

## 一种任意阵的方向图综合方法

张霞 陶海红 廖桂生

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 该文提出一种新的基于优化理论的方向图综合算法。该方法先利用与相位无关的约束得到期望主瓣,再利用优化方法求解残余权矢量获得期望旁瓣,使残余权矢量对主瓣的影响控制在一定范围内,优化问题可看作是二次锥规划(SOCP)。与传统的对模值和相位均进行约束的综合方法相比,该方法要求综合期望方向图的模值,不仅能够有效地获取期望方向图,而且主瓣控制机制与参考点的选取无关。对多种任意阵的仿真结果证明该方法的有效性和正确性。

**关键词:** 方向图综合; 任意阵; 二次锥规划

中图分类号: TN821

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)03-0738-04

## Pattern Synthesis Method for Arbitrary Arrays

Zhang Xia Tao Hai-hong Lian Gui-sheng

(National Lab of Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** A novel pattern synthesis algorithm based on optimization theory is presented in the paper. The algorithm initializes with the set of weights which is used to maintain the desired mainlobe with phase-independent derivative constraints, then the residual weight vector is optimized to acquire the desired sidelobe, the influence of the residual weight on the mainlobe will be confined to a certain bound. Object function can be considered as the Second-Order Cone Programming(SOCP). Compared with the existing pattern synthesis algorithms which synthesize the array patterns with both desired magnitude and phase response, the proposed algorithm which synthesizes the array patterns with only desired magnitude response, can efficiently work and is unrelated to the reference point. Computer simulations on some arbitrary arrays demonstrate the effectiveness and validity of the proposed algorithm.

**Key words:** Pattern synthesis; Arbitrary array; Second-Order Cone Programming(SOCP)

### 1 引言

近几十年来,阵列方向图的综合问题引起了人们的广泛关注,且随着全球通信业务的迅速发展,智能天线已经成为卫星通信和移动通信的研究热点。无线通信系统常常要求天线具有一定的主瓣宽度,特殊的主瓣形状和低的旁瓣电平等等,因此需要根据这些指标去获取最佳的天线权系数,该项技术称为方向图综合。现在阵列天线阵运用越来越广,那些伸出载体的天线,尺寸大且不满足动力学原理,造成了许多不利因素,所以现有趋向于将天线(如微带天线)嵌于载体之中,阵列排布与载体一致,就导致阵列排布可能是任意的,这样的天线阵称之为共形天线,对于共形天线的方向图综合问题可以看成是任意阵综合问题。

方向图综合问题最初的研究工作集中在由均匀分布的各向同性阵元构成的阵列天线上。Dolph<sup>[1]</sup>首先提出切比雪夫方向图的综合方法, Taylor<sup>[2]</sup>, Hyneman<sup>[3]</sup>, Elliott<sup>[4]</sup>也提出了各种具有均匀旁瓣的方向图综合方法。上述方法共同特点

是只适用于由均匀分布的各向同性阵元构成的阵列,而不能直接用于任意阵(其阵元位置任意分布,各阵元空间响应任意)。近来就任意阵的方向图综合问题, Perini<sup>[5]</sup>, Ng<sup>[6]</sup>, 等提出了多种任意阵的方向图综合方法。

方向图综合方法大致可以分为:基于优化理论方法的方向图综合方法和基于自适应理论的方向图综合方法。(1)基于自适应理论:基于自适应理论,大都可以推导为注入人工干扰<sup>[7-9]</sup>,通过递归校正干噪比或者干扰的大小,使方向图达到要求,属于数值(numerical)方法<sup>[10]</sup>。文献[10]的主瓣控制和旁瓣一样也是注入一定的干扰使主瓣达到期望值,但是这样会使信噪比下降,而且如果主瓣要求高,阵元个数选取不当或阵列排布不当,主瓣也会像旁瓣那样有凹陷。基于自适应理论的方向图综合方法方面的文献大多是在注入干扰大小的迭代公式上加以改进,这类方法存在的问题就是不能保证迭代的收敛性<sup>[11]</sup>,也不能保证所得阵列方向图最优,且随着阵元个数的增加,运算量增加迅速。(2)基于优化理论方法:随着凸规划理论的发展,方向图综合方法转向通过凸规划理论来解决方向图综合问题。典型方法使用的准则有极大

极小准则:使实际方向图与期望方向图之间的误差最大峰值最小,该方法使综合得到的方向图的幅度和相位都要达到模板值,比如模板中某一方向方向图为1,那么要求综合得到的方向图不仅模值为1,相位也为 $0^\circ$ 。这样致使得到的方向图与阵列的参考点的选取有关系。图1为31半波长均匀线阵,参考点分别选在阵列的中心和边上的平顶方向图。同样的模板,入射角在 $[-20,20]$ 度内为1,其余角度为0.03。可见不同参考点所得到的效果差很远,参考点取在边上,不仅使主瓣波动大,而且旁瓣也会受到一定影响。

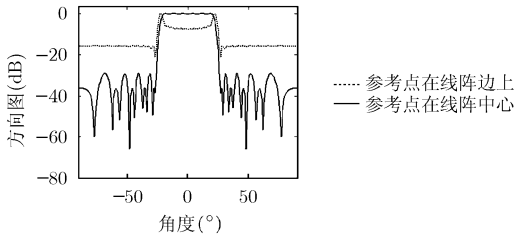


图1

文献[11]使实际方向图的模值与期望方向图模值之间的误差最大峰值最小,优化方程不是凸规划,将非凸问题转化为多凸问题,再进行迭代达到最优,这不仅仅加大了复杂度,而且会使误差变大,且初始权矢量的设置对于收敛有很大的关系。当阵列不规则和约束条件多样时,问题变得更加复杂。文献[12]是在方法文献[11]的基础上降低了约束条件:旁瓣要求低于某些特定值(一定 dB)。但是该优化方程仍然是非凸的,推导过程类似于文献[11]。

## 2 问题提出

寻找既简单又与相位无关的方向图综合方法是目前面临的问题。

文献[8]提出了一种简单有效的基于自适应理论的方向图综合方法,该方法为:得到期望的主瓣后,采用注入干扰的方法使 $\mathbf{w} \leftarrow (\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})$ ,每次都需确定加入干扰的大小,从而获得期望旁瓣。该方法在阵列规则,主瓣为单峰情况下所得到的方向图切实可行。不过在期望方向图无法综合得到的情况下,不能保证迭代的收敛性,而且不能保证所得到的阵列方向图最优。

本文在文献[8]的思路,提出了一种新的基于优化理论的方向图综合算法,利用与相位无关的导数约束得到期望的主瓣后,再利用优化方法求解残余权矢量,从而获得期望旁瓣,并添加能量约束使残余权矢量对主瓣的影响控制在一定范围内。该优化问题可看作是二阶锥规划(SOCP)问题,利用优化工具箱可简单求解。本文方法比文献[8]方法具有更好的适应性,在期望方向图无法得到的情况下,也能得到与期望模板误差最小的方向图。与传统的对模值和相位均进行综合的算法相比,本文方法要求综合期望方向图的模值,主瓣

控制机制与参考点的选取无关,误差相对较小。

## 3 算法描述

空间阵列由 $N$ 个阵元组成,分布在已知的空间位置,阵元的空间位置 $(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, N$ ,阵列的复权系数为 $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N]^T$ ,信号波长为 $\lambda$ ,波达方向为 $(\theta, \phi)$ , $\theta, \phi$ 分别表示俯仰角和方位角,阵列的方向图:

$$p(\theta, \phi) = \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta, \phi) \quad (1)$$

其中阵列导向矢量 $\mathbf{a}(\theta, \phi) = [p_1(\theta, \phi)e^{j2\pi\tau_1(\theta, \phi)/\lambda}, p_2(\theta, \phi)e^{j2\pi\tau_2(\theta, \phi)/\lambda}, \dots, p_N(\theta, \phi)e^{j2\pi\tau_N(\theta, \phi)/\lambda}]^T$ , $p_i(\theta, \phi)$ 为阵元 $i$ 的方向图, $\tau_i(\theta, \phi) = (x_i \sin \theta \cos \phi + y_i \sin \theta \sin \phi + z_i \cos \theta) / c$ 表示相对于参考点的时延, $c$ 表示光速。

### 3.1 主瓣形成算法

初始化权值得到期望形状的主瓣,比如平顶的,双峰的,可由下式统一给出<sup>[13]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \\ \text{s.t. } \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \\ \mathbf{w}^H \mathbf{w} \leq \zeta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对权进行范数约束可提高稳健性,下面用拉格朗日乘子对式(2)进行求解:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{w}, \lambda, \mu) &= \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} + \lambda(\|\mathbf{w}\|^2 - \zeta) \\ &\quad + \mu(-\mathbf{w}^H \mathbf{C} - \mathbf{C}^H \mathbf{w} + \mathbf{f} + \mathbf{f}^H) \\ &= [\mathbf{w} - \mu(\mathbf{R} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{C}]^H (\mathbf{R} + \mu\mathbf{I}) [\mathbf{w} - \mu(\mathbf{R} \\ &\quad + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{C}] - \mu^2 \mathbf{C}^H (\mathbf{R} + \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{C} - \lambda\zeta + \mu\mathbf{f} + \mu\mathbf{f}^H \end{aligned} \quad (3)$$

分别对 $\mathbf{w}, \lambda, \mu$ 求导得到权值的表达式:

$$\mathbf{w}_0 = \frac{(\mathbf{R} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{C}}{\mathbf{C}^H (\mathbf{R} + \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{C}} \mathbf{f} \quad (4)$$

$\lambda$ 值可以用牛顿法解单调递减函数得到, $\zeta$ 的取值应为<sup>[13]</sup>:

$$\zeta \geq \mathbf{f}^H (\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad \text{其中 } \mathbf{R} = \sum_{i=1}^L \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H, \mathbf{v}_i \text{ 为需要控制角度的}$$

的导向矢量,可以加一个小的对角矩阵来预防 $\mathbf{R}$ 病态。

优化方程中 $\mathbf{C}$ 是具体的约束矢量,正如文章前面所说,对相位不必要的约束导致方向图综合结果与参考点有关,故添加的约束应与相位无关。如要使某方向 $\theta_m$ 处产生峰值,约束为 $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_m) = 1$ 且 $\text{Re}(\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_m)) = 0$ , $\text{Re}$ 表示取实部。若产生多峰,可添加相同的约束。但是阵列的个数是有限的,如果要在某一范围内产生平顶的话,不可能对这一范围的角度都进行这样的约束,因为自由度是有限的。为了得到具有平顶主瓣或较平坦主瓣形状的方向图,可进行与相位无关的二次导向约束<sup>[14, 15]</sup>。

### 3.2 获取旁瓣的优化算法

实际应用中,通常主瓣的形状是大家所关心的,而旁瓣只要低于主瓣某一设定的阈值,同时具备一定的形状,比如在某个角度零陷要深一些。为此,在已经获取感兴趣的主瓣

基础上再进行旁瓣约束,使旁瓣模值低于一定阈值即可,在此引入残余权矢量  $\Delta \mathbf{w}$ ,使  $\mathbf{w}_0 \leftarrow (\mathbf{w}_0 + \Delta \mathbf{w})$ 。

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{w}} \Delta \mathbf{w}^H \Delta \mathbf{w} \\ & \text{s.t. } |(\mathbf{w}_0 + \Delta \mathbf{w})^H \mathbf{a}(\theta_s)| \leq \varepsilon, \quad \theta_s \in \Theta_s \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

显然  $\Delta \mathbf{w}$  的引入会对已产生的主瓣产生影响,因为总的能量是一定的,为确保主瓣能量不变,对主瓣的能量进行约束,使残余权矢量对主瓣的影响小,优化方程如下:

$$|(\Delta \mathbf{w})^H \mathbf{a}(\theta_m)| \leq \delta, \quad \theta_m \in \Theta_m \quad (5b)$$

$\Theta_m, \Theta_s$  分别表示主瓣、旁瓣范围。 $\delta$  表示所能容忍的主瓣能量波动,视主瓣而定,在使旁瓣达到期望的同时,又确保了主瓣的能量不变。该优化为凸规划,可以转化为二次锥规划问题,即 SOCP 问题<sup>[1]</sup>,现在有许多成熟的工具箱来解决这类问题,如 SeDuMi<sup>[16]</sup>等。

如何选取  $\varepsilon$  呢?是根据所期望的旁瓣而定的。例如要获取某角度低于最高主瓣  $D$  dB,则  $\varepsilon = e(D/20)$ 。针对不同角度所要求的模板不同,选取  $\varepsilon$ 。 $\Delta \mathbf{w}$  的引入对主瓣基本上不会产生影响,可以不添加能量约束。如果期望旁瓣要求很低,已经产生的主瓣又不能太大变动,按照能量守恒,期望方向图无论如何都无法达到,这样优化结果就是与期望旁瓣误差最小的方向图。

### 3.3 本文算法流程:

(1)根据实际需要确定来期望方向图模板,确定主旁瓣范围。

(2)根据主瓣要求,确定约束条件;根据模板确定旁瓣所需达到的  $\varepsilon$ 。

(3)根据式(4)获取主瓣的权值,观察主瓣产生情况是否理想,否,适当调整约束条件,是,继续。

(4)求解优化方程式(5),获取最终权值  $(\mathbf{w}_0 + \Delta \mathbf{w})$ 。

(5)计算方向图。

## 4 计算机仿真和性能分析

**实验 1** 观察主瓣在加上  $\Delta \mathbf{w}$  后,对已产生的主瓣影响。阵列由 31 个阵元组成,31 阵元的半波长等距阵加上  $[0, 0.5] \lambda$  范围内的随机数。图 2 为  $-10^\circ, 0^\circ, 10^\circ$  处均进行二次与相位无关的导向约束实现平顶主瓣,主瓣范围  $[-20, 20]$ ,虚线表示初始权得到的方向图,实线为最终综合结果,可见加上  $\Delta \mathbf{w}$  后改变了旁瓣的同时,的确受到影响,但是影响很小。阵元位置为(单位:波长):  $[0.30, 0.52, 1.21, 1.65, 2.44, 2.51, 3.38, 3.99, 4.50, 4.89, 5.22, 5.75, 6.11, 6.82, 7.16, 7.98, 8.36, 8.71, 9.37, 9.63, 10.22, 10.97, 11.34, 11.61, 12.42, 12.81, 13.07, 13.60, 14.30, 14.81, 15.19]$

**实验 2** 非均匀线阵情形。阵列由 25 个阵元构成,阵元各向同性。图 3 为均匀旁瓣至  $-40$  dB 的方向图,主瓣对准  $0^\circ$  的方向图。本文方法为实线,虚线为文献[8]综合方向图。文献[8]在角度大于  $80^\circ$  时不符合要求,而本文方法能很好的综合到所期望分贝数。图 4 为实现双峰且使旁瓣综合至  $-20$  dB

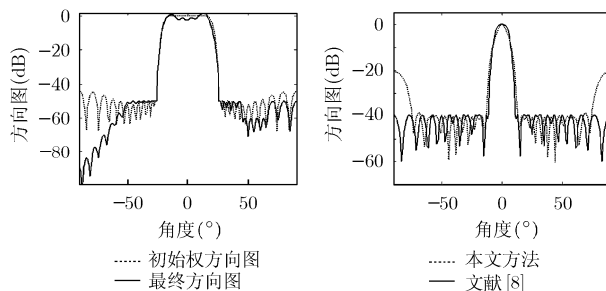


图 2 残余权矢量对主瓣的影响 图 3 非均匀线阵单峰方向图

的方向图,文献[8]在  $40^\circ$  至  $60^\circ$  处有较大波动,本文方法能很好的达到要求,且能综合到更低分贝数。 $[0, 0.78, 1.21, 1.82, 2.26, 2.64, 2.92, 3.74, 3.97, 4.83, 5.58, 6.45, 6.72, 6.96, 7.62, 7.96, 8.68, 8.81, 9.39, 9.69, 10.16, 10.71, 11.56, 11.87, 11.90]$ 。

**实验 3** 等间距均匀平面阵,阵元个数  $12 \times 12$ , 0.7 波长等间距,阵元各向同性,要求产生平顶主瓣  $45^\circ \times 45^\circ$ ,旁瓣均匀的方向图,要求旁瓣尽量低。图 5 为表示得到的方向图及其俯视图。本文方法能很好地达到要求。

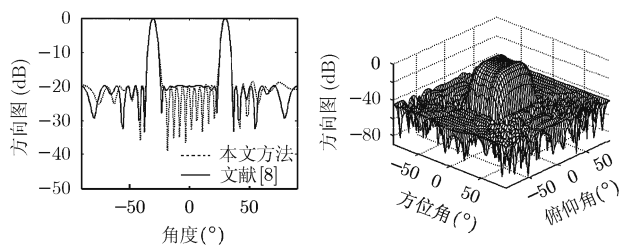


图 4 非均匀线阵双峰方向图 图 5 均匀平面阵波束综合方向图

**实验 4** 平面任意阵,图 6 为由  $9 \times 9$  个阵元构成的任意阵的阵元位置分布情况。图 7 为最终得到的方向图,  $x = \sin(\theta) \cos(\phi)$ ,  $y = \sin(\theta) \sin(\phi)$ ,其中  $\theta$  为俯仰角,  $\phi$  为方位角。主瓣范围为  $\theta$  小于等于  $26^\circ$  即  $\sin^2(\theta) \leq 0.2$ ,要求旁瓣低于  $20$  dB,设有  $10^\circ$  的过渡带,对 4 点进行二次相位无关约束产生平顶。可见综合效果很好,平顶和旁瓣均达到要求。

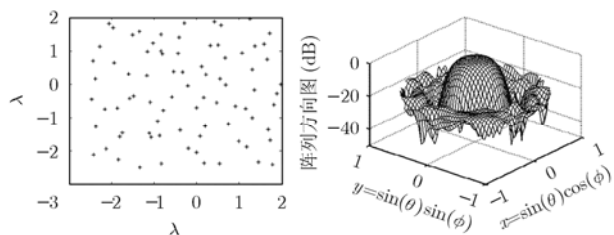


图 6  $9 \times 9$  平面阵的布阵图 图 7 平面任意阵波束综合方向图

**实验 5** 立体阵的方向图综合,阵列分布如图 8,在  $xoy$  平面投影为  $13 \times 13$  的 0.5 波长间距,在  $z$  轴上满足均值为 0,

方差为 0.2 的正态分布。要求方向图满足俯仰角 $[-20, 20]$ , 方位角 $[-40, 40]$ 范围内为主瓣平顶范围, 其余为旁瓣, 要求低至 $-20\text{dB}$ , 但实际只能达到 $-15\text{dB}$ , 对 3 点进行二次相位无关的导数约束产生平顶。图 9 为得到的方向图。可见主瓣存在较小的波动, 原因就是引入  $\Delta\mathbf{w}$ , 主瓣在一定程度上受到影响。仿真采用的仿真工具箱均为 SeDuMi 1.05。

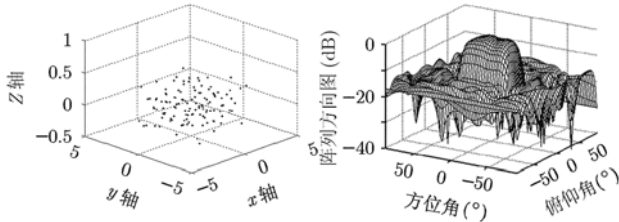


图 8 立体阵的布阵图

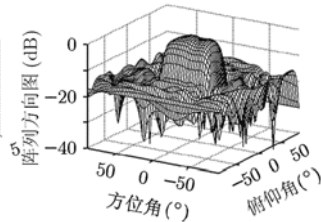


图 9 立体阵波束综合方向图

## 5 结束语

本文提出了一种新的基于优化理论的方向图综合算法, 利用与相位无关的导向约束得到期望的主瓣后, 再利用优化方法求解残余权矢量  $\Delta\mathbf{w}$ , 从而获得期望旁瓣, 并添加能量约束使残余权矢量对主瓣的影响尽可能的小。该优化问题可看作是二阶锥规划(SOCP)问题, 利用优化工具箱可简单求解。本文方法比文献[8]方法具有更好的适应性, 在期望方向图无法得到的情况下, 也能得到与期望模板误差最小的方向图。与传统的对模值和相位均进行综合的算法相比, 误差较小, 且主瓣控制机制与参考点的选取无关。对多种任意阵列的仿真结果表明该方法的有效性和正确性。但是对主瓣很复杂的情况, 主瓣约束条件  $\mathbf{C}$  不易构造。

## 参考文献

- [1] Dolph C L. A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beam width and sidelobe level. *Proc. IRE*, 1946, 34(6): 335-348.
- [2] Taylor T T. Design of line source antennas for narrow beamwidth and low sidelobes. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1960, 8(6): 17-22.
- [3] Hyneman R T. A technique for the synthesis of line-source antenna patterns having specified sidelobe behavior. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1968, 16(7): 430-435.
- [4] Elliott R S. Design of line source antennas for narrow beamwidth and asymmetric low sidelobes. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1975, 23(5): 100-107.
- [5] Perini J. Note on antenna pattern synthesis using numerical iterative methods. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1971, 19(3): 284-286.
- [6] Ng B P, Er M H, and Kot A C. A flexible array synthesis method using quadratic programming. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1993, 41(11): 1541-1550.
- [7] Olen C A and Compton R T. A numerical pattern synthesis algorithm for arrays. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1990, 38(10): 1666-1676.
- [8] Tseng C Y and Griffiths L J. A simple algorithm to achieve desired patterns or arbitrary arrays. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, 40(11): 2737-2746.
- [9] Zhou Y and Ingram M A. Pattern synthesis for arbitrary arrays using an adaptive array method. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1999, 47(5): 862-869.
- [10] Lebret H and Boyd S. Antenna array pattern synthesis via convex optimization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1997, 45(3): 526-532.
- [11] Wang F, Balakrishnan V, and Zhou Y. Optimal array pattern synthesis using semidefinite programming. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 51(5): 1172-1183.
- [12] Yan S F, Ma Y L, and Yang K D. Optimal array pattern synthesis with desired magnitude response. *Sonar Detection Systems I*, 2004, 14(11): 510-522.
- [13] Li J, Stoica P, and Wang Z S. Doubly constrained robust capon beamformer. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2004, 52(9): 2407-2422.
- [14] Tseng C Y. Minimum variance beamforming with phase-independent derivative constraints. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1992, 40(3): 285-294.
- [15] Guo Q H, Liao G S, and Wu Y T. Pattern synthesis method for arbitrary arrays based on LCMV criterion. *Electronics Letters*, 2003, 39(23): 1628-1630.
- [16] Sturm J F. Using SeDuMi 1.02, A matlab toolbox for optimization over symmetric cones (updated for version 1.05). *Optimization Methods and Software*, 1999, 11(8): 625-653.

张霞: 女, 1983年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理、智能方法在信号处理中的应用。

陶海红: 女, 1976年生, 副教授, 硕士生导师, 感兴趣的方向为阵列信号处理、遗传算法、波形设计。

廖桂生: 男, 1963年生, 教授, 博士生导师, 感兴趣的方向为阵列信号处理、动目标检测。