

# 一种高性能低复杂度的非规则 LDPC 码的构造方法

郭锐<sup>①②</sup> 刘济林<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(杭州电子科技大学通信学院 杭州 310018)

<sup>②</sup>(浙江大学信息与电子工程系 杭州 310027)

**摘要:** 该文提出了一种基于置换矩阵(permutation matrix)的非规则低密度奇偶校验(LDPC)码构造方法。首先,提出了基于改进 eIRA(IeIRA)算法的全局矩阵;接着,通过对全局矩阵  $M$  进行矩阵置换,生成 LDPC 码的校验矩阵  $H$ ;研究了校验矩阵  $H$  中短圈(short cycle)长度与置换矩阵循环移位系数的关系,通过选择循环移位系数,以达到改善误比特率性能的目的。仿真结果表明,该文提出的构造方法在保证线性编码复杂度的前提下,增大了码字的最小距离,减少了小停止集合(stopping set)的数量,降低了误比特率的差错平台(error floor)(达到  $10^{-9}$ )。

**关键词:** 低密度奇偶校验(LDPC)码;置信传播(BP)算法;差错平台;置换矩阵;停止集合

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)04-0826-05

## A Class of Irregular LDPC Codes with High Performance and Low Encoding Complexity

Guo Rui<sup>①②</sup> Liu Ji-lin<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(Institute of Communications, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

<sup>②</sup>(Department of Information Science and Electronic Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** A class of structured irregular Low-Density Parity-Check (LDPC) codes with high performance and low complexity is proposed in this paper. First, a global matrix  $M$  with a triangular plus dual-diagonal form based on Improved eIRA (IeIRA) method is designed. Then, each '1' in the global matrix  $M$  is replaced with a permutation matrix; each '0' is replaced with a null matrix to generate the parity check matrix  $H$ . Finally, the relationship between the length of short cyclic in the parity matrix  $H$  and the cyclic shift coefficient is given. Based on the relationship, error floor of BER is lowered by selecting proper cyclic shift coefficient of each permutation matrix. Simulation shows that the proposed method can reduce the number of small stopping set, increase the minimum distance of LDPC codes, and achieve very low error floor with linear encoding complexity.

**Key words:** LDPC code; BP algorithm; Error floor; Permutation matrix; Stopping set

### 1 引言

由Gallager提出的低密度奇偶校验(LDPC)码是一种线性分组码,其校验矩阵是稀疏矩阵,矩阵中除极少一部分元素非零外,其它大部分元素都为零<sup>[1]</sup>。LDPC码因其优良的性能和简单实用的译码算法——置信传播算法(BP algorithm)<sup>[2]</sup>广泛应用于无线通信领域。非规则LDPC码具有比规则LDPC码更优越的性能,近年来受到越来越多研究者的关注<sup>[3]</sup>。

目前非规则LDPC码常见的构造方法主要有随机构造法和代数构造法。虽然随机构造的非规则LDPC码(特别是长码)性能优越,然而,采用随机构造方法,不利于实现,使用起来比较困难。置换矩阵法作为一种代数构造方法,因其低的编码复杂度、易于操作等优点受到广泛关注。在文献[4]中,作者提出了一类基于SFT置换矩阵的非规则LDPC码构造方

法,降低了非规则LDPC码编译码复杂度。但其全局矩阵仍随机构造,且基于SFT的构造方法具有较高的误比特率差错平台。在文献[5]中,作者提出了另一种基于置换矩阵的非规则LDPC码构造方法,但其结构不够灵活。

本文提出了一种高性能、低复杂度,基于置换矩阵的非规则LDPC码构造方法:提出了基于改进 eIRA(IeIRA)形式的全局矩阵,通过对全局矩阵  $M$  进行矩阵置换,生成 LDPC 码的校验矩阵  $H$ ;研究了校验矩阵  $H$  中短圈的长度与置换矩阵循环移位系数的关系,通过选择合适的循环移位系数,降低了差错平台、提高了误比特性能。

### 2 基于 IeIRA 全局矩阵的构造

基于置换矩阵的非规则 LDPC 码构造方法如下:先构造一个  $J \times K$  的全局矩阵  $M$ ,然后将  $M$  矩阵中的每个“1”用一个  $q \times q$  的单位置换矩阵代替,  $M$  矩阵中的每个“0”用一个  $q \times q$  的全零矩阵取代,其中单位置换矩阵由单位矩阵向右循环移位得到。这样得到的校验矩阵  $H$  的大小为  $Jq \times Kq$ ,

并且  $\mathbf{H}$  的度数分布和全局矩阵  $\mathbf{M}$  类似。采用置换矩阵构造的非规则 LDPC 码的性能主要由全局矩阵结构和各个置换矩阵的循环移位系数决定<sup>[4]</sup>。因此,高性能、低复杂度的全局矩阵构造是非规则 LDPC 码构造的基础。

### 2.1 基于 eIRA 方法的全局矩阵构造

文献[6]中,作者提出了基于 eIRA 的非规则 LDPC 码构造方法,采用了如下形式的校验矩阵:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_u | \mathbf{M}_p] \quad (1)$$

其中  $\mathbf{M}_u$  是一个  $J \times (K - J)$  矩阵。 $\mathbf{M}_p$  是个  $J \times J$  的双对角方阵,其中前  $J - 1$  列的重量为 2,最后一列的重量为 1,表示如下:

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \cdots & & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\mathbf{M}_u$  是一个随机产生,且列重大于 2 的矩阵。采用以上规则构造的校验矩阵  $\mathbf{M}$ ,相应的生成矩阵  $\mathbf{G}$  具有以下形式:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I} | \mathbf{P}] = [\mathbf{I} | \mathbf{M}_u^T \mathbf{M}_p^{-T}] \quad (3)$$

式(3)刚好具有差分编码的形式,可以采用如图 1 所示的编码器来对输入的信息比特进行编码:其中  $\mathbf{U}$  为信息矢量, $\mathbf{P}$  为校验矢量,且  $\mathbf{P}^T = \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{M}_u^T \mathbf{U}^T$ 。

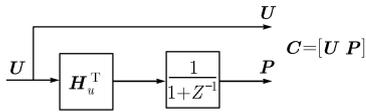


图1 eIRA 编码器的结构

### 2.2 基于改进 eIRA 方法(IeIRA)的全局矩阵构造

采用上述 eIRA 方法构造的全局矩阵,具有编码简单、易于实现的特点,且能完全并行地译码。但是,由于度数越低的比特节点在 BP 译码时,收敛越慢,并且相应的对数似然比(LLR)收敛于一个较小的值<sup>[7]</sup>。eIRA 方法大量地使用重量为 2 的列,特别是在  $\mathbf{M}_p$  中,降低了码字的性能。因此,本文改进了 eIRA 方法(记为 IeIRA),采用了一种双对角阵加三角阵形式的  $\mathbf{M}_p$  来代替在 eIRA 算法中双对角阵形式的  $\mathbf{M}_p$ ,减少重量为 2 的列的数量,改善了码字的性能。IeIRA 方法以下:校验矩阵也具有式(1)所示的结构, $\mathbf{M}$  的左边  $\mathbf{M}_u$  的构造同 eIRA 方法一样,只是右边  $\mathbf{M}_p$  采用如下的形式:

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ 1 & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

即在双对角阵的第  $J - 1$  行,第  $K$  列增加一个“1”,在双对角阵的左下角允许少量的“1”存在,使新的  $\mathbf{M}_p$  具有双对角

阵加三角阵的形式。

## 3 基于置换矩阵的非规则 LDPC 码构造

### 3.1 基于置换矩阵的非规则 LDPC 码校验矩阵的结构

构造好全局矩阵后,将全局矩阵  $\mathbf{M}$  中的“1”用一个  $q \times q$  置换矩阵代替,“0”用一个  $q \times q$  全零矩阵代替,其中置换矩阵由单位矩阵向右循环移位得到。这样得到  $Jq \times Kq$  校验矩阵  $\mathbf{H}$ ,其结构如下:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_u | \mathbf{H}_p] \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{H}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & & & \mathbf{H}_{1,K-J} \\ \cdots & \cdots & & \\ \cdots & & \cdots & \\ \mathbf{H}_{J,1} & \cdots & & \mathbf{H}_{J,K-J} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{H}_{J-1,K-J+1} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{I}(p-1) \\ \mathbf{H}_{J,K-J+1} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}$  和  $\mathbf{I}$  分别是  $q \times q$  的全 0 矩阵和单位阵,  $\mathbf{I}(q-1)$  由单位阵循环右移  $q-1$  位得到。在  $(s,t)$  位置的每个子矩阵  $\mathbf{H}_{s,t}$  ( $1 \leq s \leq J, 1 \leq t \leq K - J + s$ ) 要么是  $q \times q$  的全 0 矩阵,要么是  $q \times q$  的置换矩阵。 $(s,t)$  处的置换矩阵  $\mathbf{H}_{s,t}$  记着  $\mathbf{I}(C_{s,t})$ ,即  $\mathbf{H}_{s,t}$  是由单位矩阵循环右移  $C_{s,t}$  位得到,其中  $C_{s,t}$  是循环移位系数。

### 3.2 循环移位系数与校验矩阵 $\mathbf{H}$ 中短圈长度的关系

由于采用 BP 译码算法时,非规则 LDPC 码的性能受其 Tanner 图中短圈的影响,过多的短圈将导致大量的小停止集合,影响了 LDPC 码的差错平台。而短圈的长度又由全局矩阵的结构和置换矩阵的循环移位系数  $C_{s,t}$  决定。在 Tanner 图中,一序列相连的节点  $(n_0, n_1, \dots, n_l)$  且  $n_0 = n_l$  称为一个闭式路径(closed path);没有重复边的闭式路径称为一个圈(cyclic)。

如果在全局矩阵  $\mathbf{M}$  中存在一个闭式路径,则对该全局矩阵进行矩阵置换,得到的校验矩阵  $\mathbf{H}$  中将含有圈。对于一个含有长度为  $2k$  闭式路径的全局矩阵  $\mathbf{M}$ ,假设其中的闭式路径  $P$  由  $(v_0, c_0, v_1, c_1, \dots, v_{n-1}, c_{n-1}, v_0)$  组成,其中  $v_i, c_i$  分别为信息节点和校验节点。 $(0 \leq v_i < K, 0 \leq c_i < J)$ ,如果全局矩阵  $\mathbf{M}$  在位置  $(c, v)$  处对应的循环移位为  $s_{c,v}$ ,则在矩阵  $\mathbf{H}$  中由闭式路径  $P$  所造成的圈的长度为<sup>[8,9]</sup>

$$L = 2k \frac{q}{(q, S)} \quad (6)$$

其中  $S \equiv s_{c_0, v_0} - s_{c_0, v_1} + s_{c_1, v_1} - s_{c_1, v_2} + \dots + s_{c_{n-1}, v_{n-1}} - s_{c_{n-1}, v_0} \pmod{q}$ ,  $(q, S)$  为  $q$  和  $S$  的最大公约数。其中  $q/(q, S)$  称为长度扩展因子(LEF),当且仅当  $S = 0$  时,取值为 1;当  $q$  为素数时,取值为 1 或  $q$ 。

### 3.3 校验矩阵 $H$ 的构造和循环移位系数的选择

如前所述,循环移位系数会对非规则 LDPC 码的性能造成影响。在文献[4]中,作者采用了 SFT 方法来设计每个置换矩阵的循环移位系数,指出在全局矩阵  $M$  在  $(s,t)$  处的循环移位系数  $C_{s,t} = b^s a^t \bmod p$ 。其中  $a, b$  满足:存在整数因子  $k, j$  使得  $a^k \equiv 1 \bmod p, b^j \equiv 1 \bmod p$ , 并且  $p$  为素数。但是对于大多数  $j, k, p$  的组合,很难找到满足条件的  $(a,b)$ , 且采用这种方法构造的非规则 LDPC 码有较高的差错平台。

本文采用 ACE(Approximate Cycle Extrinsic message degree)算法<sup>[10]</sup>,通过避免产生短圈来减少小停止集合的数量。在 Tanner 图中,一个长度为  $2n$  的圈,所对应的 ACE 为  $\sum_{i=1}^n (d_i - 1)$ 。其中,  $d_i$  为该圈中,第  $i$  个比特节点的度数。

假设全局矩阵  $M$  中的一个闭式路径  $P$  所对应的 ACE 为  $\beta$ , 长度扩展因子 LEF 为  $f$ , 则在由全局矩阵  $M$  构成的非规则 LDPC 码校验矩阵  $H$  中,相应的短圈所对应的 ACE 为  $f\beta$ 。因此,为了避免小 ACE 的圈,全局矩阵  $M$  中 ACE 较小的闭式路径应对应一个较大的长度扩展因子 LEF,至少要大于  $1(LEF > 1)$ 。采用以下的步骤来选择循环移位系数:

(1)采用 IeIRA 法构造全局矩阵  $M$ 。其中  $M$  具有式(1)的结构,其中  $M_u$  列重大于 2,  $M_p$  采用式(4)所示的双对角阵加三角阵的结构。然后采用度数优化方法对构造的全局矩阵进行优化<sup>[11]</sup>。使得  $M$  中尽量不含有 ACE=0 的闭式路径。

(2)检测全局矩阵  $M$  中 ACE 值小于预定值的闭式路径,称为非法闭式路径(illegal paths)。检测方法采用如下的矩阵<sup>[12]</sup>:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{J,J} & M_{J,K} \\ M_{J,K}^T & \mathbf{0}_{K,K} \end{bmatrix}$$

矩阵  $A$  的  $J+K$  行或者列对应于全局矩阵 Tanner 图上的  $J+K$  个节点。令  $\alpha_{rt}^{(n)}$  表示所有  $A^n$  组成的集合,则有如下的表达式:

$$\alpha_{rt}^{(n)} = \sum_{i_1=0}^{J+K-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{J+K-1} \alpha_{ri_1} \alpha_{i_1 i_2} \cdots \alpha_{i_{n-1} t} \quad (7)$$

因此,如果在节点  $r$  和节点  $t$  存在一个长度为  $n$  的路径,上式非零,反之,上式为零。由于全局矩阵通常比较小,所以通过矩阵  $A$  和它的幂,可以很快找到全局矩阵  $M$  的非法闭式路径。

(3)搜索循环移位系数。对于每个非法闭式路径,为了使置换后的校验矩阵中短圈长度大于全局矩阵中短圈的长度,则有不等式  $S \neq 0$ , 其中  $S$  为闭式路径的总移位数。当所有的闭式路径都搜索完后,就建立了一个不等式组。因此每个置换矩阵的循环移位系数就可以在满足以上不等式组的情况下,通过计算机搜索,得到满足条件的整数。

当非法闭式路径太多时,通过计算机搜索的方法可能很难找到一个能够满足所有不等式的循环移位系数,因此,通

常设定一个门限,比如说,只对长度  $\leq 16$  的闭式路径进行搜索。这里,  $q$  不需要必须为素数。但如果  $q$  取素数,当  $S$  不为零时,长度扩展因子  $q/(q,S)$  只能取最大值  $q$ ,简化了设计。

## 4 编码的实现

如果要降低 LDPC 码的编码复杂度,校验矩阵  $H$  的结构是关键, Richardson 研究表明,  $H$  要具有近似下三角阵的结构,或者具有循环或者准循环的结构,才可实现线性或者近似线性的编码复杂度。因此,在进行编码前,先分析下

校验矩阵  $H$  的结构,在  $H_p$  的右下角,采用了  $\begin{bmatrix} I & I(q-1) \\ I & I \end{bmatrix}$  形状的分块矩阵,为了表述方便,令

$$I_b = \begin{bmatrix} I & I(q-1) \\ I & I \end{bmatrix} \quad (8)$$

研究发现,对  $I_b$  进行行列互换,可以得到近似双对角阵结构的分块矩阵  $I_{ad}$ 。交换规则如下:

$$I_b(j,k) = \begin{cases} I_{ad}(2j-1,2k-1), & 1 \leq j,k \leq q \\ I_{ad}(2(j-q),2(k-q)), & q+1 \leq j,k \leq 2q \end{cases} \quad (9)$$

其中  $I_b(j,k)$  表示矩阵  $I_b$  中第  $j$  行,  $k$  列的元素,  $I_{ad}(2j-1, 2k-1)$  为  $I_{ad}$  第  $2j-1$  行,  $2k-1$  列的元素。如果将  $I_b$  中右上角子矩阵  $I(q-1)$  在  $(1,q)$  位置上的 1 置为 0,通过对  $I_b$  进行重新排列可以得到维数为  $2q \times 2q$  的双对角阵  $I_d$ 。因此,对构造的校验  $H$  进行矩阵变换,将  $H$  的行  $H_{J-1}=[H_{J-1,1}, \dots, H_{J-1,K-2}, I, I(q-1)]$  和  $H_J=[H_{J,1}, \dots, H_{J,K-2}, I, I]$  分别作为新矩阵(记着  $H_e$ )的奇数行和偶数行,并且把  $H$  的列  $U_1=[0,0,\dots, I, I]^T$  和  $U_2=[0,0,\dots, I(q-1), I]^T$  分别作为  $H_e$  矩阵的奇数列和偶数列。则变换后的矩阵  $H_e$  具有双对角阵加下三角阵的结构,能实现线性编码复杂度,而且由于对矩阵进行行变换不影响码字的结构,进行列变换只改变比特节点的位置,不影响码字的性能。因此,可以通过  $H_e$  进行编码。变换后的矩阵记着  $H_e$ , 其结构如下:

$$H_e = [H_u^e | H_p^e] \quad (10)$$

其中

$$H_u^e = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & \cdots & H_{1,K-J} \\ H_{2,1} & \cdots & & H_{2,K-J} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{J-1,1}^e & \cdots & H_{J-1,K-J}^e \\ H_{J,1}^e & \cdots & H_{J,K-J}^e \end{bmatrix},$$

$$H_p^e = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ H_{2,K-J+1} & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & I & \vdots \\ H_{J-1,K-J+1}^e & L & H_{J-1,K-2}^e \\ H_{J,K-J+1}^e & L & H_{J,K-2}^e & I_d \end{bmatrix} \quad (11)$$

这里  $\mathbf{H}_{J-1,K-J+1}^e, \mathbf{H}_{J-1,1}^e$  等表示对校验矩阵  $\mathbf{H}$  进行行列变换后, 相应位置的子矩阵, 由于只对  $\mathbf{H}$  矩阵的最后  $2q$  行和  $2q$  列进行了交换, 因此  $\mathbf{H}_e$  和  $\mathbf{H}$  的前  $(J-2)q$  行完全相同。

LDPC 码是线性分组码, 当且仅当  $\mathbf{H}\mathbf{X}^T=0$  时,  $\mathbf{X}$  是一个合法的码字。假设码字具有如下的结构  $\mathbf{X}=(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ , 其中  $\mathbf{u}$  为信息部分, 长度为  $(K-J)\times q$ ;  $\mathbf{p}$  为校验部分, 长度为  $J\times q$ , 分成  $J$  个部分, 每部分长度为  $q$ , 即  $\mathbf{X}=(\mathbf{u}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_J)$ 。于是编码方程写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{u1} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{u2} & \mathbf{H}_{2,K-J+1} & \mathbf{I} & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \mathbf{H}_{u,(J-1)}^e & \mathbf{H}_{J-1,K-J+1}^e & \mathbf{L} & \mathbf{H}_{J-1,K-2}^e & & \\ \mathbf{H}_{uJ}^e & \mathbf{H}_{J,K-J+1}^e & \mathbf{L} & \mathbf{H}_{J,K-2}^e & \mathbf{I}_d & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \\ \mathbf{p}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{J-1}^T \\ \mathbf{p}_J^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_1^T &= \mathbf{H}_{u1}\mathbf{u}^T \\ \mathbf{p}_2^T &= \mathbf{H}_{u2}\mathbf{u}^T + \mathbf{H}_{2,K-J+1}\mathbf{p}_1^T \\ &\vdots \\ \mathbf{I}_d \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{J-1}^T \\ \mathbf{p}_J^T \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{u,(J-1)}^e \\ \mathbf{H}_{u,J}^e \end{bmatrix} \mathbf{u}^T + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{J-1,K-J+1}^e \\ \mathbf{H}_{J,K-J+1}^e \end{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ &\quad + \mathbf{L} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{J-1,K-2}^e \\ \mathbf{H}_{J,K-2}^e \end{bmatrix} \mathbf{p}_{J-2}^T \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中  $\mathbf{H}_{u,1}=[\mathbf{H}_{1,1}, \mathbf{H}_{1,2}, \dots, \mathbf{H}_{1,K-J}]$ ,  $\mathbf{H}_{u,(J-1)}^e=[\mathbf{H}_{J-1,1}^e, \mathbf{H}_{J-1,2}^e, \dots, \mathbf{H}_{J-1,K-J}^e]$  则上式可以展开为

$$p_j(i) = \sum_{m=1}^{L-j} g_{i,m} u(\alpha_{j,m,i}) + \sum_{m=1}^{j-1} g_{i,m} p_m(b_{j,L-j+m,i}) \quad (14)$$

其中  $1 \leq i \leq q$ ,  $1 \leq j \leq J$ ,  $p_{J-1}(0) = 0$ ,  $p_J(0) = p_{J-1}(q)$ 。

$$\alpha_{j,m,i} = [i + C_{j,m}]_q \quad (15)$$

$$b_{j,L-j+m,i} = [i + C_{j,L-j+m}]_q + (m-1)q \quad (16)$$

其中  $[x]_q$  表示  $x$  模  $q$ 。上式中系数  $g_{i,m}$  如下

$$g_{i,m} = \begin{cases} 1, & \mathbf{H}_{j,m} = \mathbf{I}(C_{j,m}) \\ 0, & \mathbf{H}_{j,m} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中  $1 \leq j \leq J$ ,  $1 \leq m \leq L-2$ 。

基于 IEIRA 置换矩阵构造的 LDPC 码编码器结构如图 2 所示。

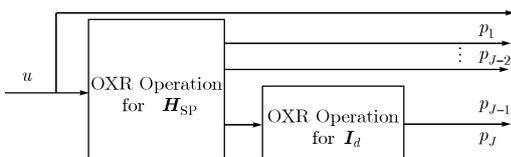


图 2 基于 IeIRA 置换矩阵构造的 LDPC 码编码器结构

$$\text{其中 } \mathbf{H}_{sp} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{u1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \dots \\ \mathbf{H}_{u2} & \mathbf{H}_{2,K-J+1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{u,(J-1)}^e & \mathbf{H}_{J-1,K-J+1}^e & \dots & \mathbf{H}_{J-1,K-2}^e & \\ \mathbf{H}_{uJ}^e & \mathbf{H}_{J,K-J+1}^e & \dots & \mathbf{H}_{J,K-2}^e & \end{bmatrix}.$$

### 5 仿真结果

实验中, 构造了一个速率为 1/2, 码长为 4128 的非规则 LDPC 码。首先构造了一个  $16 \times 32$  全局矩阵, 其中  $\mathbf{M}_p$  具有式(4)所示的结构。采用文献[11]中的方法来进行密度演化, 最大的比特节点度数为 8。度数分布为:  $\lambda_2 = 0.125$ ,  $\lambda_3 = 0.5$ ,  $\lambda_8 = 0.375$ 。置换矩阵的大小为  $129 \times 129$  ( $q = 129$ )。在构造中, 通过把长度为 4 的闭式路径所对应的 ACE 设置为无限大, 避免了校验矩阵  $\mathbf{H}$  中长度为 4 的短圈。同时为了提高搜索速度, 对于长度 6, 8, 10, 12, 14, 16 的短圈的 ACE 门限值设置为“10, 10, 10, 8, 8, 6”。

为了比较, 实验中还同时给出了以下几种同速率, 同码长的码字的性能:

- (1) 随机构造的规则 LDPC 码(不含长度为 4 的短圈);
- (2) 基于 eIRA 置换矩阵的非规则 LDPC 码(采用 eIRA 方法构造  $16 \times 32$  全局矩阵, 采用 ACE 方法计算循环移位系数);
- (3) 基于 SFT 置换矩阵的非规则 LDPC 码(采用本文提出的 IeIRA 方法构造  $16 \times 32$  全局矩阵, 循环移位系数的选择采用 SFT 方法);

采用 BPSK 调制方式, 在加性高斯白噪声信道上, 采用 BP 译码算法, 迭代 50 次。各种码字的误比特率性能如图 3, 图 4 所示:

实验中还采用文献[13]所述的方法, 估计了各种码字的最小距离。如表 1 所示。

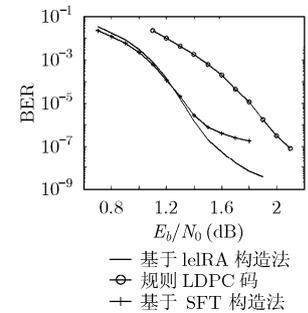


图 3 本文构造的 LDPC 码与基于 SFT 非规则 LDPC 码性能比较

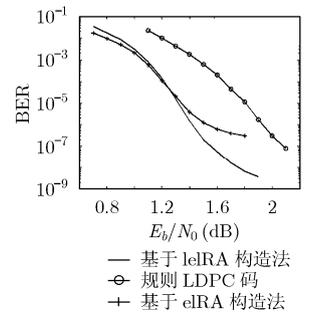


图 4 本文构造的 LDPC 码与基于 eIRA 置换矩阵的非规则 LDPC 码比较

表1 文中各种 LDPC 码的最小汉明距离

各种 LDPC 码	最小距离 $d_{\min}$
基于 eIRA 置换矩阵的非规则 LDPC 码	16
基于 SFT 置换矩阵的非规则 LDPC 码	18
基于本文 IeIRA 置换矩阵的非规则 LDPC 码	26

由图 3、图 4 可以看出, 本文所提出的基于 IeIRA 置换矩阵的非规则 LDPC 码构造方法, 与采用基于 SFT 置换矩阵以及基于 eIRA 置换矩阵方法相比, 显著地降低了非规则 LDPC 码的差错平台, 达到了约  $10^{-9}$ , 在高信噪比时, 具有更好的误比特率性能。这是因为: 一方面在 IeIRA 全局矩阵构造方法中, 采用了双对角阵加三角阵形式的  $M_p$  来代替 eIRA 方法中的双对角形式的  $M_p$ , 如表 1 所示, 增大了码字的最小距离, 改善了码字的距离特性; 另一方面, 通过采用 ACE 算法优化循环移位系数, 避免产生小 ACE 的短圈, 减少了小停止集合的数量。同时, 所提的方法只需生成一个很小的全局矩阵, 然后在全局矩阵上进行矩阵置换, 降低了编译码的复杂度。由于错误扩散的原因, 本文提出的基于 IeIRA 方法构造的 LDPC 码的性能在低信噪比时要略低于基于 eIRA 和 SFT 方法构造的 LDPC 码的性能。

## 6 结束语

本文提出了一种高性能、低计算复杂度的非规则 LDPC 码构造方法, 通过对采用 IeIRA 方法构造的全局矩阵进行矩阵置换, 生成非规则 LDPC 码的奇偶校验  $H$ , 增加了 LDPC 码字间的最小距离; 通过选择合适的循环移位系数, 减少了小停止集合的数量, 显著地降低了误比特率的差错平台。同时, 由于所提出的方法采用了置换矩阵的方式, 具有近似线性的编译码复杂度。

## 参考文献

- [1] Gallager R G. Low-density parity-check codes[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1962, 8(1): 21-28.
- [2] Mackay D J C. Good error-correcting codes based on very sparse matrices [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1999, 45(3): 399-431.
- [3] Heum C C. Technical issues for enhanced and beyond 3G systems[C]. The International Forum Future Mobile Telecommunications & China-EU Post Conference on Beyond 3G, Beijing, China, 2002: 892-901.
- [4] Hocevar D E. LDPC code construction with flexible hardware implementation[C]. in Proc. IEEE Int. Conf. Communications (ICC), Dallas, TX, USA, May 2003: 708-2711.
- [5] Fossorier M P C. Quasi-cyclic low-density parity-check codes from circulant permutation matrices[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2004, 50(8): 1788-1793.
- [6] Yang M, Li Yi, and Ryan W E. Design of efficiently encodable moderate-length high-rate irregular LDPC codes [J]. *IEEE Trans. on Commun.*, 2004, 52(4): 564-571.
- [7] Divsalar D, Dolinar S, and Pollara F. Iterative turbo decoder analysis based on density evolution [J]. *IEEE J. Select. Area in Commun.*, 2001,19(5):891-907.
- [8] Kang Jingyu, Fan Pingyi, and Cao Zhigang. Flexible construction of irregular partitioned permutation LDPC codes with low error floors [J]. *IEEE Communications Letters*, 2005, 9(6): 534-536.
- [9] Fan. J. Array codes as low-density parity-check codes [C]. in Proc. 2nd Int. Symp. on Turbo Codes & Related Topics, Brest, France, Sep. 2000: 543-546.
- [10] Tian T, Jones C, and Villasenor J, et al.. Construction of irregular ldpc codes with low error floors [C]. in Proc. IEEE Int. Conf. Communications (ICC), Dallas, TX, USA, May 2003: 3125-3129.
- [11] Richardson T, Shokrollahi A, and Urbanke R. Design of capacity approaching irregular low-density parity-check codes [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2001, 47(2): 638-656.
- [12] McGowan J A and Williamson R C. Loop removal from ldpc codes [C]. in Proc. IEEE Info. on Theory Workshop (ITW), Paris, France, Mar. 2003: 230-233.
- [13] Hu Xiao Yu and Fossorier M P C. On the computation of the minimum distance of low-density parity\_check codes[C]. 2004 IEEE International Conference on Communications, Paris, France, June 2004, Vol.2: 767-771.

郭锐: 男, 1980年生, 博士生, 从事无线通信、多媒体通信等方向研究。  
刘济林: 男, 1947年生, 教授, 从事图像处理、模式识别、多媒体通信等方面的研究。