

## SAR 多视图像的 Stokes 参数的统计分布

刘涛 王雪松 肖顺平

(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘要:** 该文首先应用散射矩阵的 Wishart 联合分布推导了高斯分布散射矩阵的 Stokes 参数分布, 利用极化不变量思想得到了全部 4 个 Stokes 参数分布相当理想的理论结果, 并与前人的结果进行了对比, 体现了此分析算法的简洁性与统一性, 他们可以具体描述 Stokes 参数的起伏性。在此基础上, 求出了 SAR 多视情况下标准化 Stokes 参数分布的概率密度函数, 从另一方面描述了 SAR 多视图像的随机状态特性, 这些结果对于降低斑点噪声、地表分类与背景中的目标识别具有重要的指导意义。

**关键词:** 合成孔径雷达; 多视 Stokes 参数; 概率密度函数; 极化不变量

中图分类号: TN975.52

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)05-1027-05

## Statistics of the Stokes Parameters for Multilook SAR Image

Liu Tao Wang Xue-song Xiao Shun-ping

(School of Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha 410073, China)

**Abstract:** In this paper, the statistics of the union Stokes parameters in Gaussian assumption is derived from the Wishart distribution, and through the polarization invariant the analytic expressions of the four Stokes parameters are presented. The results have a comparison with the conclusion derived before, which shows the presented expressions to be simple and exact. Then the statistical PDF(Probability Density Function) of the normalized Stokes parameters are showed, which describes the variety of the polarization state in another way. All the above can be useful to speckle reduced, classification for terrain and target recognition in complex environments or other applications.

**Key words:** SAR; Multilook Stokes parameters; PDF; Polarization invariant

### 1 引言

极化合成孔径雷达成像技术可以对目标进行高分辨全极化的散射测量成像, 得到 4 个复振幅函数  $S_{ij}$ ,  $i, j = h, v$  [1]。由于散射目标随机的空间分布和取向分布, 以及散射回波的相位干涉, 使 SAR 观测数据出现起伏, 这一起伏分布的统计特性对于 SAR 图像去噪处理、数据验证、背景中目标识别和地表类型分类等具有重要意义 [2-4]。随着极化 SAR 应用的日益广泛, 研究极化 SAR 图像的统计特性就越发显得重要。Stokes 参数一般是受斑点噪声与目标的起伏的影响的, 为了更好的理解稳定目标与起伏目标的不同散射特性, 获得 Stokes 参数统计分布的概率密度函数是很有必要的。由于斑点或者目标的起伏往往采用高斯假设模型, 所以对 Stokes 矢量参数的研究一般也是基于高斯假设分布的 [5]。

近年来, 针对不同统计量和散射目标特征, 学者们提出过很多统计模型, 如 Lee 等研究了散射振幅函数的强度, 幅度比以及相位统计特性 [6], Frery 等提出了非常不均匀地表的统计模型 [7]。但是, 这些工作均不是极化散射强度 Stokes 参

数的统计分布。

Stokes 参数已经应用于随机介质部分散射的研究中 [8,9]。在极化 SAR 中, 4 个散射 Stokes 参数可以从 SAR 成像数据中得到。Barakat 最早研究了部分极化光 Stokes 参数的统计分布, 后来应用于 SAR 单视图像的 Stokes 参数统计 [10]。C.Brosseau [11] 研究了高斯场标准化 Stokes 参数的统计分布, 并且应用到空间多散射中心的散射特性研究中。Touzi & Lopes 进一步拓展了 Barakat 的工作, 考虑了极化度的相位, 并推导 SAR 多视图像高斯分布下的 Stokes 参数的统计分布 [5], 可惜结果是复杂的积分形式, 金亚秋 [12] 通过部分近似的方法得到了高斯分布下的 Stokes 参数的统计分布, 并取得了良好的试验效果, 但近似的方法让结果受到局限, 并且 SAR 多视图像的标准 Stokes 矢量参数的统计特性目前理论上尚是空白。本文就是在前人的基础上, 利用极化不变思想研究了高斯假设下 SAR 多视图像的 Stokes 参数的统计分布特性, 首次推导了标准化 Stokes 参数的概率密度分布函数, 取得了简单明了准确的数学结果。

本文第 2 节利用复 Wishart 分布求取了 Stokes 参数的第 1 分量和第 2 分量的概率密度函数, 然后利用极化不变思想很方便地得到了 Stokes 参数的第 3 分量和第 4 分量的概率密度函数, 并与前人工作进行了比较, 最后首次求出了目标起

2006-09-26 收到, 2007-03-19 改回

全国优秀博士论文专项资金(08100101)和新世纪优秀人才支持计划(NCET-04-0997)资助课题

伏特性的另一种 Stokes 参数(标准 Stokes 参数)的概率密度函数,完善了 Stokes 参数的统计理论;第3节通过典型实例表示了 Stokes 参数的概率分布状态,直观地展示了 Stokes 分布的具体形式。最后是结束语。

## 2 高斯假设下多视图图像 Stokes 参数的 PDF

根据多视图散射 Stokes 的定义,在水平垂直极化基下, Stokes 参数均是散射矩阵两个元素的函数,即

$$g_{HV0} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [S_i(k)S_i^*(k) + S_j(k)S_j^*(k)] \quad (1)$$

$$g_{HV1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [S_i(k)S_i^*(k) - S_j(k)S_j^*(k)] \quad (2)$$

$$g_{HV2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [S_i(k)S_j^*(k) + S_j(k)S_i^*(k)] \quad (3)$$

$$g_{HV3} = \frac{1}{n} \text{Im} \left( \sum_{k=1}^n [S_i(k)S_j^*(k) - S_j(k)S_i^*(k)] \right) \quad (4)$$

其中  $i, j = 1, 2, 3$  且  $i \neq j$ , 且  $(S_1 \ S_2 \ S_3) = (S_{hh} \ S_{hv} \ S_{vv})$ 。

针对 Stokes 的表达形式,令  $q = 2$ , 由文献[6.eq(1)-(15)]得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{HH} & C_{HV} \\ C_{VH} & C_{VV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{i\theta} \\ \sqrt{C_{11}C_{22}}|\rho_c|e^{-i\theta} & C_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}/n = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中  $A_{11} = \sum_{k=1}^n S_i(k)S_i^*(k)$ ,  $A_{22} = \sum_{k=1}^n S_j(k)S_j^*(k)$ ,  $A_{12} = A_{21}^* = \sum_{k=1}^n S_i(k)S_j^*(k)$ ;  $C_{11} = E[A_{11}]$ ,  $C_{22} = E[A_{22}]$ , 复相关系数的为  $\rho_c = E[A_{12}]/\sqrt{C_{11}C_{22}}$ , 幅度为  $|\rho_c| = \frac{\sqrt{E^2[g_{HV2}] + E^2[g_{HV3}]}}{\sqrt{E^2[g_{HV0}] - E^2[g_{HV1}]}}$ , 行列式的值  $\det(\mathbf{C}) = C_{11}C_{22}(1 - |\rho_c|^2)$ 。可见  $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}$  都为复 Hermit 矩阵。

极化度定义为

$$P = \sqrt{E^2[g_{HV1}] + E^2[g_{HV2}] + E^2[g_{HV3}]} / E[g_{HV0}] \quad (6)$$

因为在不同的极化基下散射矩阵元素的线性组合可能会随着极化基的变化而变化。我们假定原极化基下的目标矢量为  $\mathbf{u}(k)$ , 方差矩阵为  $\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}(k)\mathbf{u}^H(k)$ , 新极化基下的目标矢量为  $\mathbf{v}(k)$ , 方差矩阵为  $\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \mathbf{v}(k)\mathbf{v}^H(k)$ , 基坐标变换矩阵为  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}$  为单位酉矩阵, 因此  $\mathbf{v}(k) = \mathbf{U}^H \mathbf{u}(k)$ , 那么

$$\mathbf{A}_v = \sum_{k=1}^n \mathbf{v}(k)\mathbf{v}^H(k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{U}^H \mathbf{u}(k)\mathbf{u}^H(k)\mathbf{U}$$

$$= \mathbf{U}^H \left( \sum_{k=1}^n \mathbf{u}(k)\mathbf{u}^H(k) \right) \mathbf{U} = \mathbf{U}^H \mathbf{A}_u \mathbf{U} = \mathbf{T}^H \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (7)$$

$\mathbf{A}$  为对角阵, 元素为 Hermit 矩阵的特征值, 特征值不随极化基的变换而变化, 属于极化不变量。Hermit 矩阵  $\mathbf{C}$  同样具有这个性质, 不妨记  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 。

同时, 极化度为

$$P = \sqrt{E^2[g_{HV1}] + E^2[g_{HV2}] + E^2[g_{HV3}]} / E[g_{HV0}]$$

$$= \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{11}C_{22}|\rho_c|^2} / (C_{11} + C_{22})$$

$$= \sqrt{(C_{11} + C_{22})^2 - 4C_{11}C_{22}(1 - |\rho_c|^2)} / (C_{11} + C_{22})$$

$$= \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2} / (\lambda_1 + \lambda_2) \quad (8)$$

可见, 极化度  $P$  不随极化基的变化而变化, 属于极化不变量。同时根据能量守恒也很直观地知道  $g_{HV0}$  也是极化不变量。行列式的值  $D = \text{Det}(\mathbf{C})$  也为极化不变量。

首先求出高斯假设下极化 SAR 多视图图像的强度分布,

令  $R_{11} = A_{11}/n, R_{22} = A_{22}/n$ , 可得<sup>[6]</sup>

$$p(R_{11}, R_{22})$$

$$= \left\{ n^{(n+1)} (R_{11}R_{22})^{(n-1)/2} \exp \left[ -\frac{n(R_{11}/C_{11} + R_{22}/C_{22})}{1 - |\rho_c|^2} \right] \right.$$

$$\cdot \left. \left[ (C_{11}C_{22})^{(n+1)/2} \Gamma(n)(1 - |\rho_c|^2) |\rho_c|^{(n-1)} \right]^{-1} \right\}$$

$$\cdot I_{n-1} \left( 2n \sqrt{\frac{R_{11}R_{22}}{C_{11}C_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|^2} \right) \quad (9)$$

其中  $I_{n-1}(x)$  为第一类修正的  $(n-1)$  阶 Bessel 函数。由 Stokes 参数的定义, 有  $g_{HV0} = R_{11} + R_{22}$ ,  $g_{HV1} = R_{11} - R_{22}$ , 所以可以得到第 1 第 2 Stokes 参数的联合分布为

$$p(g_{HV0}, g_{HV1}) = \left\{ n^{(n+1)} (g_{HV0}^2 - g_{HV1}^2)^{(n-1)/2} \right.$$

$$\cdot \exp \left[ -n \frac{(C_{11} + C_{22})g_{HV0} - (C_{11} - C_{22})g_{HV1}}{2C_{11}C_{22}(1 - |\rho_c|^2)} \right]$$

$$\cdot \left. \left[ 2^n (C_{11}C_{22})^{(n+1)/2} \Gamma(n)(1 - |\rho_c|^2) |\rho_c|^{(n-1)} \right]^{-1} \right\}$$

$$\cdot I_{n-1} \left( n \sqrt{\frac{g_{HV0}^2 - g_{HV1}^2}{C_{11}C_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|^2} \right) \quad (10)$$

将式(10)对  $g_{HV1}$  进行积分, 得到  $g_{HV0}$  的概率密度函数为

$$p(g_{HV0}) = \int_{-g_{HV0}}^{g_{HV0}} p(g_{HV0}, g_{HV1}) dg_{HV1}$$

$$= \int_{-1}^1 g_{HV0} p(g_{HV0}, xg_{HV0}) dx$$

$$= \left\{ 2\sqrt{\pi} n^{(n+1/2)} g_{HV0}^{(n-1/2)} \exp \left[ -\frac{2ng_{HV0}}{E[g_{HV0}](1 - P^2)} \right] \right.$$

$$\cdot \left. I_{\left[ \frac{n-1}{2} \right]} \left[ \frac{2nPg_{HV0}}{E[g_{HV0}](1 - P^2)} \right] \right\}$$

$$\cdot \left[ \Gamma(n) E^{(n+1/2)}[g_{HV0}](1 - P^2)^{1/2} P^{(n-1/2)} \right]^{-1} \quad (11)$$

将其能量归一化,可以得到  $S_{\text{HV}0} = g_{\text{HV}0} / E[g_{\text{HV}0}]$  的PDF为

$$p(S_{\text{HV}0}) = \left\{ 2\sqrt{\pi} n^{(n+1/2)} S_{\text{HV}0}^{(n-1/2)} \exp\left[-\frac{2nS_{\text{HV}0}}{(1-P^2)}\right] I_{(n-1/2)}\left[\frac{2nPS_{\text{HV}0}}{(1-P^2)}\right] \right\} \cdot [\Gamma(n)(1-P^2)^{1/2} P^{(n-1/2)}]^{-1} \quad (12)$$

这与 Touzi 和 Lpoes<sup>[5]</sup>的式(47)以及金亚秋<sup>[12]</sup>式(11)的结论是一致的。特别地,当  $n=1$  时变为单视图,表达式化简后形式与 D.Eliyahu<sup>[13]</sup>的式(15)以及王雪松<sup>[14]</sup>的结果完全相同,从一方面验证了本文推导的正确性。

同理,将式(10)对  $g_{\text{HV}0}$  进行积分,得到  $g_{\text{HV}1}$  的概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(g_{\text{HV}1}) &= \int_{|g_{\text{HV}1}|}^{\infty} p(g_{\text{HV}0}, g_{\text{HV}1}) dg_{\text{HV}0} \\ &= \int_1^{\infty} |g_{\text{HV}1}| p(x|g_{\text{HV}1}, g_{\text{HV}1}) dx \\ &= \left\{ 2n^{(n+1/2)} |g_{\text{HV}1}|^{(n-1/2)} \exp\left[\frac{2n\omega_1 g_{\text{HV}1}}{E[g_{\text{HV}0}](1-P^2)}\right] \right. \\ &\quad \cdot K_{(n-1/2)}\left[\frac{2n\sqrt{1-P^2+\omega_1^2}|g_{\text{HV}1}|}{E[g_{\text{HV}0}](1-P^2)}\right] \left. \right\} \\ &\quad \cdot [\sqrt{\pi}\Gamma(n)E^{(n+1/2)}[g_{\text{HV}0}](1-P^2)^{1/2} \\ &\quad \cdot (1-P^2+\omega_1^2)^{n/2-1/4}]^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $P$  为极化度,极化度为极化不变量,  $\omega_i$  为极化权重,记  $\omega_i = \frac{E[g_{\text{HV}i}]}{E[g_{\text{HV}0}]}$ ,表征极化分量的能量分配,  $K_{(n-1/2)}(x)$  是第二类修正的  $(n-1/2)$  阶 Bessel 函数。

归一化 Stokes 参数的第 2 分量,即  $S_{\text{HV}1} = g_{\text{HV}1} / E[g_{\text{HV}0}]$ ,那么 Stokes 第二参数归一化的概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(S_{\text{HV}1}) &= \left\{ 2n^{(n+1/2)} |S_{\text{HV}1}|^{(n-1/2)} \exp\left[\frac{2n\omega_1 S_{\text{HV}1}}{(1-P^2)}\right] \right. \\ &\quad \cdot K_{(n-1/2)}\left[\frac{2n\sqrt{1-P^2+\omega_1^2}|S_{\text{HV}1}|}{(1-P^2)}\right] \left. \right\} \\ &\quad \cdot [\sqrt{\pi}\Gamma(n)(1-P^2)^{1/2}(1-P^2+\omega_1^2)^{n/2-1/4}]^{-1} \end{aligned} \quad (14)$$

对于 Stokes 参数的第 3 和第 4 分量,我们应用极化基变换的物理意义以及极化不变量,比较容易得到很简单直接的结果。

由于  $g_{\text{HV}2}$  为电磁波在  $45^\circ$  和  $135^\circ$  正交极化基下的两个正交分量之间的功率差,  $g_{\text{HV}3}$  为电磁波在左、右旋圆极化基下的两正交分量之间的功率差,上述物理解释为求解瞬态极化电磁波 Stokes 矢量的概率密度函数提供了一条简捷的途径,即只需在某组正交极化基(如水平垂直极化基)下求出电磁波两个极化分量功率差的概率密度函数,那么通过极化基变换的方法(实质上仅会改变某些参数的具体表达形式)就可以依次求出在另外两组极化基下的电磁波极化分量功率之

差的概率密度函数<sup>[11,13-16]</sup>。

因为极化度  $P$  为极化不变量,它并不随极化基的变化而变换,极化权重则是随极化基变换的,根据  $g_{\text{HV}2}$  为电磁波在  $45^\circ$  和  $135^\circ$  正交极化基下的两个正交分量之间的功率差  $g_{\text{MN}1}$ ,可知  $g_{\text{HV}2}$  为斜极化基下的 Stokes 参数第 2 分量,而  $g_{\text{HV}3}$  为电磁波在左、右旋圆极化基下的两正交分量之间的功率差  $g_{\text{LR}1}$ ,故得  $g_{\text{HV}2}(k) = g_{\text{MN}1}(k)$ ,  $k=1, \dots, n$  为每一个视图状态,所以

$$\begin{aligned} g_{\text{HV}2} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [S_i(k)S_j^*(k) + S_j(k)S_i^*(k)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_{\text{HV}2}(k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_{\text{MN}1}(k) = g_{\text{MN}1} \end{aligned} \quad (15)$$

同理可以得到 Stokes 参数第 4 分量的等效为左右旋功率差分量,也就是第 4 分量,即

$$\begin{aligned} g_{\text{HV}3} &= \frac{1}{n} \text{Im} \left[ \sum_{k=1}^n [S_i(k)S_j^*(k) - S_j(k)S_i^*(k)] \right] \\ &= \frac{1}{n} \text{Im} \left[ \sum_{k=1}^n g_{\text{HV}3}(k) \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_{\text{LR}1}(k) = g_{\text{LR}1} \end{aligned} \quad (16)$$

所以易得 Stokes 参数其他分量  $g_{\text{HV}i}$  与归一化参数  $S_{\text{HV}i}$  的概率密度分别为 ( $i=1, 2, 3$ )

$$\begin{aligned} p(g_{\text{HV}i}) &= \left\{ 2n^{(n+1/2)} |g_{\text{HV}i}|^{(n-1/2)} \exp\left[\frac{2n\omega_i g_{\text{HV}i}}{E[g_{\text{HV}0}](1-P^2)}\right] \right. \\ &\quad \cdot K_{(n-1/2)}\left[\frac{2n\sqrt{1-P^2+\omega_i^2}|g_{\text{HV}i}|}{E[g_{\text{HV}0}](1-P^2)}\right] \left. \right\} \\ &\quad \cdot [\sqrt{\pi}\Gamma(n)E^{(n+1/2)}[g_{\text{HV}0}](1-P^2)^{1/2} \\ &\quad \cdot (1-P^2+\omega_i^2)^{n/2-1/4}]^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} p(S_{\text{HV}i}) &= \left\{ 2n^{(n+1/2)} |S_{\text{HV}i}|^{(n-1/2)} \exp\left[\frac{2n\omega_i S_{\text{HV}i}}{(1-P^2)}\right] \right. \\ &\quad \cdot K_{(n-1/2)}\left[\frac{2n\sqrt{1-P^2+\omega_i^2}|S_{\text{HV}i}|}{(1-P^2)}\right] \left. \right\} \\ &\quad \cdot [\sqrt{\pi}\Gamma(n)(1-P^2)^{1/2}(1-P^2+\omega_i^2)^{n/2-1/4}]^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

结果的形式与 Touzi 和金亚秋的都很大的改进与形式的统一。

以上的结论形式上比前人的工作更加简洁,并且有统一的表达形式,物理意义比较明确,并且给出了各分量的一二阶矩,对深入研究 Stokes 参数的特性有重要的指导意义。

下面分析下标准化的 Stokes 参数分布,即 SAR 多视标准 Stokes 子矢量为

$$\tilde{g}_{\text{HV}1} = g_{\text{HV}1} / g_{\text{HV}0} \quad (19)$$

$$\tilde{g}_{\text{HV}2} = g_{\text{HV}2} / g_{\text{HV}0} \quad (20)$$

$$\tilde{g}_{\text{HV}3} = g_{\text{HV}3} / g_{\text{HV}0} \quad (21)$$

并且  $g_{\text{HV}0}$  的数值不随极化基的变换而变化。

下面研究 SAR 多视标准 Stokes 子矢量第一分量  $\tilde{g}_{\text{HV}1}$  的概率分布特性。

将式(19)代入 Stokes 参数联合分布概率密度函数式(10), 得到

$$\begin{aligned}
 p(g_{\text{HV}0}, \tilde{g}_{\text{HV}1}) = & \left\{ n^{(n+1)}(1 - \tilde{g}_{\text{HV}1}^2)^{(n-1)/2} g_{\text{HV}0}^n \right. \\
 & \cdot \exp \left[ -n g_{\text{HV}0} \frac{(C_{11} + C_{22}) - (C_{11} - C_{22})\tilde{g}_{\text{HV}1}}{2C_{11}C_{22}(1 - |\rho_c|^2)} \right] \\
 & \cdot \left[ 2^n (C_{11}C_{22})^{(n+1)/2} \Gamma(n)(1 - |\rho_c|^2) |\rho_c|^{(n-1)} \right]^{-1} \left. \right\} \\
 & \cdot I_{n-1} \left( n g_{\text{HV}0} \sqrt{\frac{1 - \tilde{g}_{\text{HV}1}^2}{C_{11}C_{22}}} \frac{|\rho_c|}{1 - |\rho_c|^2} \right) \quad (22)
 \end{aligned}$$

将式(22)化简, 并且用极化度  $P$ , 极化权重  $\omega_i$  表达上式, 由积分公式<sup>[17]</sup>得到边缘分布为

$$p(\tilde{g}_{\text{HV}1}) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)(1 - P^2)^n (1 - \tilde{g}_{\text{HV}1}^2)^{n-1} (1 - \omega_1 \tilde{g}_{\text{HV}1})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n) [1 + \omega_1^2 - P^2 - 2\omega_1 \tilde{g}_{\text{HV}1} + P^2 \tilde{g}_{\text{HV}1}^2]^{(n+1/2)}} \quad (23)$$

其中  $P$  为极化度,  $\omega_i$  为极化权重。

可见, SAR 多视图像的标准 Stokes 子矢量的概率密度函数可以统一为

$$\begin{aligned}
 p(\tilde{g}_{\text{HV}i}) = & \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)(1 - P^2)^n (1 - \tilde{g}_{\text{HV}i}^2)^{n-1} (1 - \omega_i \tilde{g}_{\text{HV}i})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n) [1 + \omega_i^2 - P^2 - 2\omega_i \tilde{g}_{\text{HV}i} + P^2 \tilde{g}_{\text{HV}i}^2]^{(n+1/2)}}, \\
 & i = 1, 2, 3, \quad |\tilde{g}_{\text{HV}i}| \leq 1 \quad (24)
 \end{aligned}$$

可见, 当  $n = 1$  时 SAR 多视图像就变为单视图像, 所得到的标准化 Stokes 参数的统计分布与 Brosseau<sup>[11]</sup>所给出的单视标准化 Stokes 参数的分布是一样的。

### 3 SAR 多视图像 Stokes 参数的实例

SAR 多视图像的 Stokes 参数的统计分布是视图数与 Stokes 参数均值或者是方差矩阵的函数, 通过图 1-图 3 直观地展现 Stokes 参数随视图数的变化规律。

我们给出能量归一化 Stokes 第一分量  $g_{\text{HV}0} = S_{\text{HV}0}$ , 极化度  $P = 0.5$  的概率密度函数。视图数分别为  $n = 1, 2, 4$ 。

可知其他分量的 Stokes 参数的概率密度如图 2 所示。

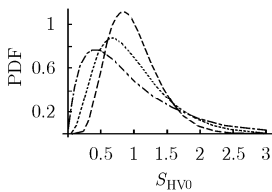


图 1 归一化 Stokes 矢量第一分量  $S_{\text{HV}0}$  的不同视图数分布( $P=0.5$ ):  $n = 1(-), n = 2(\cdot), n = 4(- -)$

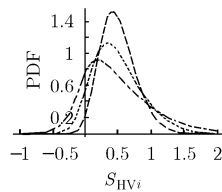


图 2 归一化 Stokes 矢量第  $i$  分量  $S_{\text{HV}i}$  的不同视图数分布 ( $P = 0.5, \omega_i = 0.5$ ):  $n = 2(-), n = 4(\cdot), n = 8(- -)$

已知 SAR 多视图像标准化 Stokes 参数的概率分布函数只与极化度和极化权重有关, 不妨取上面的值, 即  $P = 0.5$ ,  $\omega_i = 0.5$ , 得到标准 Stokes 参数的概率密度如图 3 所示。

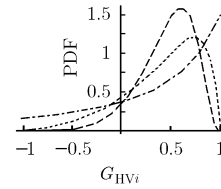


图 3 标准化 Stokes 矢量第  $i$  分量  $\tilde{g}_{\text{HV}i}$  的不同视图数分布 ( $P = 0.5, \omega_i = 0.5$ ):  $n = 1(-), n = 2(\cdot), n = 4(- -)$

### 4 结束语

本文主要研究了 SAR 多视雷达图像的 Stokes 参数 ( $g_{\text{HV}0}, g_{\text{HV}1}, g_{\text{HV}2}, g_{\text{HV}3}$ ) 以及标准 Stokes 参数 ( $\tilde{g}_{\text{HV}1}, \tilde{g}_{\text{HV}2}, \tilde{g}_{\text{HV}3}$ ) 的统计分布, 并且得到相应 Stokes 参数的概率密度函数的解析表达式以及标准化 Stokes 参数分布的概率密度表达式的解析形式, 并且给出了其分布的均值和方差, 在表达形式上比前人的工作结果更加完善。最后通过实例直观地给出了概率密度函数的图形表示, 加深了对 Stokes 统计特性的认识, 用 Stokes 参数完整地描述了 SAR 多视图像的极化散射特性。他们的统计分布对于降低斑点噪声、地表分类与背景中的目标识别具有重要的指导意义。

以上的统计分布都是在高斯假设下分析的, 在实际雷达多视 SAR 图像中, 作为目标起伏特性的一个相当好的模型, K-分布逐渐被广泛应用。如何求出他们的 Stokes 参数分布将是我们下一步研究的重点。

### 参考文献

- [1] Zebker H A and Van Zyl J J. Image radar polarimetry: a review. *Proc. IEEE*, 1991, 79(11): 1583-1605.
- [2] Sheen D R and Jonhston L P. Statistical and spatial properties of forest clutter measured with polarimetric synthetic aperture radar (SAR). *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 1992, GRS-30(3): 578-588.
- [3] Lee J S, Grunes M R, and Grandi G De. Polarimetric SAR speckle filtering and its implication for classification, *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*. 1999, GRS-37(5): 2363-2373.
- [4] Lee J S, Grunes M R, and Ainsworth T L, et al. Unsupervised classification using polarimetric decomposition and the complex Wishart classifier. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 1999, GRS-37(5): 2249-2257.
- [5] Touzi R and Lopes A. Statistics of the Stokes parameters and of the complex coherence parameters in one-look and multilook speckle fields. *IEEE Trans. on Geoscience and*

- Remote Sensing*, 1996, GRS-34(2): 519-531.
- [6] Lee J S, Hoppel K W, and Mango S A, *et al.* Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric SAR imagery. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 1994, GRS-32(5): 1017-1027.
- [7] Frery A C and Müller H J. A model for extremely heterogeneous cluster. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, 1997, GRS-35(3): 648-659.
- [8] Chandrasekhar S. Radiative Transfer, New York, Dover Pub., 1960: 1-50.
- [9] Jin Y Q. Electromagnetic Scattering Modelling for Quantitative Remote Sensing, Singapore, World Scientific, 1993: 1-11.
- [10] Barakat R. Statistics of the Stokes parameters. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 1987, 4(7): 1256-1263.
- [11] Brosseau C. Statistics of the normalized Stokes parameters for a Gaussian stochastic plane wave field. *Appl. Opt.*, 1995, 34(22): 4788-4793.
- [12] 金亚秋, 张南雄. 合成孔径雷达多视图像中4个Stokes参数的统计特性[J]. 电子与信息学报, 2002, 24(11): 1648-1658.  
Jin Y Q and Zhang N X. Statistics of four Stokes parameters in multilook polarimetric SAR imagery. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2002, 24(11): 1648-1658.
- [13] Eliyahu D. Vector statistics of correlated gaussian fields. *Physical Review*, 1993, 74(4): 2881-2892.
- [14] 王雪松, 李永祯, 肖顺平等. 电磁波瞬态极化的统计特性[J]. 中国科学(E辑), 2004, 34(8): 919-929.  
Wang X S, Li X Z, and Xiao S P, *et al.* Instantaneous polarization statistics of electromagnetic waves. *Science of China, Series E*, 2004, 34(8): 919-929.
- [15] 王雪松. 宽带极化信息处理的研究[D]. [博士学位], 长沙: 国防科技大学, 1999.6.
- [16] 李永祯. 瞬态极化统计特性及处理的研究[D]. [博士学位], 长沙: 国防科技大学, 2005.12.
- [17] Prudnikov A P, Brychkov Y A, and Maichev I O. Integrals and Series, Vol.2. New York: Gordon and Breach, 1986.
- 刘 涛: 男, 1978年生, 博士生, 研究兴趣为雷达极化信息处理.  
王雪松: 男, 1972年生, 教授, 博士生导师, 研究兴趣为综合电子战建模与仿真、极化信息处理等.  
肖顺平: 男, 1964年生, 教授, 博士生导师, 研究兴趣为综合电子战建模与仿真、极化信息处理等.