

## 基于时延耦合映象格子的相继拥堵模型

陈雍君 周磊山

(北京交通大学交通运输学院 北京 100044)

**摘要:** 实际网络中由于拥塞、带宽、传输速度等因素, 通常存在耦合时延。该文提出一种带时延耦合映象格子的相继拥堵模型, 在此基础上研究交通网络上各个节点的非线性动力学特征, 交通拥堵在路网上的形成机理与传播的复杂动力学行为, 拥堵故障在网络中扩散的过程。模拟网络中随机发生拥堵和蓄意攻击所引发的两种相继拥堵策略, 并推导出网络中故障承受能力的阈值范围。

**关键词:** 复杂网络; 相继拥堵; 耦合映象格子; 时延; 非线性动力学; 拓扑结构

中图分类号: TP393

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)04-0988-03

## Cascading Failure with Temporal Arrearage in Coupled Map Lattice

Chen Yong-jun Zhou Lei-shan

(School of Traffic and Transportation, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** There usually exists the coupling temporal arrearage circs in the real network owing to the congestion, bandwidth and transmission velocity. Therefore, one new kinds of cascading failure model with the coupling temporal arrearage character is come into being. To the emphasis, the new model has been applied into studying the highway traffic network. In this paper, the nonlinear dynamics feature of the traffic congestion has been studied, the formation mechanism of the traffic congestion in the traffic networks has been researched, and its complex dynamics spreading behavior has been probed, the diffusion of traffic congestion in the complex networks has been analyzed. Two kinds of attack strategies, the random and the intentional, which bring the cascading failure of networks are simulated, and then the threshold value distribution is calculated which influent the networks efficiency and networks enduring abilities for the cascading failure.

**Key words:** Complex networks; Cascading failure; Coupled map lattice; Temporal arrearage; Nonlinear dynamics; Topology structure

### 1 引言

Watts and Strogatz(1998)和Barabási and Albert(1999)先后在理论上构建了具有“小世界”现象的WS模型和“无标度”特性的BA模型<sup>[1,2]</sup>。随后复杂网络的研究引起了不同学科, 不同领域的广泛重视和关注。网络的复杂性研究包括网络的结构复杂性、连接复杂性、演化复杂性、时空复杂性等各个方面。对网络复杂性定量计算与定性特征的科学研究, 以及对网络的拓扑结构如何影响其动力学行为的研究, 已经成为一项重要且富有挑战性的科研课题<sup>[3]</sup>。

在很多现实的网络中, 一个或少数几个节点或边发生的故障(这种故障可能是随机发生的, 也可能是蓄意攻击造成的)会通过节点之间的耦合关系引起其他节点发生故障, 这样就会产生连锁反应, 最终导致网络中相当一部分节点甚至整个网络的崩溃。这种现象就称为相继拥堵(cascading failure)<sup>[4,5]</sup>, 有时也称为“雪崩(avalanche)”现象。相继拥堵现象广泛存在于许多实际复杂网络中, 如在交通网络、

Internet网络、电力网络、社会与经济网络中, 并且在这些网络中发挥着重要的作用。因此有必要对相继拥堵现象的发生机理、预防与控制作进一步的深入研究。

大多数时空系统的时间、空间和状态变量是连续的, 适用于用偏微分方程来描述。无论是进行理论分析还是数值计算, 都比较复杂, 而且运算量也大。一种有效的方法是将时间和空间变量离散化, 但状态变量仍保持连续, 既能克服上述缺点, 又能从本质上显示出系统的复杂时空特性, 这就是耦合映象格子(Coupled Map Lattice, CML)<sup>[6,7]</sup>。它是一个时间、空间都离散, 而状态保持连续的非线性动力学系统, 已成为研究时空混沌的强有力工具。

本文基于CML模型来有效的刻画交通路网中的交通拥堵的传播问题, 并讨论了交通路网在耦合时延的情况下发生相继拥堵的阈值, 以及该阈值与CML模型中的网络规模大小以及耦合系数之间的关系。最后基于无标度网络分别模拟了交通枢纽拥堵和非交通枢纽拥堵的两种拥堵的效应。

### 2 时延 CML 的相继拥堵模型

考虑如下包含  $N$  个节点的 CML 模型:

$$x_i(t+1) = (1-\varepsilon)f(x_i(t)) + \varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{i,j} \frac{f(x_j(t))}{k(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

式(1)中  $x_i(t)$  表示交通路网中的第  $i$  个节点在第  $t$  时刻是否发生交通拥堵的状态。 $N$  表示的是路网中节点的总数目。耦合矩阵  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N \times N}$  表示各个节点的连接状态。若节点  $i$  和  $j$  之间有边相连, 则  $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ; 否则  $a_{ij} = a_{ji} = 0$ 。任意两个节点之间至多只能有一条边, 且不允许节点和自身相连。 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{N \times N}$  是一个包含 0, 1 元素的对称耦合矩阵。其中  $a_{ii} = 0$ 。 $\varepsilon$  是相邻节点之间的耦合强度, 且  $0 < \varepsilon \leq 1$ 。 $k(i)$  是节点  $i$  的度。 $f(x)$  表示的是节点自身的拥堵动态行为函数, 本文用 Logistic 映射  $f(x) = bx(1-x)$  作为各个节点的映射函数, 其中  $b$  是可调参数。且  $1 \leq b \leq 4$ 。

由于在实际交通路网中的一个节点出现拥堵之后, 再传播给下一个节点常常带有时延。为了更好地刻画和描述拥堵现象在交通路网中的动力学特性, 如果把该节点间的时延情况考虑进去, 模型就更趋近于现实交通路网中的拥堵传播。所以本文提出一种带时延耦合的相继拥堵模型:

$$x_i(t+1) = (1-\varepsilon)f(x_i(t)) + \varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{i,j} \frac{f(x_j(t-\tau))}{k(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$\tau$  是时间的延迟, 通常情况下  $\tau$  是一个时延变量, 且为一个非负数。

假设交通网络节点  $i$ , 满足以下两个机理: (1) 如果  $0 < x_i(t) < 1$ , 且  $t \leq l$  时, 表示  $i$  节点在第  $l$  时刻是交通顺畅的状态。(2) 如果  $x_i(l) \geq 1$  时, 节点  $i$  在第  $l$  时刻就是交通拥堵的状态, 节点在  $l$  以后的任意时刻状态恒等于零, 即  $x_i(t) \equiv 0, t \geq l$ 。

为了更好地研究这种交通相继拥堵现象, 假设路网中节点  $c$  因为某种意外事件而发生了拥堵, 并在式(2)的基础上增加外部干扰项  $P_c (P_c \geq 1)$ ,  $P_c$  表示第  $l$  时刻交通拥堵效应。则  $c$  节点在第  $l+1$  时刻的状态为下式:

$$x_c(l+1) = (1-\varepsilon)f(x_c(l)) + \varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq c}}^N a_{c,j} \frac{f(x_j(l-\tau))}{k(c)} + P_c \quad (3)$$

因为节点  $c$  在第  $l$  时刻已经发生了交通拥堵, 可得到  $t \geq l, x_c(t) \equiv 0$ 。在第  $l+1$  时刻, 凡是与  $c$  相连节点的交通状况也将因受到路网节点  $c$  的影响而恶化。这是由于交通路网节点  $c$  的交通流量会分配给它周围的节点, 如果周围节点的路段容量过小的话, 周围的节点也会随即发生交通拥堵。任意节点的状态值可以按照式(2)求出。在下一时刻, 如果周围的节点的状态值也大于 1 的话, 这就说明新一轮拥堵已经发生。这个过程反复进行, 相继拥堵现象就会导致整个网络的崩溃。

### 3 模型分析与数值仿真

首先假设路网的初始状态(含  $N$  个节点)是畅通的, 任意节点都没有发生拥堵。假设在第 8 个时刻给  $c$  点施加拥堵效应  $P_c$ , 且  $P_c \geq 1$ , 随之发生交通拥堵的节点的个数记作  $Q(l-\tau)$ 。那么  $P_c$  多大时路网上的节点将会有相继拥堵现象产生呢? 假设存在两个临界阈值  $P_{c1}$  和  $P_{c2} (P_{c1} \leq P_{c2})$ , 其中  $P_{c1}$  表示网络上的拥堵效应开始传播的临界阈值,  $P_{c2}$  表示拥堵效应致使全局崩溃的临界阈值。当  $P_c \leq P_{c1}$  的时候,  $Q(l-\tau)$  的变化不大。这就说明如果发生的交通拥堵效应比较小, 并且疏导的措施有利, 是不会发生交通拥堵。当拥堵效应  $P_c$  达到一定值  $P_{c2}$  时, 产生交通拥堵的范围将会迅速增加。如果不及及时疏导交通拥堵, 拥堵效应  $P_c$  将会继续增加,  $Q(l-\tau)$  将会随其而增大, 当  $P_c \geq P_{c2}$  时, 交通拥堵会迅速蔓延到整个网络, 即整个路网将会发生相继拥堵现象, 导致网络的全局崩溃。如果任意  $i$  节点 ( $i \neq c$ ) 在  $l+1$  时刻发生拥堵, 则式(4)成立。其中  $\tau$  是时刻  $t$  的时延。为了保证每一步状态的非负性, 在式(4)两端取绝对值。

$$x_i(l+1) = \left| f(x_i(l)) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq c}}^N [f(x_j(l-\tau)) - f(x_i(t))] \right| \geq 1, \quad i \neq c \quad (4)$$

不妨假设  $b = 4$ , 又因为

$$f(x_c(l)) = 4P_c(1-P_c) \leq -4P_c(P_c-1) \leq 0 \quad (5)$$

可以推导出阈值  $P_{c1}$  以及  $P_{c2}$ :

$$\begin{aligned} f(x_i(l)) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1}^N [f(x_j(l-\tau_j)) - f(x_i(l))] \\ = f(x_i(l)) + \frac{\varepsilon}{N-1} \left\{ \sum_{j=1, j \neq c, j \neq i}^N [f(x_j(l-\tau_j)) - f(x_i(l))] \right. \\ \left. + [f(x_c(l-\tau_c)) - f(x_i(l))] \right\} \\ \leq 1 + \frac{\varepsilon}{N-1} f(x_c(l-\tau_c)) \end{aligned} \quad (6)$$

由式(5)可得

$$1 + \frac{\varepsilon}{N-1} f(x_c(l-\tau_c)) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{N-1} [4P_{c2}(1-P_{c2})] \leq -1$$

即得

$$P \geq P_{c2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2(N-1)}{\varepsilon}} \right) \quad (7)$$

当  $f(x_i(l)) \leq 0$  时

$$\begin{aligned} f(x_i(l)) + \frac{\varepsilon}{N-1} \sum_{j=1}^N [f(x_j(l-\tau_j)) - f(x_i(l))] \\ = f(x_i(l)) + \frac{\varepsilon}{N-1} \left\{ \sum_{j=1, j \neq c, j \neq i}^N [f(x_j(l-\tau_j)) - f(x_i(l))] \right. \\ \left. + [f(x_c(l-\tau_c)) - f(x_i(l))] \right\} \\ \leq \frac{\varepsilon}{N-1} (4P_{c1} - 4P_{c1}^2) \leq -1 \end{aligned}$$

解得

$$P_{c1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + N - 1}{\varepsilon}} \quad (8)$$

$P_{c1}$ ,  $P_{c2}$  就是所求的两个阈值范围。下面通过计算机模拟来检验式(7), 式(8)的正确性。在图 1, 图 2 中,  $P_{c1}, P_{c2}$  的数据是依据式(7), 式(8)得到,  $P_{c1}^*, P_{c2}^*$  的数据是依据统计数据得到。

从图 1 中可以看出, 随着  $\varepsilon$  的增长,  $P_{c1}, P_{c2}$  呈下降趋势。从图 1 中还可以看出  $P_{c1}, P_{c2}$  与  $P_{c1}^*, P_{c2}^*$  略有差异, 这也充分说明式(7), 式(8)的正确性和有效性。

从图 2 中可以看出, 随着网络  $N$  的增长,  $P_{c1}, P_{c2}$  也是呈增长趋势。这说明网络的规模越大, 越不容易发生网络全局崩溃。 $P_{c1}, P_{c2}$  的数据是依据式(7), 式(8)得到,  $P_{c1}^*, P_{c2}^*$  的数据是依据统计数据得到。

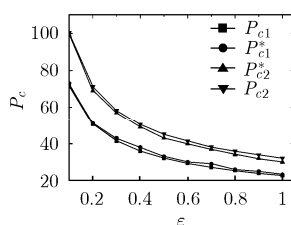


图 1 拥堵效应  $P_{c1}, P_{c2}$  与耦合强度  $\varepsilon$  的关系

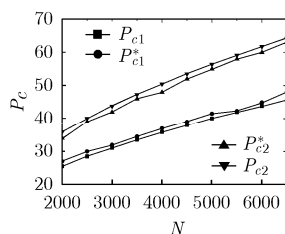


图 2 拥堵效应  $P_{c1}, P_{c2}$  与网络大小  $N$  的关系

整个交通路网的拥堵效应是从  $P_{c1}$  开始传播和扩散, 当增加到  $P_{c2}$  时, 便达到整个网络的崩溃。当交通拥堵的效应在  $P_{c1}$  与  $P_{c2}$  之间的时候, 如果不及时控制, 拥堵效应就一步一步地增加, 将会导致整个网络的拥堵。假设交通拥堵是在  $g$  个时间步内, 发生全局网络拥堵。

$$P_{c2g} = (1 + \beta)P_{c1g}, \quad h = l, \dots, l + g$$

$g$  表示的是蔓延过程的时间步序列, 其中  $\beta \geq 0$  表示的是网络对拥堵效应的容忍增长参数。

现在对路网上的随机破坏和蓄意攻击进行仿真和分析。首先假设交通路网节点的度分布服从无标度网络的幂律分布<sup>[2]</sup>。即  $P(k) \sim k^{-r}$ 。网络上的边是随机连接的, 且不考虑自身连边以及重复连边的情况。交通拥堵增长率  $G$  可用式子  $G = \frac{Q(l-\tau)}{N}$  来刻画。

通过模拟可以看出, 在节点度数小(非交通枢纽)发生拥堵的情况下, 即使相对容忍增长参数  $\beta$  ( $\beta = 0.95$ ) 很大,  $Q(l-\tau)$  也不会增长很快 ( $Q(l-\tau) \approx 200, G \approx 0$ )。在这种情况下, 即使发生拥堵, 它的扩散也是比较缓慢的, 不会发生大面积的相继交通拥堵(图 3)。

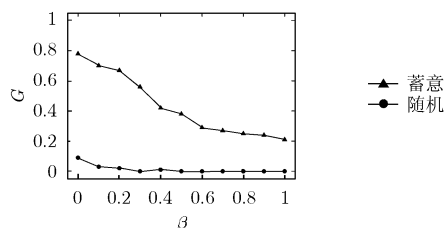


图 3 拥堵增长率  $G$  与容忍增长参数  $\beta$  的关系

在节点度数大(交通枢纽)发生拥堵的情况下, 即使容忍增长参数  $\beta$  ( $\beta = 0.1$ ) 很小, 也会有大面积的相继交通拥堵出现。从图 3 可以看出, 交通路网上有 10000 个节点, 就有大约 70% 的交通节点发生相继交通拥堵 ( $Q(l-\tau) = 7012$ )。所以在这种情况下, 可能会在几个时间步内达到全局崩溃。

#### 4 结束语

在本文中根据实际网络的演化规则设计一种带时延耦合映像格子(CML)的相继拥堵的网络模型。利用统计方法研究分析实际网络数据, 在网络节点中引入非线性动力学行为探究路网的内在机制和结构特性。讨论交通路网中随机发生拥堵和蓄意攻击所引发交通枢纽拥堵和非交通枢纽拥堵的两种相继拥堵策略, 通过计算机模拟仿真, 还得到随机发生拥堵对网络的破坏作用小, 但是蓄意攻击网络时, 容易引起网络全局崩溃的结论。它对于网络安全是具有一定的指导意义。通过数学模型的改进和模拟计算网络负载的阈值极限, 也为深入研究探讨网络的拥堵控制问题提供了有效的依据。

#### 参考文献

- [1] Watts D J. Small Worlds: The Dynamics of Networks Between Order and Randomness. New Jersey: Princeton University Press, 1999: 1-80.
- [2] Albert R and Barabási A-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74: 47-97.
- [3] 陈关荣. 复杂动力网络的研究将是新世纪科学技术前沿的战略性课题之一. 复杂网络-系统结构研究文集(第二集), 上海理工大学, 2004: 115-116.
- [4] Strogatz S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, 410: 268-276.
- [5] Crucitti P, Latora V, and Marchiori M. Model for cascading failures in complex networks. *Phys. Rev. E*, 2004, 69: 045104.
- [6] Kaneko K. Coupled Map Lattices. Singapore: World Scientific, 1992: 3-5.
- [7] Wang X F and Xu J. Cascading failures in coupled map lattices. *Phys. Rev. E*, 2004, 70: 056113.

陈雍君: 男, 1973 年生, 博士生, 研究方向为网络智能决策理论与方法、交通运输系统仿真。

周磊山: 男, 1962 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为网络智能决策理论与方法、交通运输系统仿真、高速铁路技术。