

一种新的 MIMO 系统空间相关性的估计技术

李樾宾 王宗欣

(复旦大学通信科学与工程系 上海 200433)

摘要: 该文提出了在 MIMO 系统中一种估计发射及接收天线相关矩阵 \mathbf{R}_T , \mathbf{R}_R 的新算法。算法揭示了对于发射端(接收端)相关矩阵的估计精度和接收端(发射端)的天线的相关度密切相关,而与发射端(接收端)自身天线的相关度无关。此外,该文对估计性能与天线数量的关系也进行了分析。模拟结果表明,在使用约 200 个训练符号时,相关矩阵中每个元素的平均估计误差在 0.05 以下,而使用更多的训练符号时,估计精度将会进一步提高。

关键词: 多输入多输出(MIMO); 信道空间相关性; 天线相关矩阵; 相关度; 训练符号

中图分类号: TN92

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)03-0630-04

A Novel Spatial Correlation Estimation Technology in MIMO Communication System

Li Liang-bin Wang Zong-xin

(Communication Science and Engineering Department, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: A novel algorithm is proposed in this literature to estimate the transmit and receive antenna correlation matrix, \mathbf{R}_T and \mathbf{R}_R , in MIMO system. Theoretical analysis indicates that the estimation performance is improved when more training number is used. Interestingly, the performance of the estimation of antenna correlation matrix at one side is highly correlated to the correlation degree of the antennas at the other side, but not the correlation degree of itself. Moreover, the relationship between estimation performance and antenna numbers is also presented. Simulation results show that mean error of this algorithm is generally below 0.05 when 200 training symbols are used.

Key words: MIMO; Channel spatial correlation; Antenna correlation matrix; Correlation degree; Training symbols

1 引言

MIMO 技术的使用给无线通信带来了巨大的信道容量,当接收端已知信道状态信息(CSI)时,信道容量随着发射端与接收端天线数量的较小值 $\min(m, n)$ 的增加而线性增加^[1]。同时,研究也表明,无线信道之间的空间相关性会大大减小信道容量^[2],并且严重影响空分复用系统中符号误码率^[3]。因此,获知无线信道的空间相关性,具有重要的意义。例如,利用已知的发射天线相关矩阵 \mathbf{R}_T ,可以在发射端通过一种类似波束成形与最优功率分配的方法,将发送信号向量预先乘以 \mathbf{R}_T 的特征向量矩阵而获得最优的信道容量^[4]。

已有的用来估计相关信道的算法,大多是基于阵列天线的^[5]。但由于在 MIMO 系统中天线是任意分布的,此时基于阵列模型的算法就会失效,因而,需要一种基于信号处理且不依赖阵列天线的方法来估计相关信道。

本文使用的符号如下: \otimes 表示 Kronecker 积, $\text{vec}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 按列展开, $\text{tr}(\mathbf{A})$ 表示 \mathbf{A} 的迹, $\|\mathbf{A}\|_F$ 表示 Frobenius 范数, \mathbf{A}^H 表示 \mathbf{A} 的共轭转置, \mathbf{I}_n 表示 $n \times n$ 的单位阵。

2 MIMO 信道传输模型

假设 m 为发射天线数量, n 为接收天线数量,则在具有空间相关性的 MIMO 系统里,接收信号可以被表示为^[4]

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R}_R^{1/2} \mathbf{W} \mathbf{R}_T^{1/2} \mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (1)$$

其中 \mathbf{X} 是 $m \times T$ 的发射信号矩阵(T 为一个符号的长度), \mathbf{Y} 是 $n \times T$ 的接收信号矩阵, \mathbf{W} 是 $n \times m$ 统计独立同分布 CN(0,1)的信道矩阵, \mathbf{N} 为 $n \times T$ 统计独立同分布 CN(0, σ^2) 分布的噪声矩阵, \mathbf{R}_T 为发射天线相关矩阵, \mathbf{R}_R 为接收天线相关矩阵。若 $\mathbf{R}_T, \mathbf{R}_R$ 的特征值分解为 $\mathbf{R}_T = \mathbf{U}_T \mathbf{\Lambda}_T \mathbf{U}_T^H$, $\mathbf{R}_R = \mathbf{U}_R \mathbf{\Lambda}_R \mathbf{U}_R^H$, 则 $\mathbf{R}_R^{1/2}, \mathbf{R}_T^{1/2}$ 分别为 $\mathbf{R}_T^{1/2} = \mathbf{U}_T \mathbf{\Lambda}_T^{1/2} \mathbf{U}_T^H$, $\mathbf{R}_R^{1/2} = \mathbf{U}_R \mathbf{\Lambda}_R^{1/2} \mathbf{U}_R^H$ ^[4]。

假设块衰落(block fading)的信道模型,相干时间大于 T ,则在发送一个符号过程中, \mathbf{W} 保持不变。当系统处于训练状态时,使相邻两个训练符号的时间跨度大于 T ,则可以保证信道矩阵 \mathbf{W} 的统计独立。

进一步假设在接收天线端有足够大的入射延展角(indent angle spread),则信道的空间相关性主要取决于天线之间的空间相关性,而与信道本身无关。进而相对于快衰落(fast fading channel)的传播信道矩阵 \mathbf{W} 来说,天线的相关

矩阵 $\mathbf{R}_T, \mathbf{R}_R$ 可以近似为不变的。

3 天线相关矩阵 $\mathbf{R}_T, \mathbf{R}_R$ 的估计

对接收信号矩阵进行列展开并假设发射信号矩阵为单位阵, 重写式(1)为

$$\text{vec}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{R}_T^{1/2} \otimes \mathbf{R}_R^{1/2})\text{vec}(\mathbf{W}) + \text{vec}(\mathbf{N}) \quad (2)$$

其中 $\text{vec}(\mathbf{W})$ 和 $\text{vec}(\mathbf{N})$ 是独立分布的。定义 $\boldsymbol{\rho}_Y$ 为 $\text{vec}(\mathbf{Y})$ 的方差矩阵, 则有

$$\boldsymbol{\rho}_Y = \mathbf{E}\{\text{vec}(\mathbf{Y})\text{vec}(\mathbf{Y})^H\} = (\mathbf{R}_T \otimes \mathbf{R}_R) + \sigma^2 \mathbf{I}_{mn} \quad (3)$$

(1) 噪声功率谱密度的估计 对式(3)两边求迹运算, 则有

$$\text{tr}(\boldsymbol{\rho}_Y) = \text{tr}(\mathbf{R}_T)\text{tr}(\mathbf{R}_R) + mn\sigma^2 \quad (4)$$

如果假设信号在通过天线时, 在统计意义上满足能量守恒, 则 $\text{tr}(\mathbf{R}_T) = m$, $\text{tr}(\mathbf{R}_R) = n$ 。将其代入(4), 并定义 $\hat{\sigma}^2$ 为噪声功率谱密度 σ^2 的估计子, 可得

$$\hat{\sigma}^2 = \text{tr}(\boldsymbol{\rho}_Y)/(mn) - 1 \quad (5)$$

(2) 发送天线相关矩阵 \mathbf{R}_T 的估计 将噪声估计子的表达式(5)代入式(3)并定义 $\mathbf{P} = \mathbf{R}_T \otimes \mathbf{R}_R$, 则有

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\rho}_Y - \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_{mn} \quad (6)$$

将矩阵 \mathbf{P} 分解为 $n \times n$ 维的子矩阵, 每个定义为 \mathbf{A}_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m$), 子矩阵中第 (p, q) 元素为 $A_{i,j}^{(p,q)} = R^{(n \times (i-1) + p, n \times (j-1) + q)}$, ($p, q = 1, 2, \dots, n$)。容易证明, $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{R}_T^{(i,j)} \cdot \mathbf{R}_R$ 。故而, 有 $\text{tr}(\mathbf{A}_{ij}) = \text{tr}(\mathbf{R}_T^{(i,j)} \mathbf{R}_R) = nR_T^{(i,j)}$ 。对发送天线相关矩阵 \mathbf{R}_T 的 (i, j) 元素的估计为

$$\hat{R}_T^{(i,j)} = \text{tr}(\mathbf{A}_{ij})/n \quad (7)$$

(3) 接收天线相关矩阵 \mathbf{R}_R 的估计 重新将 \mathbf{P} 矩阵划分为 $m \times m$ 维的子矩阵并定义每一个为 $\mathbf{B}_{r,t}$ ($r, t = 1, 2, \dots, n$), 其中第 (u, v) 元素为 $B_{r,t}^{(u,v)} = R^{(n \times (u-1) + r, n \times (v-1) + t)}$, ($u, v = 1, 2, \dots, m$)。同理, 有 $\text{tr}(\mathbf{B}_{r,t}) = \text{tr}(\mathbf{R}_R^{(i,j)} \mathbf{R}_T) = mR_R^{(i,j)}$, \mathbf{R}_R 的第 (i, j) 元素为

$$\hat{R}_R^{(i,j)} = \text{tr}(\mathbf{B}_{ij})/m \quad (8)$$

4 算法性能分析

式(5), 式(7), 式(8)分别被用来估计噪声功率谱密度 σ^2 , 发射天线相关矩阵 \mathbf{R}_T 和接收天线相关矩阵 \mathbf{R}_R 。但是, 所有的这些表达式都与 $\boldsymbol{\rho}_Y$ 相关。假设信号是各态历经(Ergodic)的, 因此概率域上的期望可以被时间域上的平均替代, 使用越多的训练序列, 这种近似就越为精确。图1是接收机端进行信道相关矩阵估计的过程框图。若使用估计子的平均方差来衡量估计性能的好坏, 则有

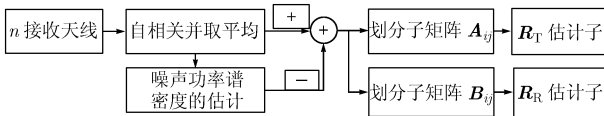


图1 天线相关矩阵估计的接收机设计

$$\text{var}\{\hat{\sigma}^2\} = (4\sigma^2/mn + 2\|\mathbf{R}_T/m\|_F^2 \|\mathbf{R}_R/n\|_F^2)/K \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \overline{\text{var}\{\hat{\mathbf{R}}_T\}} &= \sum_i \sum_j \text{var}\{\hat{R}_T^{(i,j)}\}/m^2 \\ &= (1 + \|\mathbf{R}_T/m\|_F^2 \|\mathbf{R}_R/n\|_F^2)/K \\ &\quad + 2\sigma^2(1+m)/(nK) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \overline{\text{var}\{\hat{\mathbf{R}}_R\}} &= \sum_i \sum_j \text{var}\{\hat{R}_R^{(i,j)}\}/n^2 \\ &= (1 + \|\mathbf{R}_R/n\|_F^2 \|\mathbf{R}_T/m\|_F^2)/K \\ &\quad + 2\sigma^2(1+n)/(mK) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\overline{\text{var}\{\hat{\mathbf{R}}_T\}}$, $\overline{\text{var}\{\hat{\mathbf{R}}_R\}}$ 分别是 \mathbf{R}_T 和 \mathbf{R}_R 中所有元素方差的平均值, K 为训练序列的长度, 其中每个训练符号为一个 $M \times M$ 单位矩阵。

假设噪声功率谱密度 $\sigma^2 < 0.1$, 则式(9), 式(10), 式(11)进一步可近似为

$$\text{var}\{\hat{\sigma}^2\} \approx 2\|\mathbf{R}_T/m\|_F^2 \|\mathbf{R}_R/n\|_F^2/K < 2/K \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \overline{\text{var}\{\hat{\mathbf{R}}_T\}} &\approx (1 + \|\mathbf{R}_T/m\|_F^2 \|\mathbf{R}_R/n\|_F^2)/K \\ &< 2\|\mathbf{R}_R/n\|_F^2/K < 2/K \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \overline{\text{var}\{\hat{\mathbf{R}}_R\}} &\approx (1 + \|\mathbf{R}_R/n\|_F^2 \|\mathbf{R}_T/m\|_F^2)/K \\ &< 2\|\mathbf{R}_T/m\|_F^2/K < 2/K \end{aligned} \quad (14)$$

式(12), 式(13), 式(14)是估计子方差的上限(证明略)。如果简单地将估计子方差的上限视为一种对估计性能的评价, 则从式(12)–式(14)可见当增加训练序列的长度 K 时, 估计性能将会有所提高。

当考虑估计算法性能与天线相关矩阵的相关度^[6]和天线数量的关系时, 进一步对(13), 式(14)式的考察可以获得以下两个定理:

定理1(证明略) 一边天线相关矩阵估计的性能与另一边的相关度有关。也就是说, 发射(接收)相关矩阵的估计性能取决于接收(发射)天线的相关度: $\mathbf{R}_T(\mathbf{R}_R)$ 估计子的方差随着接收天线(发射天线)相关度的降低而减少; 而即使在 $\mathbf{R}_T(\mathbf{R}_R)$ 完全相关的情况下, 估计子的方差也小于 $2/K$ 。该推论主要由于估计方差的上限值(13)(或式(14))主要受 $\|\mathbf{R}_R/n\|_F^2$ (或 $\|\mathbf{R}_T/m\|_F^2$) 的影响。

定理2(证明略) 当发射和接收天线的相关度都比较小时, 增加另一边天线数量会减少这边的天线相关矩阵的估计子的方差; 但是, 当两边天线的相关度都比较大时, 对于不同的天线数量, 估计性能基本保持不变。

5 仿真结果

仿真分为具有固定相关度及随机相关度的两种情况。当两边的相关度固定时, 给定发射天线相关矩阵的特征值矩阵为 Λ_T , 接收天线相关矩阵的特征值矩阵为 Λ_R , 而相应的特征向量矩阵是随机生成的; 在相关度是随机的情况下, 特征值矩阵和特征向量矩阵都是随机生成的。每个训练符号都

为单位阵。

使用估计得到的天线相关矩阵与真值矩阵之间的每个元素的平均误差 E 来衡量估计性能。

$$E = \|\widehat{\mathbf{R}}_T - \mathbf{R}_T\|_F / m \quad (15)$$

其中 \mathbf{R}_T 是 $m \times m$ 维的天线相关矩阵的真值, $\widehat{\mathbf{R}}_T$ 是估计结果。

(1) 估计性能与训练符号数量的关系 使用 4×4 的 MIMO 系统, 噪声功率谱密度设置为 -20 dB。在固定相关度的特殊例子, 发射与接收相关矩阵的特征值被分别设置为 $\mathbf{A}_T = \text{diag}[1.9, 1.4, 0.4, 0.3]$ (具有较高的相关度), $\mathbf{A}_R = \text{diag}[1.3, 1.2, 0.8, 0.7]$ (具有较低的相关度)。同样我们给出了使用 Monte Carlo 仿真的随机相关度的情况。训练序列使用的数量范围为 20 到 200。仿真结果在表 1, 图 2 和图 3 里。

表 1 给出了一组随机生成的天线相关矩阵(特征向量矩阵是随机生成的)与他们的估计值之间的比较。从表中可见估计值非常接近真值, 而且 200 个训练符号可以提供比较好的性能。

图 2 和图 3 都显示了当训练序列增加时, 算法的估计性能有所提高。此外, 在具有固定相关度的图 2 中, 可以粗略的发现推论 1 所揭示结论。在这个例子里, 相对来说, 发射天线具有更高的相关度, 它降低了接收天线相关矩阵估计的性能。而在图 3 中, 可以发现当使用 200 个训练符号时, 平均的估计误差小于 0.05。

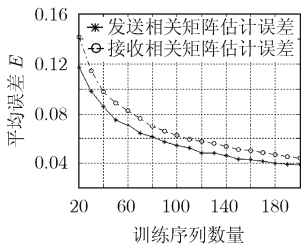


图 2 4×4 MIMO 系统里估计平均误差与训练数量的关系

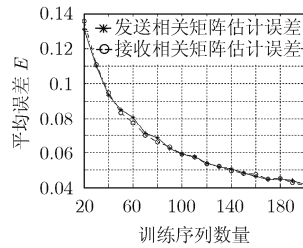


图 3 在随机相关度的 4×4 MIMO 系统里, 天线相关矩阵的估计平均误差与训练符号数量的关系

(2) 估计性能与天线相关度的关系 使用 2×2 的 MIMO 系统, 200 个训练符号, 噪声功率谱密度设置为 -20 dB。在图 4 中, x 轴和 y 轴上的刻度分别代表发射天线相关矩阵较大的特征值(在 1 到 2 的范围里)和接收天线相关矩阵较大的特征值, 而 z 轴代表平均误差。

图 4 详细的说明了推论 1 的结论: 当另一边天线相关度增加时, 这边的估计性能有所下降。

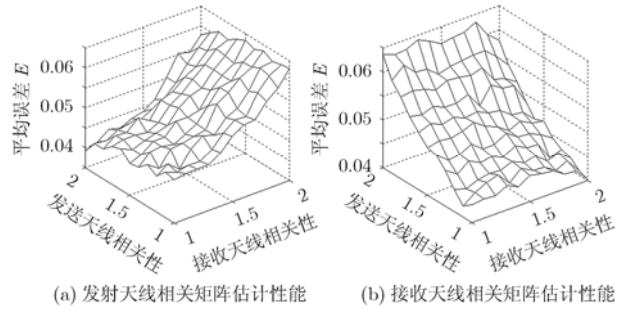


图 4 2×2 MIMO 中, 仿真平均误差与相关度的关系

(3) 估计性能与天线数量的关系 这里的仿真给出了两种极端情况下的例子: 天线完全相关, 此时特征值矩阵为 $\text{diag}[\theta, 0, 0, \dots, 0]$ (θ 为天线数量); 天线完全独立, 此时特征值矩阵为 $\text{diag}[1, 1, \dots, 1]$ 。在图 5 和图 6 中, x 轴, y 轴和 z 轴分别代表了发送天线数量, 接收天线数量和平均估计误差。

仿真结果与推论 2 一致, 当信道完全独立时, 增加一边的天线数量会提高另一边的估计性能。在图 5 中, 增加接收(发送)天线的数量并不影响接收端(发射端)的平均误差, 但很大程度上提高了发射端(接收端)的性能。当天线是完全相关时, 天线数量的变化并不影响估计性能的好坏(图略)。

表 1 真值与估计值之间的比较

| | | 真值 | | | | 估计值 | | | |
|----------------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|--|
| \mathbf{R}_T | 1.2979 | 0.5029 | 0.5390 | 0.1517 | 1.2992 | 0.5306 | 0.5901 | 0.1668 | |
| | 0.5029 | 0.6211 | 0.1705 | 0.2937 | 0.5306 | 0.5944 | 0.2047 | 0.3118 | |
| | 0.5390 | 0.1705 | 0.7579 | -0.1747 | 0.5901 | 0.2047 | 0.7431 | -0.1697 | |
| | 0.1517 | 0.2937 | -0.1747 | 1.3231 | 0.1668 | 0.3118 | -0.1697 | 1.3633 | |
| \mathbf{R}_R | 1.0931 | -0.0029 | 0.0596 | 0.1865 | 1.0332 | 0.0028 | 0.0408 | 0.1470 | |
| | -0.0029 | 1.2809 | 0.0933 | -0.0096 | 0.0028 | 1.3838 | 0.1667 | 0.0075 | |
| | 0.0596 | 0.0933 | 0.8243 | 0.0632 | 0.0408 | 0.1667 | 0.8230 | 0.0635 | |
| | 0.1865 | -0.0096 | 0.0632 | 0.8017 | 0.1470 | 0.0075 | 0.0635 | 0.7600 | |

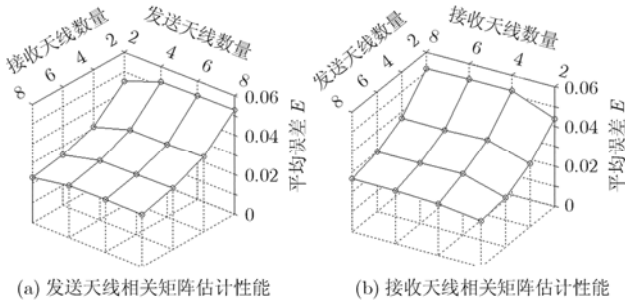


图5 完全独立信道中, 仿真平均误差与天线数量的关系

6 结束语

通过计算接收到的训练序列的方差, 可以估计得到发射天线的相关矩阵和接收天线的相关矩阵。当训练符号的数量增加时, 估计性能将会提高。本算法在噪声功率谱密度相对较小时, 使用约 200 个训练符号就能提供较好的估计性能。此外, 当考虑估计性能与天线相关度的关系时, 理论分析和仿真都表明一边的估计性能和另一边的天线相关度有密切联系, 但和自身的相关度无关。当考虑估计性能和天线数量的关系时, 同样, 如果天线是完全独立的, 一边的天线数量决定了另一边的天线相关矩阵的估计性能, 而如果天线是完全相关的, 发射与接收天线的数量并不会影响估计性能。

参考文献

[1] Telatar E. Capacity of multi-antenna gaussian channels. Tech. Memo., AT&T Bell Laboratories, 1995.

- [2] Chen-Nee C, Tse D N C, and Kahn J M, *et al.* Capacity scaling in MIMO wireless systems under correlated fading. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2002, 48(3): 637-650.
- [3] Clerckx B, Vandendorpe L, and Vanhoenacker-Janvier D, *et al.* Optimization of nonlinear signal constellations for real-world MIMO channels. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2004, 52(4): 894-902.
- [4] Jorswieck E A and Boche H. Channel capacity and capacity-range of beamforming in MIMO wireless systems under correlated fading with covariance feedback. *IEEE Trans. on Wireless Communications*, 2004, 3(5): 1543-1553.
- [5] Yen-Chih C and Su Y T, MIMO channel estimation in spatially correlated environments, 15th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2004, 1(1): 498-502.
- [6] Boche H and Jorswieck E A. On the ergodic capacity as a function of the correlation properties in systems with multiple transmit antennas without CSI at the transmitter. *IEEE Trans. on Communications*, 2004, 52(10): 1654-1657.

李樾宾: 男, 1982 年生, 硕士生, 研究方向为 MIMO 空时信号处理.

王宗欣: 男, 1940 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为无线通信信号处理.