第 30 卷第 6 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.30No.6
2008 年 6 月 Journal of Electronics & Information Technology Jun. 2008

一种高码率低复杂度准循环 LDPC 码设计研究

敬龙江 林竞力 朱维乐
(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

摘 要：该文设计了一种特殊的高码率准循环低密度校验(QC-LDPC)码，其校验矩阵以单位矩阵的循环移位阵为基本单元，与随机构造的 LDPC 码相比可节省大量存储单元。利用该码校验矩阵的近似下三角特性，一种高效的递推编码方法被提出，它使得该码编码复杂度与码长成线性关系。另外，该文提出一种分析 QC-LDPC 码二分图中短长度环分布情况的方法，并且给出了相应的不含长为 4 环 QC-LDPC 码的构造方法。计算机仿真结果表明，新码不但编码简单，而且具有高纠错能力、低误码平层。

关键词：QC-LDPC 码；BP 迭代译码；高效编码；二分图
中图分类号：TN911.22 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2008)06-1385-05

A Class of High-Rate Low-Complexity QC-LDPC Codes

Jing Long-jiang Lin Jing-li Zhu Wei-le
(*College of Electronic Engineering of UESTC*, *Chengdu* 610054, *China*)

Abstract: This paper proposes a class of Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check (QC-LDPC) codes with high code rates, which is an efficient encoding algorithm due to the almost lower triangular form and simple structure of their parity-check matrices. Since the parity-check matrix of the QC-LDPC code is composed of blocks of circulant matrices, the required memory for storing it can be significantly reduced, compared with randomly constructed LDPC codes. Based on the quasi-cyclic structure of the parity-check matrix, a new approach is proposed to analyze the distribution of the short length cycles of their bipartite graph, and a corresponding construction method of QC-LDPC codes without cycles of length 4 is presented. Simulation results show that the proposed codes not only have low encoding complexity and low error floor but also perform well with iterative decoding.

Key words: QC-LDPC code; BP iterative decoding; Efficient encoding; Bipartite graph

1 引言

低密度奇偶校验(LDPC)码[1]最初由 Gallager 提出，经过几十年沉寂后，于上世纪九十年代中期又被 MacKay 等人重新发现。它是一种基于稀疏校验矩阵的线性分组码，在采用诸如 BP(Belief Propagation)等信息迭代译码算法时，其性能有逼近 Shannon 限的能力[2]。此外，其结构适合高速并行译码，渐进性能也比 Turbo 码好。因此，近十年来，它已成为纠错编码领域的研究热点。

尽管 LDPC 码有诸多优点，但复杂的编码问题阻碍了它在实际通信系统中的应用。常规 LDPC 码编码方法是通过生成矩阵来实现编码，由于稀疏校验矩阵转换为生成矩阵后不能保证它的稀疏性，因此算法复杂度为 $O(N^2)$， N 为码长。文献[3]凭借 QC-LDPC 码的循环结构特性，利用反馈移位寄存器实现线性复杂度的 LDPC 编码，但其生成矩阵中的子阵不一定稀疏，它们将占用大量存储单元。为充分利用校验矩阵的稀疏特性，Li Ping 等提出一类具有下三角校验矩阵的半随机 LDPC 码[4]，其编码复杂度与码长成线性关系，同样，这类码校验矩阵的存储也会消耗大量硬件资源；Richardson 等提出利用校验矩阵的行和列重排来得到近似下三角校验矩阵，从而实现复杂度为 $O(N)+O(g^2)$ ($g<N$)的编码[5]，当 g 较大时，该方法不可取；而文献[6，7]则直接构造了有近似下三角校验矩阵的 QC-LDPC 码，它们通过准循环结构解决了校验矩阵的存储问题，并且利用改进后的 Richardson 编码方法，使得前者复杂度为 $O(N)+O(4L^2)$， L 为子矩阵的阶数，后者在某些位置取特殊子矩阵时复杂度为 $O(N)$ 。本文设计了一种 QC-LDPC 码，其校验矩阵也是近似下三角的，且校验矩阵第一行最右边的 1 个“1”元素被“0”元素取代，针对该结构，我们提出一种递推方法完成编码，使其复杂度为 $O(N)$ 。

LDPC 码可用二分图来表示，二分图中环的大小和分布是决定码性能的重要因素之一。在二分图不存在环时，和积迭代译码算法(SPA)可逼近最大似然译码算法(MLD)。相反，短长度的小环会阻碍迭代译码过程收敛、降低 LDPC 码的译码性能。因此，在码的构造过程中，人们总是尽量避免小环出现，特别是长为 4 的环。通常利用节点的树形拓扑结构来

2006-11-06 收到，2007-03-21改回
韩国三星公司项目基金(HO4010201 WO20340)资助课题

确定经过该节点的环分布情况。文献[8]利用校验矩阵与其转置矩阵相乘所得矩阵的非对角线元素来检验该 LDPC 码是否有长为 4 的环。将该思想应用到 QC-LDPC 码中，本文提出一种分析 QC-LDPC 码小环分布的简单方法，在此基础上，一种不含长为 4 环的 QC-LDPC 码的构造方法被给出。

本文结构如下，首先对 QC-LDPC 码作了概述，提出 QC-LDPC 码环分布的简单分析方法，并在此基础上给出最小环长为 6 的 QC-LDPC 码的构造方法；然后设计了一种有近似下三角校验矩阵的 QC-LDPC 码，并给出了针对该码的特殊编码方法；接着给出了该方法的仿真结果；最后得出关于构造高码率可实现 LDPC 码的结论。

2 QC-LDPC码

QC-LDPC 码是一类非常特殊的高度结构化的 LDPC 码，它的校验矩阵以单位阵的循环移位阵(在此简称移位阵)和零方阵为子阵。以 $\boldsymbol{P}$ 表示大小为 $L\times L$ 的单位矩阵的 1 次循环移位阵，

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\tag{1}$$

则 $\boldsymbol{P}^i$ 表示单位阵的 i 次循环移位阵，$0\le i<L$。在此 $\boldsymbol{P}^\infty$ 表示零方阵。假定 $mL\times nL$ 的矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{a_{11}}&\boldsymbol{P}^{a_{12}}&\cdots&\boldsymbol{P}^{a_{1n}}\\\boldsymbol{P}^{a_{21}}&\boldsymbol{P}^{a_{22}}&\cdots&\boldsymbol{P}^{a_{2n}}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{P}^{a_{m1}}&\boldsymbol{P}^{a_{m2}}&\cdots&\boldsymbol{P}^{a_{mn}}\end{bmatrix}\tag{2}$$

其中 $a_{ij}\in\{0,1,\cdots,L-1,\infty\}$，$1\le i\le m$，$1\le j\le n$，则以 $\boldsymbol{H}$ 为校验矩阵的码 $\boldsymbol{C}$ 具有准循环特性。即 $\forall\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_{n-1})\in\boldsymbol{C}$，满足

$$\left(\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{P}^i,\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{P}^i,\cdots,\boldsymbol{c}_{n-1}\boldsymbol{P}^i\right)\in\boldsymbol{C},\quad 0\le i<L\tag{3}$$

那么，我们称码 $\boldsymbol{C}$ 为 QC-LDPC 码。当 $\boldsymbol{H}$ 满秩时，无论码长 N=nL 为多少，其码率都为 $R=(nL-mL)/nL=1-(m/n)$。在校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中，每个移位阵第一行“1”元素位置确定后，其它“1”元素位置就相应确定了。因此，QC-LDPC 码校验矩阵所需存储单元仅占随机构造 LDPC 码的 $1/L$。

2.1 QC-LDPC 码小环分布

众所周知，LDPC 码的译码性能与其对应二分图最小环长和小环分布有密不可分的联系，为分析 QC-LDPC 码的译码性能，有必要掌握其小环分布的情况。

在此，令 $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ 为

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-a_{11}}&\boldsymbol{P}^{-a_{12}}&\cdots&\boldsymbol{P}^{-a_{1n}}\\\boldsymbol{P}^{-a_{21}}&\boldsymbol{P}^{-a_{22}}&\cdots&\boldsymbol{P}^{-a_{2n}}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{P}^{-a_{m1}}&\boldsymbol{P}^{-a_{m2}}&\cdots&\boldsymbol{P}^{-a_{mn}}\end{bmatrix}\tag{4}$$

$\boldsymbol{S}_c=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}$，其大小为 $nL\times nL$，由式(2)得

$$\boldsymbol{S}_c=\begin{bmatrix}m\boldsymbol{P}^0&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{P}^{(a_{i2}-a_{i1})\bmod L}&\cdots&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{P}^{(a_{in}-a_{i1})\bmod L}\\\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{P}^{(a_{i1}-a_{i2})\bmod L}&m\boldsymbol{P}^0&\cdots&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{P}^{(a_{in}-a_{i2})\bmod L}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{P}^{(a_{i1}-a_{in})\bmod L}&\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{P}^{(a_{i2}-a_{in})\bmod L}&\cdots&m\boldsymbol{P}^0\end{bmatrix}\tag{5}$$

将式(5)变形得如下形式:

$$\boldsymbol{S}_c=\begin{bmatrix}m\boldsymbol{P}^0&\sum_{l=0}^{L-1}\alpha_{21l}\boldsymbol{P}^l&\cdots&\sum_{l=0}^{L-1}\alpha_{n1l}\boldsymbol{P}^l\\\sum_{l=0}^{L-1}\alpha_{12l}\boldsymbol{P}^l&m\boldsymbol{P}^0&\cdots&\sum_{l=0}^{L-1}\alpha_{n2l}\boldsymbol{P}^l\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\sum_{l=0}^{L-1}\alpha_{1nl}\boldsymbol{P}^l&\sum_{l=0}^{L-1}\alpha_{2nl}\boldsymbol{P}^l&\cdots&m\boldsymbol{P}^0\end{bmatrix}\tag{6}$$

其中 $0\le\alpha_{ijl}\le m$，$1\le i,j\le n$ 且 $i\ne j$。

定理 1 任意 QC-LDPC 码对应二分图中，校验矩阵第 i 列移位阵对应的 L 个变量节点被 $\sum_{j=1,j\ne i}^{n}\sum_{l=0,\alpha_{ijl}>1}^{L-1}L\binom{\alpha_{ijl}}{2}$ 个长为 4 的环经过，而该二分图长为 4 环总个数为 $\boldsymbol{C}y_4=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\ne i}^{n}\sum_{l=0,\alpha_{ijl}>1}^{L-1}L\binom{\alpha_{ijl}}{2}$。

证明 假定校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中任意 4 个子阵 $\boldsymbol{P}^{a_{ki}}$，$\boldsymbol{P}^{a_{kj}}$，$\boldsymbol{P}^{a_{lj}}$ 和 $\boldsymbol{P}^{a_{li}}$ 构成一长度为 4 的闭合环路，由文献[9]可知，如果 $(a_{ki}-a_{kj})\bmod L=(a_{li}-a_{lj})\bmod L$，那么这 4 个子阵所对应二分图的节点间有 L 个长为 4 的环。由式(6)可见，对于 $0\le l<L$，在第 i 和 j 列子阵间，如果 $\alpha_{ijl}\ge 2$，则由 $2\alpha_{ijl}$ 个子阵构成了 $\binom{\alpha_{ijl}}{2}$ 个长为 4 的闭合环路，它们满足

$$\underbrace{(a_{ki}-a_{kj})\bmod L=\cdots=(a_{li}-a_{lj})\bmod L}_{\alpha_{ijl}}=l\tag{7}$$

因此，有 $\sum_{l=0,\alpha_{ijl}>1}^{L-1}L\binom{\alpha_{ijl}}{2}$ 个长为 4 的环同时经过第 i 和 j 列子阵对应的二分图的变量节点。校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 一共有 n 列子阵，所以共有 $\sum_{j=1,j\ne i}^{n}\sum_{l=0,\alpha_{ijl}>1}^{L-1}L\binom{\alpha_{ijl}}{2}$ 个长为 4 的环经过校验矩阵第 i 列子阵对应的 L 个变量节点，而该二分图长为 4 环总个数为 $\boldsymbol{C}y_4=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\ne i}^{n}\sum_{l=0,\alpha_{ijl}>1}^{L-1}L\binom{\alpha_{ijl}}{2}$。 证毕

类似地，令 $\boldsymbol{S}_r=\widetilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{S}_r=\begin{bmatrix}n\boldsymbol{P}^0&\sum_{l=0}^{L-1}\beta_{21l}\boldsymbol{P}^l&\cdots&\sum_{l=0}^{L-1}\beta_{m1l}\boldsymbol{P}^l\\\sum_{l=0}^{L-1}\beta_{12l}\boldsymbol{P}^l&n\boldsymbol{P}^0&\cdots&\sum_{l=0}^{L-1}\beta_{m2l}\boldsymbol{P}^l\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\sum_{l=0}^{L-1}\beta_{1ml}\boldsymbol{P}^l&\sum_{l=0}^{L-1}\beta_{2ml}\boldsymbol{P}^l&\cdots&n\boldsymbol{P}^0\end{bmatrix}\tag{8}$$

容易得出：任意 QC-LDPC 码对应二分图中，校验矩阵第 i 行移位阵对应的 L 个校验节点被 $\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\sum_{l=0,\beta_{ijl}>1}^{L-1}L\binom{\beta_{ijl}}{2}$ 个长为 4 的环经过，而该二分图长为 4 环总个数为 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1,j\neq i}^{m}\sum_{l=0,\beta_{ijl}>1}^{L-1}L\binom{\beta_{ijl}}{2}=\boldsymbol{C}y_4$。

2.2 无长为 4 环的 QC-LDPC 码构造方法

在 LDPC 码对应二分图为树时，SPA 译码算法可逼近最大似然译码算法，但在图中有环，特别是有长为 4 环时，LDPC 码的译码性能会受到影响，这是由于经过 2 次迭代后，网络中传递的概率信息就会发生相关，这使得译码无法收敛或收敛速度变慢。在实际应用中，由于 LDPC 码长度有限(一般在 10^4 量级或以下)，这使得二分图中短环出现不可避免。对此，人们提出了多种无长为 4 环的 QC-LDPC 码的构造方法[10−13]，这些方法要么是基于代数理论的，要么是基于有限几何理论的。而在此，根据定理 1，通过搜索合适的单位矩阵移位次数 a_{ij}，$1\le i\le m$，$1\le j\le n$，给出一种无长为 4 环的 QC-LDPC 码的构造方法。

该方法具体描述如下：

(1)构造一个由 $m\times n$ 个大小皆为 $L\times L$ 的零方阵组成的矩阵 $\boldsymbol{H}'$。

(2)随机选择 a_{i1} 和 a_{1j} 构造移位矩阵 $\boldsymbol{P}^{a_{i1}}$ 和 $\boldsymbol{P}^{a_{1j}}$，$0\le a_{i1},a_{1j}<L$，$0<i\le m$，$1<j\le n$，由它们取代 $\boldsymbol{H}'$ 中对应位置的零方阵。

(3)随机选择 a_{ij} 构造移位矩阵 $\boldsymbol{P}^{a_{ij}}$，$0\le a_{ij}<L$，$1<i\le m$，$1<j\le n$，由之取代 $\boldsymbol{H}'$ 中对应位置的子阵。

(4)计算 $\boldsymbol{S}_c=\widetilde{\boldsymbol{H}}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}'$，对于 $1\le i,j\le n$，$0\le l<L$，如果有 $\alpha_{ijl}\ge 2$，则回到步骤(3)，从新选择 a_{ij}；否则按图 1 所示顺序构造下一个移位矩阵，并由之取代 $\boldsymbol{H}'$ 中对应位置的零方阵，直到构造出合适的移位矩阵 $\boldsymbol{P}^{a_{mn}}$，从而获得校验矩阵 $\boldsymbol{H}$。

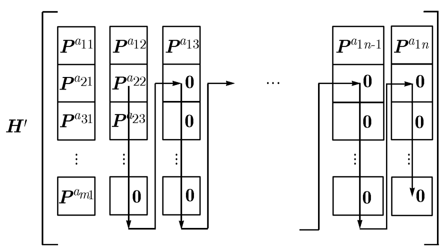

图 1 无长为 4 环 QC-LDPC 码校验矩阵中移位子阵构造顺序

由此，可以构造出最小环长为 6 的 QC-LDPC 码。由于该搜索算法复杂度随 m，n 和 L 增大而迅速增大，因此本文利用该算法主要实现 m 较小(4～6)而 n 较大(>20)情况下 LDPC 码的构造，也即是说，该方法较适用于高码率的 LDPC 码的构造。

3　QC-LDPC码高效编码

LDPC码属线性分组码，如果按线性分组码的编码方法，则校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 需通过高斯消去转化成 $[\boldsymbol{G}\mid\overline{\boldsymbol{I}}]$ 形式的矩阵，其中 $\boldsymbol{G}$ 为 $(N-M)M$ 的矩阵，而 $\overline{\boldsymbol{I}}$ 为 M 阶的单位矩阵。由于校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 经过高斯消去之后，$\boldsymbol{G}$ 不再具有稀疏性，所以上述编码方法复杂度为 $(N-M)M/2=R(1-R)N^2/2$。因此，为降低LDPC码的编码复杂度，应尽量利用其校验矩阵的稀疏性。基于前面对QC-LDPC码结构的分析，在此提出一种具有近似下三角校验矩阵的不规则QC-LDPC码，并给出该LDPC码的高效编码方法。该方法不但充分利用了QC-LDPC码校验阵的稀疏性，而且利用了校验矩阵的准循环特性来降低存储单元的消耗。

首先，将校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 分为信息部分 $\boldsymbol{H}_I$ 和校验部分 $\boldsymbol{H}_P$，即 $\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_I\mid\boldsymbol{H}_P]$，其中 $\boldsymbol{H}_I$ 大小为 $mL\times kL$ (其中 $k=n-m$)，$\boldsymbol{H}_P$ 大小为 $mL\times mL$。为获得高效编码，限制 $\boldsymbol{H}_P$ 为近似下三角阵。下面是该校验矩阵的具体形式：

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_I\mid\boldsymbol{H}_P]=\left[\begin{array}{c}\underbrace{\begin{matrix}\boldsymbol{P}^{a_{11}} & \boldsymbol{P}^{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{P}^{a_{1k}}\\ \boldsymbol{P}^{a_{21}} & \boldsymbol{P}^{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{P}^{a_{2k}}\\ \boldsymbol{P}^{a_{31}} & \boldsymbol{P}^{a_{32}} & \cdots & \boldsymbol{P}^{a_{3k}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{P}^{a_{m1}} & \boldsymbol{P}^{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{P}^{a_{mk}}\end{matrix}}_{\boldsymbol{H}_I}\end{array}\begin{array}{c}\underbrace{\begin{matrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}' & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{matrix}}_{\boldsymbol{H}_P}\end{array}\right] \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{H}_I$ 由 $m\times k$ 个大小为 $L\times L$ 的循环移位阵组成；“$\boldsymbol{0}$”和 $\boldsymbol{I}$ 分别表示大小为 $L\times L$ 的零矩阵和单位矩阵；而 $\boldsymbol{I}'$ 定义为

$$\boldsymbol{I}'=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{10}$$

由于LDPC是线性分组码，所以当且仅当

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

时，$\boldsymbol{c}$ 为可用码字。将 $\boldsymbol{c}$ 分成 $m+1$ 部分，即 $\boldsymbol{c}=(S,U^1,\cdots,U^m)$，其中 S 表示系统部分，而 $(U^1,\cdots,U^m)$ 表示校验部分。由于校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 以单位矩阵的循环移位阵和零方阵组成，且 $\boldsymbol{H}_P$ 为近似下三角阵，则式(11)可写成如下形式：

$$\sum_{j=1}^{k}S_{(j-1)L+1+(a_{ij}+\gamma-1)\bmod L}+U_\gamma^i+U_\gamma^{(i\bmod m)+1}=0\bmod 2 \tag{12}$$

其中 $1\le i\le m$，$1\le\gamma\le L$；S_l 表示码字系统部分第 l 个比特，$1\le l\le kL$；U_γ^i 表示码字校验部分 U^i 的第 γ 个比特，$1\le\gamma\le L$。利用矩阵 $\boldsymbol{I}'$ 的特殊结构，式(12)可变形为

$$\left.\begin{aligned}&U_1^1=\sum_{j=1}^{k}S_{(j-1)L+1+a_{1j}}\bmod 2\\ &U_\gamma^i=\left(\sum_{j=1}^{k}S_{(j-1)L+1+(a_{ij}+\gamma-1)\bmod L}+U_\gamma^{(i\bmod m)+1}\right)\bmod 2\\ &U_l^1=\left(\sum_{j=1}^{k}S_{(j-1)L+1+(a_{1j}+l-1)\bmod L}+U_{l-1}^2\right)\bmod 2\\ &\qquad 1<i\le m,1\le\gamma\le L,2\le l\le L\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由此可见，整个编码过程为：先将LDPC码系统部分的 kL 个信息比特输出到信道，再通过它们直接计算校验部分 U^1 的第1个比特 U_1^1 ，然后按 U_1^m ， U_1^{m-1} ，…， U_1^2 ， U_2^1 ， U_2^m ， U_2^{m-1} ，…， U_2^2 ，…， U_L^1 ， U_L^m ， U_L^{m-1} ，…， U_L^2 顺序逐比特递推出该LDPC码校验部分的 mL 个校验比特。

假定码长 $N=nL$ ，码率为 R ，校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的平均行重为 ρ ，在仅考虑 XOR (模2和)运算，忽略循环移位计算情况下，可获得该编码算法的复杂度 ψ

$$\psi = N(1-R)(\rho-2)-1 \tag{14}$$

由此可见，该方法具有 $O(N)$ 编码复杂度。

4 数值与仿真结果

利用第 3 节提出的 QC-LDPC 码结构，按照前面给出的码构造方法，本文设计了 2 个无长为 4 环的高码率 QC-LDPC 码，并给出了它们在 BP 迭代译码，BPSK 调制，AWGN 信道下的译码性能。在此设定 BP 算法最大迭代次数为 50。这些码均采用第 3 节提出的高效编码方法。

取 $L=47$ ， $m=4$ ， $k=43$ ，用本文提出方案构造了码率 0.915，码长 2209 的 QC-LDPC 码，该码最小环长为 6，其误比特性能曲线在图 2 中给出。由图可见，该码在误比特率为 3×10^{-8} 时未出现误码平层。图 2 也给出了随机构造的列重分别为 3，4 和 5 的，且具有相同码率和长度的规则 LDPC 码的误比特率曲线。在误比特率为 2×10^{-6} 时，本文提出的 QC-LDPC 码能比列重为 3 的随机 LDPC 码多提供 0.75dB 的编码增益, 比列重为 5 的随机 LDPC 码多提供 0.25dB 的编码增益。由前所述可知，该 QC-LDPC 码编码需要 $N(1-R)(\rho-2)-1=47^2\times(4/47)\times(45-2)-1=8083$ 次模 2 和运算，而随机 LDPC 码大概需要 190000 次模 2 和运算。由此可见，通过这种方法构造的高码率 LDPC 码不仅性能好于随机构造的规则 LDPC 码，而且具有很小的编码复杂度。

取 $L=23$ ， $m=5$ ， $k=18$ ，构造码率 0.783，码长 529 的 QC-LDPC 码，该码最小环长为 6，其译码性能曲线在图 3 中给出。为作性能比较，在此也给出了具有相同长度和码率的随机构造的QC-LDPC码和另一类QC-LDPC码——Array Code 码[13]的性能曲线。其中 Array Code 码的校验矩阵由 5×23 个大小为 23×23 的移位子阵构成，对应二分图最小环长为 6，而随机构造的 QC-LDPC 码也具有本文第 3 节提出的近似下三角校验矩阵结构，只是 $\boldsymbol{H}_I$ 中子矩阵的移位次数是随机选择的。由图可见，新 QC-LDPC 码性能明显好于另外两个码，在误比特率为 10^{-6} 时，新 QC-LDPC 码比 Array Code 码好 0.75dB。通过定理 1，计算出本文随机构造的 QC-LDPC 码对应二分图有 1978 个长为 4 的环。容易看出，这些短长度环对译码性能影响较大，该码在误比特率为 10^{-3} 时就开始出现误码平层。

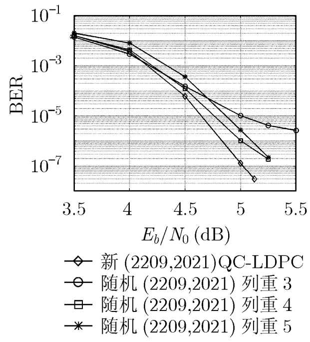

图 2 新 QC-LDPC 码与随机构造的规则 LDPC 码性能比较

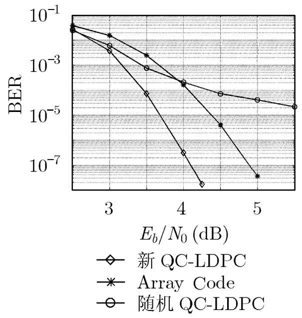

图 3 新 QC-LDPC 码与其它 QC-LDPC 码性能比较

5 结束语

本文构造了一类有近似下三角校验矩阵的高码率QC-LDPC码，给出了其简单的编码算法，并证明在码长为 N ，码率为 R ，校验矩阵平均行重为 ρ 时，编码复杂度为 $N(1-R)(\rho-2)-1$ 。另外，本文提出了一种分析QC-LDPC码二分图中短长度环分布情况的方法，并且给出了相应的不含长为4环QC-LDPC码的构造方法。计算机仿真结果表明，新构造的高码率QC-LDPC码不但编码简单，而且在AWGN信道中具有高纠错能力、低误码平层 。

参 考 文 献

[1] Gallager R G. Low density parity check codes. *IRE Trans. on Inf. Theory*, 1962, 8(3): 21–28.

[2] MacKay D J C. Good error-correcting codes based on very sparse matrices. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 1999, 45(2): 399–431.

[3] Li Zongwang, Chen Lei, and Zeng Lingqi, *et al.*. Efficient encoding of quasi-cyclic low-density parity-check codes. *IEEE Trans. on Commun.*, 2006, 54(1): 71–81.

[4] Li Ping, Leung W K, and Phamdo N. Low density parity check codes with semi-random parity check matrix. *Electron. Lett.*, 1999, 35(1): 38–39.

[5] Richardson T J and Urbanke R. Efficient encoding of low-density parity-check codes. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 2001, 47(2): 638–656.

[6] 姜明，赵春明，何善宝，等. 低复杂度的LDPC 码联合编译码构造方法研究. 通信学报, 2005, 26(2): 80–86.
Jiang Ming, Zhao Chun-ming, and He Shan-bao, *et al.*. Joint encoding-decoding construction of LDPC codes. *Journal on Communications*, 2005, 26(2): 80–86.

[7] Myung Seho, Yang Kyeongcheol, and Kim Jaeyoel. Quasi-cyclic LDPC codes for fast encoding. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 2005, 51(8): 2894–2901.

[8] Xiao Yang and Lee Moon Ho. Low complexity MIMO-LDPC CDMA systems over multipath channels[J]. *IEICE Trans. on Commun.*, 2006, E89-B(5): 1713–1717.

[9] Kim K S, Lee S H, and Kim Y H, *et al.*. Design of binary LDPC code using cyclic shift matrices. *Electron. Lett.*, 2004, 40(5): 325–326.

[10] Kou Y, Lin S, and Fossorier M. Low-density parity-check codes based on finite geometries: A rediscovery and new results. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 2001, 47(7): 619–637.

[11] Xu J, Chen L, and Zeng L Q, *et al.*. Construction of low-density parity-check codes by superposition. *IEEE Trans. on Commun.*, 2005, 53(2): 243–251.

[12] Ammar Bassem, Honary Bahram, and Kou Yu, *et al.*. Construction of low-density parity-check codes based on balanced incomplete block designs. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 2004, 50(6): 1257–1268.

[13] Fan J L. Array codes as low-density parity-check codes. Proc. 2nd Int. Symp. Turbo Codes, Brest, France, 2000: 543–546.

敬龙江：　男，1974 年生，博士生，研究方向为现代通信系统中的信道编码与调制技术.

林竞力：　男，1977 年生，博士生，研究方向为现代通信系统中的信道编码与调制技术.

朱维乐：　男，1940 年生，教授，研究方向为数字通信系统、数字视频和 HDTV 系统.