一类针对图像放大中反问题的变分模

李　敏[①]　　卢成武[①②]　　冯象初[①]

[①](西安电子科技大学理学院　西安　710071)

[②](重庆文理学院数学与计算机科学系 重庆 402160)

摘　要：在解决图像放大中的反问题时，Chambolle 变分模型需要大量的计算迭代。针对这种不足，该文提出一类新的基于 Besov 空间的变分模型来解决相应问题。利用 Besov 半范数与小波系数范数的等价性，新模型将所求解的变分问题完全转化为基于小波域的变分序列，其极小化过程证明这些序列的最优解都可以表示为基于小波域的正交投影。实验结果表明：新方法处理后的放大图像边缘轮廓清晰、光滑，有意义的细节特征得到保留，去噪效果令人满意。

关键词：小波阈值；变分泛函；极小化；图像放大

中图分类号：TN911.73　　　　**文献标识码**：A　　　　**文章编号**：1009-5896(2008)06-1291-04

A Class of Variational Model for Inverse Problem in Image Zooming

Li Min[①]　　Lu Cheng-wu[①②]　　Feng Xiang-chu[①]

[①](*School of Science*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

[②](*Department of Mathematics and Computer Science*, *Chongqing University of Arts and Sciences*, *Chongqing* 402160, *China*)

Abstract: To a mass of computation iteration of Chambolle model in solving the inverse problem of image zooming, a class of new model that is based on Besov space is put forward. The new model translates the variational problem that is solved into a sequence based wavelet field through the equivalence between Besov semi-norm and the norm of wavelet coefficients. And the process of minimization shows that the optimization solutions of the sequence can be represented as the orthogonal projection onto wavelet field. Finally, not only the zoomed images have sharper and smooth edges, but also the details of images are kept, resulting in the naturalness. In addition, the effect of denoising is very satisfactory.

Key words: Wavelet shrinkage; Variational functional; Minimization; Image zooming

1　引言

近二十年来，由于人类视觉对图像质量的高追求，数学方法处理图像已成为一个重要的研究课题，其中，小波分析和基于偏微分方程的变分泛函尤其备受青睐。从表面上看，小波阈值和变分泛函是数学领域中两个不同的概念。事实上，这二者相互影响、相互作用，彼此之间存在着紧密的联系.

针对这种联系，Chambolle 提出小波软阈值函数可以看作是 Besov 空间 $B_{1,1}^1(\Omega)$ 中变分问题的最优解[1]，并把它成功地用于图像压缩和图像去噪。随后，他又进一步解释在图像反问题中平移不变的小波阈值可以理解为一种新的光滑尺度空间[2]。Lorenz 把二者之间的联系推广到 Besov 空间 $B_{p,p}^s(\Omega)$，发现在非凸的情形下变分问题的最优解可以等价为小波软、硬阈值的插值[3, 4]。最近，Daubechies 等人又把小波软阈值和 Besov 空间 $B_{1,1}^1(\Omega)$ 中变分泛函的等价性应用于一种新的图像分解模型[5]。至此，小波阈值和变分泛函之间的等价关系就被广泛地用来解决图像中的反问题。

2004 年，Chambolle 针对基于全变差的变分极小化模型[6]提出一种来自凸对偶理论的新算法，并把它应用于无噪图像放大。但是，遗憾的是 Chambolle 模型的极小化需要大量的数值迭代。为此，受前人工作的启发，本文建议将 Besov 半范数 $|\cdot|_{B_{p,p}^s}(\Omega)$ ($s>0$, $1\le p\le\infty$)引入 Chambolle 模型，利用小波域的投影来求解新模型。结果发现：在具体情况下，新模型的最优解都可以看作是凸集上不同的小波全局阈值函数。这样就有效地避免了 Chambolle 模型中繁琐的计算迭代。最后，基于无噪图像和带噪图像的放大实验分别表明：新模型处理后的图像质量要明显好于 Chambolle 模型。

2　Chambolle 模型

Guichard 和 Malgouyres 认为在图像放大中需要解决的反问题一般为[7, 8]

$$\min_{u\in X}\frac{\|Au-g\|^2}{2\lambda}+J(u)\tag{1}$$

其中 X 表示欧几里德空间 $R^{N\times N}$，$\|\cdot\|$ 表示 X 上的欧几里德范

2006-10-09 收到，2007-06-21 改回

数，$J(u)=\sum_{1\le i,j\le N}\left|(\nabla u)_{i,j}\right|$ 是二维图像 u(大小为 $N\times N$)的离散全变差，$g\in X$ 是一幅低分辨率的图像，A 是子空间 $Z\subset X$ 上的正交投影。Chambolle 在其新算法[6]中把 Z 取作向量 $g_{i,j}$ 的集合，即对于每一个 $k,l\le N/2$，都有 $g_{2k,2l}=g_{2k+1,2l}=g_{2k,2l+1}=g_{2k+1,2l+1}$。因此，在该算法中 u 就表示 g 被放大两倍以后的图像。所以，就有 $Ag=g$。这时，式(1)中的 $\|Au-g\|$ 就可以表示为

$$\|Au-g\|=\|A(u-g)\|=\min_{\omega\in Z^{\perp}}\|u-g-\omega\| \tag{2}$$

因此，Chambolle 模型的一般形式为

$$\min_{u\in X,\omega\in Z^{\perp}}\frac{\|u-(g+\omega)\|^2}{2\lambda}+J(u) \tag{3}$$

通过交替求解关于 ω 和 u 的能量极小化，对每一个 $n\ge 0$，Chambolle 给出了式(3)的最优解为[6]

$$\begin{cases}u_n=(g+\omega_n)-\pi_{\lambda K}(g+\omega_n)\\ \omega_{n+1}=\pi_{Z^{\perp}}(u_n-g)\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\pi_{\lambda K}$ 为集合 $K:=\{\mathrm{div}\xi:\xi\in C_c^1(\Omega;R^2),|\xi(x)|\le 1\ \forall x\in\Omega\}$ 上的非线性投影，$\omega_0=0$。

3 新模型及其极小化

在这部分，将详细地讨论新模型。

取 X 为 Besov 空间 $B_{p,p}^s(\Omega)$ ($s>0$)，式(3)中的离散全变差 $J(u)$ 就被 Besov 半范数 $|\cdot|_{B_{p,p}^s(\Omega)}$ 所代替。同时，取欧几里德范数 $\|u-g-\omega\|$ 为 L_2-范数。那么，需要求解的变分极值问题就转化为

$$\min_{u,\omega}\left\{\frac{\|u-(g+\omega)\|_{L_2(\Omega)}^2}{2\lambda}+|u|_{B_{p,p}^s(\Omega)}\right\} \tag{5}$$

由于 $L_2(\Omega)=B_{2,2}^0(\Omega)$，故式(5)中相应范数的小波系数等价范数为[4,5]

$$\begin{cases}\|u-(g+\omega)\|_{L^2(\Omega)}^2\approx\sum_{\gamma\in J}\left|u_\gamma-(g_\gamma+\omega_\gamma)\right|^2\\ |u|_{B_{p,p}^s(\Omega)}\approx\left(\sum_{\gamma\in J}2^{s|\gamma|p}2^{|\gamma|(p-2)}\left|u_\gamma\right|^p\right)^{1/p}\end{cases} \tag{6}$$

其中 $J=\left\{\gamma=(i,j,k):k\in J_j,j\in Z,i=1,2,3\right\}$，$|\gamma|=j$，$u_\gamma$，$g_\gamma$，$\omega_\gamma$ 分别表示第 γ 个小波系数。将式(6)代入式(5)，得到基于小波域的等价变分序列：

$$\min_{u_\gamma,\omega_\gamma}\left\{\frac{\sum_{\gamma\in J}\left(u_\gamma-\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right)\right)^2}{2\lambda}+\phi\left(\left(u_\gamma\right)\right)\right\} \tag{7}$$

其中 $\phi\left(\left(u_\gamma\right)\right)=\left(\sum_{\gamma\in J}2^{s|\gamma|p}2^{|\gamma|(p-2)}\left|u_\gamma\right|^p\right)^{1/p}$。

显然，这时 ϕ 是一阶正齐次的(即 $\phi((\delta u_\gamma))=\delta\phi((u_\gamma))$，其中 $\delta>0$)。由于正的齐次函数与凸集之间的对偶性只对凸函数存在，所以，本文只考虑 ϕ 在 $1\le p\le\infty$ 时的凸情形。

为了极小化序列式(7)，我们考虑如下两个耦合问题：

(1)假设 ω_γ 确定，求解下列极值问题式(8)的解 u_γ：

$$Q\left(u_\gamma\right)=\min_{u_\gamma}\left(\frac{\sum_{\gamma\in J}\left(u_\gamma-\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right)\right)^2}{2\lambda}+\phi\left(\left(u_\gamma\right)\right)\right) \tag{8}$$

(2) 假设 u_γ 确定，求解下列极值问题式(9)的解 ω_γ：

$$\min_{\omega_\gamma}\frac{1}{2\lambda}\left(\sum_{\gamma\in J}\left(u_\gamma-\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right)\right)^2\right) \tag{9}$$

接下来，首先利用凸分析的对偶结论来求解问题式(8)的极小化。

命题 假设 $g_\gamma\in l^2(J)$，$\omega_\gamma\in l^2(J)$ and $1\le p\le\infty$。那么，式(8)的极小值就可表示为下列形式

$$u_\gamma=\left(Id-\Pi_{\lambda C}\right)\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right) \tag{10}$$

其中 Π_C 是下述凸集 C 上的正交投影：

$$C=\left\{x\in l^2(J)\left|\sum_{\gamma\in J}x_\gamma y_\gamma\le\Phi\left(\left(y_\gamma\right)\right),\forall y\in l^2(J)\right.\right\} \tag{11}$$

证明 因为 ϕ 是一阶正齐次函数，所以，ϕ 的 Legendre-Fenchel 变换 ϕ^* 就是凸集 C 上的指示函数[4]，即

$$\begin{aligned}\phi^*(x_\gamma)&=\sup\left(\left\langle u_\gamma,x_\gamma\right\rangle_{l^2(J)}-\phi(u_\gamma)\right)\\&=\sup\left(\sum_{\gamma\in J}u_\gamma x_\gamma-\phi(u_\gamma)\right)=\begin{cases}0, & \text{if } x_\gamma\in C\\+\infty, & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned} \tag{12}$$

又因为 $\phi^{**}=\phi$，所以，有 $\phi(u_\gamma)=\sup_{x_\gamma\in C}\left(\sum_{\gamma\in J}u_\gamma x_\gamma\right)$。

现在，假设 u_γ 是式(8)的极小值，那么极小值存在的必要条件是

$$0\in\frac{(u_\gamma-g_\gamma-\omega_\gamma)}{\lambda}+\partial\phi\left(\left(u_\gamma\right)\right) \tag{13}$$

根据次导数的逆原理[9]，有

$$u_\gamma\in\partial\phi^*\left(\frac{g_\gamma+\omega_\gamma-u_\gamma}{\lambda}\right) \tag{14}$$

这时，式(14)等价于

$$\frac{g_\gamma+\omega_\gamma}{\lambda}\in\frac{g_\gamma+\omega_\gamma-u_\gamma}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\partial\phi^*\left(\frac{g_\gamma+\omega_\gamma-u_\gamma}{\lambda}\right)$$

因此，$w=(g_\gamma+\omega_\gamma-u_\gamma)/\lambda$ 是对偶问题 $\left\|w-\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right)/\lambda\right\|^2/2+(1/\lambda)\phi^*(w)$ 的极小值。

又因为 ϕ^* 是指示函数式(12)，所以 w 就可以用 $(g_\gamma+\omega_\gamma)/\lambda$ 在凸集 C 上的正交投影来表示，即 $w=\prod_C\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right)/\lambda$。因此，极小化问题式(8)的最优解 u_γ 可以表示为

$$u_\gamma=\left(Id-\Pi_{\lambda C}\right)\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right)$$

证毕

现在，再来求解极小化问题式(9)。利用指示函数式(12)，式(9)可以表示为下列形式：

$$\min_{\omega_\gamma}\left\{\sum_{\gamma\in J}\left(u_\gamma-\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right)\right)^2+\phi^*\left(\frac{\omega_\gamma}{\varepsilon}\right)\right\} \tag{15}$$

类似于极小化问题式(8)的求解，得到式(15)的最优解为

$$\omega_\gamma = \Pi_{\varepsilon C}\left(u_\gamma - g_\gamma\right) \tag{16}$$

因此，新模型式(5)基于小波域的极小值就可概括为

$$u = \left\langle g_\gamma + \omega_\gamma, \phi_\gamma \right\rangle + \sum_{\gamma\in J}\left(\left(Id - \Pi_{\lambda C}\right)\left(g_\gamma + \omega_\gamma\right)\right)\psi_\gamma \tag{17}$$

和

$$\omega = \left\langle u_\gamma - g_\gamma, \phi_\gamma \right\rangle + \sum_{\gamma\in J}\left(\Pi_{\varepsilon C}\left(u_\gamma - g_\gamma\right)\right)\psi_\gamma \tag{18}$$

其中 $\psi_\gamma \in B^r_{p,p}$ $(r > s)$ 表示正交小波基，ϕ_γ 表示尺度函数。

4　有关新模型的实例

在这部分讨论 $p=1$，$p=2$ 和 $p=\infty$ 三种具体情形。

由第三部分的阐述可知：在新模型的具体求解过程中，关键是要找出投影所在的凸集。这时，由 Lorenz 提出的定理 4.4，定理 4.6 和定理 4.7[4]知：

(1) 当 $1<p<\infty$ 时，集合 C 可以表示为

$$C = \left\{x_\gamma \in l^2(J)\left|\left(\sum_{\gamma\in J}2^{-|\gamma|sp^*}2^{|\gamma|\left(p^*-2\right)}\left|x_\gamma\right|^{p^*}\right)^{1/p^*} \le 1, 1/p+1/p^*=1\right.\right\} \tag{19}$$

(2) 当 $p=1$ 时，集合 C 可以表示为

$$C = \left\{x_\gamma \in l^2(J)\left|\sup_{\gamma\in J}2^{-|\gamma|(s-1)}\left|x_\gamma\right| \le 1\right.\right\} \tag{20}$$

(3)当 $p=\infty$ 时，集合 C 可以表示为

$$C = \left\{x_\gamma \in l^2(J)\left|\sum_{\gamma\in J}2^{-|\gamma|(s+1)}\left|x_\gamma\right| \le 1\right.\right\} \tag{21}$$

4.1　光滑性度量为 $|\cdot|_{B^s_{1,1}(\Omega)}$

由式(20)知，当 $\sup_{\gamma\in J}2^{-|\gamma|(s-1)}\left|x_\gamma\right| \le 1$，对任意的 x，就有 $\sum_{\gamma\in J}u_\gamma x_\gamma \le \phi\left(\left(u_\gamma\right)\right)$。所以，投影所在的凸集为

$$\lambda C = \left\{x \in l^2(J)\left|\sup_{\gamma\in J}2^{-|\gamma|(s-1)}\left|x_\gamma\right| \le \lambda\right.\right\} \tag{22}$$

故所求投影 $\prod_{\lambda C}$ 为凸集式(22)上的截断函数，即

$$\begin{aligned}\Pi_{\lambda C}(g_\gamma+\omega_\gamma) &= C_{2^{|\gamma|(s-1)}\lambda}(g_\gamma+\omega_\gamma)\\ &= \begin{cases}2^{|\gamma|(s-1)}\lambda, & g_\gamma+\omega_\gamma \ge \lambda\\ g_\gamma+\omega_\gamma, & \left|g_\gamma+\omega_\gamma\right| < \lambda\\ -2^{|\gamma|(s-1)}\lambda, & g_\gamma+\omega_\gamma \le -\lambda\end{cases}\end{aligned} \tag{23}$$

将式(23)代入式(10)，极小化问题式(8)的最优解 u_γ 就是软阈值函数，即

$$u_\gamma = S_{2^{|\gamma|(s-1)}\lambda}\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right) \tag{24}$$

同理，极小化问题式(9)的最优解为 $\omega_\gamma = C_{2^{|\gamma|(s-1)}\varepsilon}(u_\gamma - g_\gamma)$。

4.2　光滑性度量为 $|\cdot|_{B^s_{2,2}(\Omega)}$

把 $p=2$ 看作是 $1<p<\infty$ 的一个例子。由式(19)知，投影所在的凸集为

$$\lambda C = \left\{x \in l^2(J)\left|\sum_{\gamma\in J}2^{-2|\gamma|s}\left|x_\gamma\right|^2 \le \lambda^2\right.\right\} \tag{25}$$

那么，所求投影就可以用下列的约束极小化问题来刻画

$$\min\sum_{\gamma\in J}\left(x_\gamma - \left(g_\gamma+\omega_\gamma\right)\right)^2 \text{ s.t. } \sum_{\gamma\in J}2^{-2|\gamma|s}\left|x_\gamma\right|^2 \le \lambda^2 \tag{26}$$

借助 Lagrange 乘子 $\mu>0$，式(26)就可转化为下列无约束优化问题

$$\min_{x_\gamma}\left\{F(x_\gamma) = \sum_{\gamma\in J}\left(g_\gamma+\omega_\gamma-x_\gamma\right)^2 + \mu 2^{-2|\gamma|s}\left|x_\gamma\right|^2\right\}$$

令 $F'(x_\gamma)=0$，有

$$x_\gamma = \frac{g_\gamma+\omega_\gamma}{1+\mu 2^{-2|\gamma|s}} \tag{27}$$

将式(27)代入式(25)有

$$\lambda^2 = \sum_{\gamma\in J}\frac{2^{-2|\gamma|s}}{\left(1+\mu 2^{-2|\gamma|s}\right)^2}\left|g_\gamma+\omega_\gamma\right|^2 \tag{28}$$

这时，式(28)的右端是关于 μ 连续并单调递减。由此得出，存在 $\mu>0$，使得式(27)是一个投影。因此，用式(27)代替式(10)中的投影 $\prod_{\lambda C}$，就获得极小化问题式(8)的最优解 u_γ 是依赖于尺度 $|\gamma|$ 的线性阈值算子：

$$u_\gamma = \frac{1}{1+2^{2|\gamma|s+1}\left(\frac{1}{2\mu}\right)}\left(g_\gamma+\omega_\gamma\right) \tag{29}$$

其中 $\mu = 1/(2\lambda)$。同理，$\omega_\gamma = (u_\gamma - g_\gamma)/(1+\mu 2^{-2|\gamma|s})$。

4.3　光滑性度量为 $|\cdot|_{B^s_{\infty,\infty}(\Omega)}$

式(21)表明投影所在的凸集为

$$\lambda C = \left\{x \in l^2(J)\left|\sum_{\gamma\in J}2^{-|\gamma|(s+1)}\left|x_\gamma\right| \le \lambda\right.\right\} \tag{30}$$

用类似于 $p=2$ 的方法，有

$$\begin{cases}u_\gamma = C_{\frac{\mu}{2}2^{-|\gamma|(s+1)}}(g_\gamma+\omega_\gamma)\\ \omega_\gamma = S_{\frac{\mu}{2}2^{-|\gamma|(s+1)}}(u_\gamma-g_\gamma)\end{cases} \tag{31}$$

最后，对小波系数 u_γ 和 ω_γ 分别作相应的小波重构，就得到了新模型(5)在这 3 种情形下的局部极小值 u 和 ω。

5　数值实验

这部分给出两种模型应用于不含噪声和带有噪声图像的放大比较。为了计算的方便，在所有的实验中，选取参数 $\lambda=20$，$\varepsilon=1$ 和 $s=1$。此外，新模型中涉及的小波函数通常选择具有正则性的小波基，如“db4”；对于各种方法，都选择标准的信噪比(SNR)来评价实验结果。

首先，对无噪图像作放大验证。在图 1 中，图 1(a)是大小为 256×256 的标准图像 Camera；图 1(b)是大小为 128×128 的原始图像；图 1(c)~1(f)分别表示 Chambolle 模型和新模型式(5)在 $p=1$，$p=2$ 和 $p=\infty$ 三种情形下对原始图像(b)放大两倍的结果。由此可看出，Chambolle 模型不仅造成放大图像视觉上的模糊(请注意脸部和远景)，而且放大后的

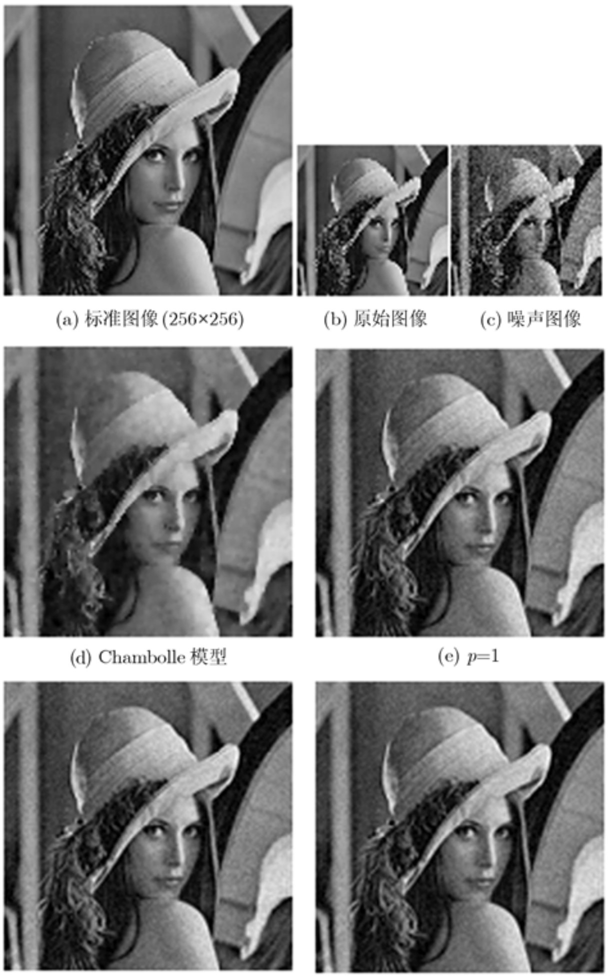
边缘锯齿现象比较严重(如三角架的边缘和上衣的边缘)；而新模型不仅保持了边缘的锐度，而且边缘轮廓清晰、光滑。

在图 2 中，由于噪声的存在，Chambolle 模型放大后的图像边缘存在严重的振荡现象，图像的特征细节进一步被模糊(请注意肩部、帽子和头发)，见图 2 (d)；而新模型不仅能较好地去除噪声，而且保持了图像的边缘锐度和有意义的细节，使图像整体看起来更清晰、自然，见图 2(e)~2(g)。

(a) 标准图像 (b) 原始图像 (c) Chambolle 模型

(d) p=1 (e) p=2 (f) $p=\infty$

图 1 Chambolle 模型和新模型对无噪图像放大的结果



(a) 标准图像(256×256) (b) 原始图像 (c) 噪声图像

(d) Chambolle 模型 (e) p=1

(f) p=2 (g) $p=\infty$

图 2 Chambolle 模型和新模型对噪声图像的放大结果

此外，表 1 为不含噪声和含有噪声两种情况下，分别用两种模型放大图像两倍后 SNR 的对比，可以看出新模型具有优越性。

表 1 图像放大结果的 SNR

图像名称	噪声方差 σ	Chambolle 模型	新模型		
			p=1	p=2	$p=\infty$
Camera	~	17.181	**21.188**	**20.836**	**20.803**
Lena	15	17.652	**20.826**	**20.729**	**20.721**

参 考 文 献

[1] Chambolle A, DeVore R A, Lee N Y, and Bradley J L. Nonlinear wavelet image processing: Variational problems, compression and noiseremoval through wavelet shrinkage. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, 7(3): 319–335.

[2] Chambolle A and Bradley J L. Interpreting translation-invariant wavelet shrinkage as a new image smoothing scale space. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(7): 993–1000.

[3] Lorenz D A. Variational denoising in Besov spaces and interpolation of hard and soft wavelet shrinkage. University of Bremen, DFG-Schwerpunktprogramm 1114, 2003: 1–12.

[4] Lorenz D A. Wavelet Shrinkage in Signal and Image Processing-An Investigation of Relations and Equivalences. [Ph. D thesis], University of Bremen, 2005.

[5] Daubechies I and Teschke G. Wavelet based image decomposition by variational functionals. Proceeding-spie the International Society for Optical Engineering, USA, 2004, 5266: 94–105.

[6] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and application. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1-2): 89–97.

[7] Guichard F and Malgouyres F. Total variation based interpolation. In Proceedings of the European Signal Processing Conference, Greece, 1998, 3: 1741–1744.

[8] Malgouyres F and Guichard F. Edge direction preserving image zooming: A mathematical and numerical analysis. SIAM J. Numer. *Anal.*, 2001, 39 (1): 1–37.

[9] Rockafellar R T and Roger J-B. Wets. Variational Analysis. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998.

李 敏： 女，1979 年生，博士生，研究方向为偏微分方程理论、小波理论及其在图像处理中的应用.

卢成武： 男，1970 年生，讲师，博士生，主要研究方向为小波理论、偏微分方程及其在图像处理中的应用.

冯象初： 男，1962 年生，教授，博士生导师，主要研究领域为数值分析、小波理论及其应用和尺度空间理论及在图像处理中的应用.