可以利用 1 阶 AR 模型对时变参数进行建模。为了便于比较, 在仿真中假设实际 Logistic 映射的参数为周期时变的, 即

$$\mu = 3.85 + 0.05 \sin(n/5) \quad (15)$$

分别运用 EKF, UKF 和 PF 方法对状态和参数进行估计。图 3, 图 4 给出了在不同 SNR 下 3 种算法对于状态 \mathbf{x} 和参数 μ 估计的 MSE 比较。从图 3 可以看到, 由于 Logistic 映射非线性程度不高, PF 算法比 EKF 和 UKF 算法只有 2dB 左右的性能增益; 图 4 显示的是参数 μ 的估计性能图, PF

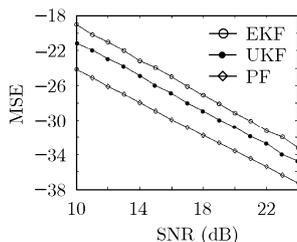


图3 时变混沌系统
信号 x 的估计性能

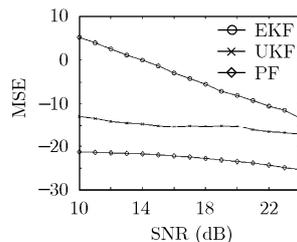


图4 时变混沌系统
参数 μ 的估计性能

算法对参数估计的精确度要高的多,特别是低信噪比下。这主要是由于 EKF 和 UKF 只适合于非时变的参数估计,而且 EKF 和 UKF 对状态空间模型进行了近似,所以导致参数估计有较大的偏差;而基于 PF 算法的状态和参数估计,利用 AR 模型对时变参数进行了建模,而且对状态空间模型没有进行近似,因而能得到更精确的估计。

5.2 观测噪声为非高斯噪声

对于实际应用中非高斯噪声的去噪问题, EKF 和 UKF 算法无能为力。不失一般性,假设非高斯分布由若干个高斯和的形式来拟合,仿真中选取的是两个高斯分布的和 $\mathbf{v}_t \sim (1-\alpha)N(0, \sigma_1^2) + \alpha N(0, \sigma_2^2)$, 其中取 $\alpha = 0.8$, 该分布的方差为 $\sigma^2 = \text{var}(\mathbf{v}_t) = (1-\alpha)\sigma_1^2 + \alpha\sigma_2^2$ 。设 $\mu = 3.8$, 图 5 给出了高斯和以及高斯噪声条件下的去噪算法性能比较图,从图 3 中可以看出,不同噪声分布时,算法的性能基本是相同的。

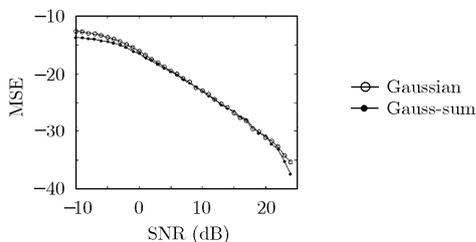


图5 高斯和噪声下的降噪性能图

6 结束语

本文提出了一种基于粒子滤波思想的含噪混沌信号降噪算法,在粒子滤波递推计算中通过有限记忆时间的粒子轨道选取方法替代重抽样,解决了由于混沌轨道分离太快所带

来的退化现象,并分别利用核平滑和 AR 建模实现非时变和时变参数的递推估计。仿真实验表明,在低信噪比、非高斯噪声以及未知系统参数(非时变或时变的)条件下,本文提出的算法比现有方法有了较大的性能提高。

参考文献

- [1] Zhao Geng and Fang Jin-qing. Classification of chaos-based communication and newest advances in chaotic secure technique research. *Chinese Journal of Nature*, 2003, 25(1): 21-30.
- [2] Kocarev L, Szczepanski J, and Amigo J M. Discrete chaos-I: theory. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2006, 53(6): 1300-1309.
- [3] Brocker J, Parlitz U, and Ogorzalek M. Nonlinear noise reduction. *Proc. IEEE*, 2002, 90(5): 898-918.
- [4] Yuan Jian and Xiao Xian-ci. Extracting the largest lyapunov exponents from the chaotic signals overwhelmed in the noise. *Acta Electronica Sinica*, 1997, 25(10): 102-106.
- [5] Walker D M and Mees A I. Reconstructing nonlinear dynamics by extended Kalman filtering. *Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng.*, 1998, 8(3): 557-570.
- [6] Feng Jiu-chao and Xie Sheng-li. An unscented transform based filtering algorithm for noisy contaminated chaotic signals. *ISCAS 2006, Kos, May 2006*: 2245-2248.
- [7] Doucet A, Freitas N D, and Gordon N. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. New York: Springer, 2001: 202-206.
- [8] Arulampalam M S, Maskell S, and Gordon N. A tutorial on particle filters for online nonlinear /non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 50(2): 174-188.

刘凯: 男, 1981年生, 博士生, 研究方向为非线性滤波、通信信号处理。

戴旭初: 男, 1963年生, 教授, 主要研究方向为盲信号处理、非线性非高斯信号处理。

徐佩霞: 女, 1941年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为通信理论与信号处理。