

## 基于四阶累积量的非圆信号测向方法

刘 剑<sup>①②</sup> 黄知涛<sup>①</sup> 周一宇<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

<sup>②</sup>(空军工程大学电讯工程学院 西安 710077)

**摘 要:** 对通信系统中大量使用的 BPSK 等非圆信号测向, 可以采用共轭扩展 MUSIC(CE-MUSIC)算法, 也可以采用基于四阶累积量的 MUSIC-like 算法。CE-MUSIC 算法没有利用高阶信息, MUSIC-like 算法没有利用信号的非圆信息, 性能均受限。该文提出的四阶扩展 MUSIC(FO-EMUSIC)算法利用了非圆信号在四阶累积量中的信息, 分辨力和测角精度明显优于 MUSIC-like 算法, 略优于 CE-MUSIC 算法, 可测向阵元数大于 CE-MUSIC 算法和 MUSIC-like 算法。针对均布线阵, 为减小计算量, 还提出了 FO-EMUSIC/ULA 算法。仿真实验验证了 FO-EMUSIC 算法的优良性能。

**关键词:** 阵列信号处理; 测向; 阵列扩展; 四阶累积量; MUSIC

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)04-0876-05

## A New Forth-Order Direction Finding Algorithm for Noncircular Signals

Liu Jian<sup>①②</sup> Huang Zhi-tao<sup>①</sup> Zhou Yi-yu<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

<sup>②</sup>(Telecommunication Engineering College, Airforce Engineering University, Xi'an 710077, China)

**Abstract:** Conjugate Extended MUSIC (CE-MUSIC) and MUSIC-like algorithm can be used to estimate the directions of arrival of noncircular signals (e.g. BPSK modulated signals) which are widely used in communication systems. The performance of these two algorithms is not so good because no high order information is used in CE-MUSIC algorithm and no noncircular information is used in MUSIC-like algorithm which is based on forth-order cumulants. In this paper, a new direction finding algorithm called Forth-Order Extended MUSIC (FO-EMUSIC) for noncircular signals is proposed. It can detect more noncircular signals than MUSIC-like and CE-MUSIC algorithms and has better performance (in terms of resolution and angular precision) than MUSIC-like algorithm, and a little better than CE-MUSIC algorithm. A new FO-EMUSIC algorithm for Uniform Linear Array (ULA) called FO-EMUSIC/ULA which needs much less computation load than FO-EMUSIC is also proposed in this paper. Simulation results show the better performance of FO-EMUSIC than MUSIC-like and CE-MUSIC algorithms.

**Key words:** Array signal processing; Direction finding; Aperture extension; Forth-order cumulants; MUSIC

### 1 引言

自上世纪八十年代初期以来, 以MUSIC算法<sup>[1]</sup>为代表的二阶高分辨测向算法蓬勃发展, 解决了测向中的高分辨问题<sup>[2]</sup>, 但这些算法只能对小于阵元数的信号测向。八十年代末发展起来的以MUSIC-like算法<sup>[3]</sup>为代表的四阶高分辨测向算法虚拟扩展了阵列孔径<sup>[4]</sup>, 可对适当大于阵元数的信号测向, 分辨力和测角精度也得到了提高。近年来, 对通信系统中大量使用的BPSK等非圆信号测向已成为一个研究热点。对非圆信号测向时, 若采用MUSIC算法则可测向信号数必须小于阵元数, 采用基于四阶累积量的MUSIC-like算法可

对大于阵元数的信号测向, 多源入射且角度距离较近时分辨力和测角精度较MUSIC算法均有所提高, 但性能改善有限。共轭扩展MUSIC(CE-MUSIC)算法<sup>[5,6]</sup>是针对非圆信号提出的, 在可测向信号数、分辨力和测角精度等方面均有提高, 但CE-MUSIC算法没有利用高阶信息, 可测向信号数没有得到充分扩展。本文提出的四阶扩展MUSIC(FO-EMUSIC)算法充分利用了非圆信号在四阶累积量中的信息, 可测向信号数大于MUSIC-like和CE-MUSIC算法, 分辨力和测向精度远高于MUSIC-like算法, 略高于CE-MUSIC算法。

### 2 数据模型与四阶累积量测向算法

#### 2.1 数据模型

假设有  $D$  个不相关窄带信号入射到  $M$  元阵列上, 信号

入射方向与阵列共平面, 阵列位于远场。文中认为信号数  $D$  已知或已估计得到了。上标 “\*” 表示共轭, “T” 表示转置, “H” 表示共轭转置。阵列输出矢量为

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_D(t)]^T$  为信号矢量,  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$  为噪声矢量,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_D)]$

为导向矩阵, 其中  $\mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(d_{x,1}\cos\theta + d_{y,1}\sin\theta)} \\ \vdots \end{bmatrix}$ ,

$e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(d_{x,M}\cos\theta + d_{y,M}\sin\theta)} \Big]^T$  为导向矢量,  $\lambda$  为波长,  $(d_{x,i}, d_{y,i})$  为

阵元  $i$  的坐标(假设阵元 1 为参考阵元, 位于原点, 即  $d_{x,1} = 0, d_{y,1} = 0$ )。假设信号为不相关的平稳的零均值随机过程且为非高斯的, 噪声为复圆高斯白噪声, 信号与噪声不相关。

本文对非圆信号采用二阶定义。对于信号  $s$ , 如果  $E\{s\} = 0, E\{ss^*\} \neq 0$  且  $E\{ss} = 0$ , 则称  $s$  为圆信号, 如果  $E\{ss} \neq 0$  则称  $s$  为非圆信号。经典测向算法都是针对圆信号设计的, 用于非圆信号测向时, 就没有利用到  $E\{ss}$  中的信息。为便于后面的分析, 将非圆信号  $\mathbf{s}(t)$  写成如下形式<sup>[7]</sup>

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{\Phi}\mathbf{s}_0(t) \quad (2)$$

式中  $\mathbf{s}_0(t) = [s_{0,1}(t), s_{0,2}(t), \dots, s_{0,D}(t)]^T \in \mathbb{R}$ ,  $s_{0,i}(t)$  为信号  $s_i(t)$  对应的零初相信号, 对角矩阵  $\mathbf{\Phi} = \text{diag}\{e^{j\phi_i}\}_{i=1}^D$ ,  $\phi_i$  为信号  $s_i(t)$  的初相。易得,  $s_{0,i}(t)$  亦与噪声不相关。

## 2.2 四阶累积量

以下分析中, 为书写方便, 在不至于混淆的地方都将时间  $t$  省略。

对于零均值复随机变量  $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4}$  ( $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, \dots, M\}$ ), 其四阶累积量定义如下<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned} \text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4}) &= E\{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4}\} \\ &\quad - E\{x_{k_1}, x_{k_2}\}E\{x_{k_3}, x_{k_4}\} - E\{x_{k_1}, x_{k_3}\} \\ &\quad \cdot E\{x_{k_2}, x_{k_4}\} - E\{x_{k_1}, x_{k_4}\}E\{x_{k_2}, x_{k_3}\} \end{aligned} \quad (3)$$

并将导向矩阵写成如下形式:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_D)] = \begin{bmatrix} a_1(\theta_1) & a_1(\theta_2) & \cdots & a_1(\theta_D) \\ a_2(\theta_1) & a_2(\theta_2) & \cdots & a_2(\theta_D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_M(\theta_1) & a_M(\theta_2) & \cdots & a_M(\theta_D) \end{bmatrix} \quad (4)$$

由文献[4]中四阶累积量的性质 CP4, CP3 和 CP1 可得

$$\begin{aligned} &\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4}) \\ &= \text{cum}\{[a_{k_1}(\theta_1)s_1 + a_{k_1}(\theta_2)s_2 + \cdots + a_{k_1}(\theta_D)s_D], \\ &\quad [a_{k_2}(\theta_1)s_1 + a_{k_2}(\theta_2)s_2 + \cdots + a_{k_2}(\theta_D)s_D], \\ &\quad [a_{k_3}(\theta_1)s_1 + a_{k_3}(\theta_2)s_2 + \cdots + a_{k_3}(\theta_D)s_D], \\ &\quad [a_{k_4}(\theta_1)s_1 + a_{k_4}(\theta_2)s_2 + \cdots + a_{k_4}(\theta_D)s_D]\} \\ &= a_{k_1}(\theta_1)a_{k_2}(\theta_1)a_{k_3}(\theta_1)a_{k_4}(\theta_1)\text{cum}(s_1, s_1, s_1, s_1) + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ a_{k_1}(\theta_D)a_{k_2}(\theta_D)a_{k_3}(\theta_D)a_{k_4}(\theta_D)\text{cum}(s_D, s_D, s_D, s_D) \\ &= \sum_{i=1}^D a_{k_1}(\theta_i)a_{k_2}(\theta_i)a_{k_3}(\theta_i)a_{k_4}(\theta_i)\text{cum}(s_i, s_i, s_i, s_i) \end{aligned} \quad (5)$$

记  $\gamma_i = \text{cum}(s_{0,i}, s_{0,i}, s_{0,i}, s_{0,i})$ ,  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_D\}$ , 令  $\mathbf{Q}_x$  为  $M^2 \times M^2$  矩阵, 其第  $(k_1 - 1)M + k_2$  行第  $(k_3 - 1)M + k_4$  列的元素为  $\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4})$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_x &= \sum_{i=1}^D [\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}(\theta_i)] [\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}(\theta_i)]^T \cdot \gamma_i e^{j4\phi_i} \\ &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Phi}^4 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^T \end{aligned} \quad (6)$$

式中符号 “ $\otimes$ ” 表示 Kronecker 积。

## 2.3 MUSIC-like 算法<sup>[3]</sup>

令  $\mathbf{Q}_{x1}$  为  $M^2 \times M^2$  矩阵, 其第  $(k_1 - 1)M + k_2$  行第  $(k_3 - 1)M + k_4$  列的元素为  $\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}^*, x_{k_3}^*, x_{k_4})$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{x1} &= \sum_{i=1}^D [\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_i)] [\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_i)]^H \gamma_i \\ &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^*) \mathbf{\Gamma} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^*)^H \end{aligned} \quad (7)$$

对  $\mathbf{Q}_{x1}$  进行奇异值分解(SVD)

$$\mathbf{Q}_{x1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^H \\ \mathbf{V}_2^H \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中  $\mathbf{\Sigma}$  为对角矩阵,  $\mathbf{U}_1$  的列向量张成信号子空间,  $\mathbf{U}_2$  的列向量张成噪声子空间, 导向矢量变为  $\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_i)$ 。在噪声子空间上投影为  $\mathbf{0}$  的导向矢量所对应的方向就是信号的入射方向(DOA)。MUSIC-like 算法通过寻找式(9)的极大值获得信号 DOA

$$f_{\text{MUSIC-like}}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}^*(\theta)]^H \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H [\mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}^*(\theta)] \quad (9)$$

## 3 四阶扩展 MUSIC 算法(FO-EMUSIC)

### 3.1 四阶扩展 MUSIC 算法

为书写方便, 记  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}_1(\theta) = \mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}^*(\theta)$ ,  $\mathbf{b}_2(\theta) = \mathbf{a}(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)$ , 则式(7)重写为

$$\mathbf{Q}_{x1} = \sum_{i=1}^D \mathbf{b}_1(\theta_i) \mathbf{b}_1^H(\theta_i) \cdot \gamma_i = \mathbf{B}_1 \mathbf{\Gamma} \mathbf{B}_1^H \quad (10)$$

同理, 第  $(k_1 - 1)M + k_2$  行第  $(k_3 - 1)M + k_4$  列的元素为  $\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}^*, x_{k_3}, x_{k_4})$  的  $M^2 \times M^2$  矩阵  $\mathbf{Q}_{x2}$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{x2} &= \sum_{i=1}^D [\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}^*(\theta_i)] [\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}(\theta_i)]^T \cdot \gamma_i e^{j2\phi_i} \\ &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^*) \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Phi}^2 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^T \\ &= \sum_{i=1}^D \mathbf{b}_1(\theta_i) \mathbf{b}_2^T(\theta_i) \cdot \gamma_i \cdot e^{j2\phi_i} = \mathbf{B}_1 \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Phi}^2 \mathbf{B}_2^T \end{aligned} \quad (11)$$

第  $(k_1 - 1)M + k_2$  行第  $(k_3 - 1)M + k_4$  列的元素为  $\text{cum}(x_{k_1}^*, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4})$  的  $M^2 \times M^2$  矩阵  $\mathbf{Q}_{x3}$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{x3} &= \sum_{i=1}^D [\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}(\theta_i)]^* [\mathbf{a}(\theta_i) \otimes \mathbf{a}(\theta_i)]^T \cdot \gamma_i \\ &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^* \mathbf{\Gamma} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^T \\ &= \sum_{i=1}^D \mathbf{b}_2^*(\theta_i) \mathbf{b}_2^T(\theta_i) \cdot \gamma_i = \mathbf{B}_2^* \mathbf{\Gamma} \mathbf{B}_2^T \end{aligned} \quad (12)$$

显然,  $\mathbf{Q}_{x_2}$  中包含有非圆信息  $\Phi$ , 而  $\mathbf{Q}_{x_1}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_3}$  中没有非圆信息。MUSIC-like 算法只利用了  $\mathbf{Q}_{x_1}$ , 用于非圆信号测向时由于没有利用含有非圆信息的四阶累积量, 所以并未因为非圆信号的更多信息而使算法性能提高。本文提出的 FO-EMUSIC 算法将  $\mathbf{Q}_{x_1}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_2}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_3}$  同时使用, 充分利用了信号的非圆信息, 获得了较 MUSIC-like 更优的测向性能。由式(10), 式(11), 式(12)这 3 个四阶累积量矩阵构造一个新的四阶累积量矩阵  $\mathbf{Q}_E$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_E &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{x_1} & \mathbf{Q}_{x_2} \\ \mathbf{Q}_{x_2}^H & \mathbf{Q}_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \Gamma \mathbf{B}_1^H & \mathbf{B}_1 \Gamma \Phi^2 \mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_2^* \Phi^{-2} \Gamma \mathbf{B}_1^H & \mathbf{B}_2^* \Gamma \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2^* \Phi^{-2} \end{bmatrix} \Gamma \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2^* \Phi^{-2} \end{bmatrix}^H \end{aligned} \quad (13)$$

对  $\mathbf{Q}_E$  进行奇异值分解

$$\mathbf{Q}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s^H \\ \mathbf{V}_n^H \end{bmatrix} \quad (14)$$

显然,  $\mathbf{U}_n$  的列张成噪声子空间, 下式极小值点对应的角度即为信号 DOA

$$f(\theta, \phi) = \mathbf{b}^H(\theta, \phi) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{b}(\theta, \phi) \quad (15)$$

式中  $\mathbf{b}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(\theta) \\ \mathbf{b}_2^*(\theta) e^{-j2\phi} \end{bmatrix}$ 。显然, 求式(15)的极小值点需要对  $\theta$  和  $\phi$  做二维搜索, 为降低计算复杂度, 将二维搜索化为一维搜索, 对  $\mathbf{U}_n$  分块<sup>[5,6]</sup>, 令  $\mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n1} \\ \mathbf{U}_{n2} \end{bmatrix}$ , 且  $\mathbf{U}_{n1}$ ,  $\mathbf{U}_{n2}$  具有相同的行数, 代入式(15)得

$$\begin{aligned} f(\theta, \phi) &= \mathbf{b}^H(\theta, \phi) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H & \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \\ \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n1}^H & \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n2}^H \end{bmatrix} \mathbf{b}(\theta, \phi) \\ &= \mathbf{q}^H \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{b}_1(\theta) & \mathbf{b}_1^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{b}_2^*(\theta) \\ \left( \mathbf{b}_1^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{b}_2^*(\theta) \right)^H & \mathbf{b}_2^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{b}_2^*(\theta) \end{bmatrix} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (16)$$

式中  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\phi} \end{bmatrix}$ 。令  $\frac{\partial f(\theta, \phi)}{\partial \phi} = 0$  得

$$e^{j2\phi} = \pm \frac{\mathbf{b}_1^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{b}_2^*(\theta)}{\|\mathbf{b}_1^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{b}_2^*(\theta)\|} \quad (17)$$

式(17)右侧取负号时式(16)对  $\phi$  取得最小值, 得到 FO-EMUSIC 算法的空间谱函数

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \mathbf{b}_1^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{b}_1(\theta) + \mathbf{b}_2^T(\theta) \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{b}_2^*(\theta) \\ &\quad - 2 \|\mathbf{b}_1^H(\theta) \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{b}_2^*(\theta)\| \end{aligned} \quad (18)$$

FO-EMUSIC 算法的实现步骤总结如下:

步骤 1 利用阵列输出求得 3 个四阶累积量矩阵

$\mathbf{Q}_{x_1}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_2}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_3}$ ;

步骤 2 利用式(13)得到扩展四阶累积量矩阵  $\mathbf{Q}_E$ ;

步骤 3 对  $\mathbf{Q}_E$  进行奇异值分解;

步骤 4 搜索式(18)的空间谱函数, 其  $D$  个负峰对应的角度就是信号的波达方向。

### 3.2 FO-EMUSIC 算法的计算复杂度

实际应用中, 四阶累积量不可能精确得到, 必须通过数据估计得到, 对应于式(3), 四阶累积量  $\text{cum}(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, x_{k_4})$  的估计值为<sup>[8]</sup>

$$\begin{aligned} \hat{c}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{1}{\alpha} \sum_{t=1}^L x_{k_1}(t) x_{k_2}(t) x_{k_3}(t) x_{k_4}(t) \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^L x_{k_1}(t) x_{k_2}(t) \sum_{t=1}^L x_{k_3}(t) x_{k_4}(t) \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^L x_{k_1}(t) x_{k_3}(t) \sum_{t=1}^L x_{k_2}(t) x_{k_4}(t) \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_{t=1}^L x_{k_1}(t) x_{k_4}(t) \sum_{t=1}^L x_{k_2}(t) x_{k_3}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

式中  $L$  为快拍数,  $\alpha$  和  $\beta$  是  $L$  的函数, 当  $L > 1$ ,  $\alpha = \frac{L^2 - L}{L + 2}$ ,  $\beta = L^2 - L$  时, 式(19)为无偏估计, 当  $L > 0$ ,  $\alpha = L$ ,  $\beta = L^2$  时, 式(19)为有偏估计。四阶累积量矩阵  $\mathbf{Q}_{x_1}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_2}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_3}$  的每一个元素的估计值均可类似得到。

由式(19)不难得知, 如果阵列输出为零均值随机变量, 则每一个累积量的计算量约为  $9L$  次复数乘法,  $\mathbf{Q}_{x_1}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_2}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_3}$  均为  $M^2 \times M^2$  矩阵, 所以估计  $\mathbf{Q}_E$  所需的计算量约为  $27M^4L$ , 对  $\mathbf{Q}_E$  进行奇异值分解所需的计算量约为  $O(8M^6)$ 。因此, FO-EMUSIC 算法总的计算量约为  $27M^4L + O(8M^6)$ 。

可见, 随阵元数的增加。FO-EMUSIC 算法的计算量急剧增长。但我们注意到, 对于均布线阵,  $\mathbf{Q}_E$  中有很多重复元素, 去掉这些元素则可以使算法复杂度降低。下一小节给出了均布线阵条件下降低计算量的一种方法。

### 3.3 FO-EMUSIC/ULA 算法

对于均布线阵, 假设参考阵元位于原点, 则导向矢量

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} 1, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} d_x \cos \theta}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} (M-1) d_x \cos \theta} \end{bmatrix}^T, \quad d_x \text{ 为阵元间距,}$$

$\mathbf{b}_1(\theta)$  与  $\mathbf{b}_2(\theta)$  中大量元素是相同的, 从而矩阵  $\mathbf{Q}_{x_1}$ ,  $\mathbf{Q}_{x_2}$  和  $\mathbf{Q}_{x_3}$  中均有大量重复元素, 所以  $\mathbf{Q}_E$  中有很多重复元素, 这些重复元素不携带信息, 但却增加了计算量。本文提出了一种剔除大多数重复元素的方法, 并将利用这种方法的 FO-EMUSIC 算法称之为 FO-EMUSIC/ULA 算法。为书写方便、

简洁, 记  $\mathbf{a}'(\theta) = \begin{bmatrix} a_1(\theta) \\ a_M(\theta) \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A}' = [\mathbf{a}'(\theta_1), \mathbf{a}'(\theta_2), \dots, \mathbf{a}'(\theta_D)] =$

$$\begin{bmatrix} a_1(\theta_1) & a_1(\theta_2) & \dots & a_1(\theta_D) \\ a_M(\theta_1) & a_M(\theta_2) & \dots & a_M(\theta_D) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}'_1 = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{A}^*, \quad \mathbf{B}'_2 = \mathbf{A}'$$

$\otimes \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}'_1(\theta) = \mathbf{a}'(\theta) \otimes \mathbf{a}^*(\theta)$ ,  $\mathbf{b}'_2(\theta) = \mathbf{a}'(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)$ 。于是, 用  $\mathbf{b}'_1(\theta)$  和  $\mathbf{b}'_2(\theta)$  替代  $\mathbf{b}_1(\theta)$  与  $\mathbf{b}_2(\theta)$  就剔除了其中的大部分相同元素, 进一步, 类似于式(6), 式(11), 式(12)可得

$$\mathbf{Q}'_{x_1} = \mathbf{B}'_1 \Gamma \mathbf{B}'_1^H \quad (20)$$

$$\mathbf{Q}'_{x_2} = \mathbf{B}'_1 \Gamma \Phi^2 \mathbf{B}'_2^T \quad (21)$$

$$\mathbf{Q}'_{x3} = \mathbf{B}'_2{}^* \Gamma \mathbf{B}'_2{}^T \quad (22)$$

式中  $\mathbf{Q}'_{x1}$ ,  $\mathbf{Q}'_{x2}$ ,  $\mathbf{Q}'_{x3}$  第  $k_2$  行第  $k_4$  列的元素分别为  $\text{cum}(x_1, x_{k_2}^*, x_1, x_{k_4})$ ,  $\text{cum}(x_1, x_{k_2}^*, x_1, x_{k_4})$ ,  $\text{cum}(x_1, x_{k_2}^*, x_1, x_{k_4})$ ; 第  $k_2$  行第  $M+k_4$  列的元素分别为  $\text{cum}(x_1, x_{k_2}^*, x_M, x_{k_4})$ ,  $\text{cum}(x_1, x_{k_2}^*, x_M, x_{k_4})$ ,  $\text{cum}(x_1, x_{k_2}^*, x_M, x_{k_4})$ ; 第  $M+k_2$  行第  $k_4$  列的元素分别为  $\text{cum}(x_M, x_{k_2}^*, x_1, x_{k_4})$ ,  $\text{cum}(x_M, x_{k_2}^*, x_1, x_{k_4})$ ,  $\text{cum}(x_M, x_{k_2}^*, x_1, x_{k_4})$ ; 第  $M+k_2$  行第  $M+k_4$  列的元素分别为  $\text{cum}(x_M, x_{k_2}^*, x_M, x_{k_4})$ ,  $\text{cum}(x_M, x_{k_2}^*, x_M, x_{k_4})$ ,  $\text{cum}(x_M, x_{k_2}^*, x_M, x_{k_4})$ , 其中  $k_2, k_4 \in \{1, 2, \dots, M\}$ 。构造扩展四阶累积量矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'_E &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_{x1} & \mathbf{Q}'_{x2} \\ \mathbf{Q}'_{x2}{}^H & \mathbf{Q}'_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_1 \Gamma \mathbf{B}'_1{}^H & \mathbf{B}'_1 \Gamma \Phi^2 \mathbf{B}'_2{}^T \\ \mathbf{B}'_2{}^* \Phi^{-2} \Gamma \mathbf{B}'_1{}^H & \mathbf{B}'_2{}^* \Gamma \mathbf{B}'_2{}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{B}'_2{}^* \Phi^{-2} \end{bmatrix} \Gamma \begin{bmatrix} \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{B}'_2{}^* \Phi^{-2} \end{bmatrix}{}^H \end{aligned} \quad (23)$$

对包含信号非圆信息的  $\mathbf{Q}'_E$  进行奇异值分解

$$\mathbf{Q}'_E = \begin{bmatrix} \mathbf{U}'_s & \mathbf{U}'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_s{}^H \\ \mathbf{V}'_n{}^H \end{bmatrix} \quad (24)$$

对  $\mathbf{U}'_n$  分块, 令  $\mathbf{U}'_n = \begin{bmatrix} \mathbf{U}'_{n1} \\ \mathbf{U}'_{n2} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{U}'_{n1}$ ,  $\mathbf{U}'_{n2}$  具有相同的行数, 则 FO-EMUSIC/ULA 算法的空间谱函数为

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \mathbf{b}'_1{}^H(\theta) \mathbf{U}'_{n1} \mathbf{U}'_{n1}{}^H \mathbf{b}'_1(\theta) + \mathbf{b}'_2{}^T(\theta) \mathbf{U}'_{n2} \mathbf{U}'_{n2}{}^H \mathbf{b}'_2^*(\theta) \\ &\quad - 2 \left\| \mathbf{b}'_1{}^H(\theta) \mathbf{U}'_{n1} \mathbf{U}'_{n2}{}^H \mathbf{b}'_2^*(\theta) \right\| \end{aligned} \quad (25)$$

每一个累积量的计算量约为  $9L$  次复数乘法,  $\mathbf{Q}'_{x1}$ ,  $\mathbf{Q}'_{x2}$ ,  $\mathbf{Q}'_{x3}$  均为  $2M \times 2M$  矩阵, 所以估计  $\mathbf{Q}'_E$  所需的计算量约为  $108M^2L$ , 对  $\mathbf{Q}'_E$  进行奇异值分解所需的计算量约为  $O(64M^3)$ , FO-EMUSIC/ULA 算法总的计算量为  $108M^2L + O(64M^3)$ 。当  $L \gg M^2$  时(准确估计四阶累积量需要的快拍数比较大, 而在通信系统中这一点很容易满足), FO-EMUSIC 算法与 FO-EMUSIC/ULA 算法的计算量之比约为  $M^2/4$ 。相比 FO-EMUSIC 算法, FO-EMUSIC/ULA 算法大大降低了计算量。

#### 4 仿真结果

仿真中采用均布 3 元线阵, 阵元间距半波长, 信号形式 BPSK, 复圆高斯白噪声, 主要验证 FO-EMUSIC 算法的阵列扩展能力、分辨力与测角精度。

**实验 1** 阵列扩展。假设 6 个不相关 BPSK 信号入射到阵列, 初相均为 0, 快拍数 2000, 信噪比均为 20dB, 波达方向分别为  $[40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 140^\circ]$ 。图 1 为 FO-EMUSIC 算法空间谱 10 次结果的叠加。FO-EMUSIC 算法在 MUSIC-like 算法基础上进一步扩展了阵列孔径, 可测向信号数大于 MUSIC-like 和 CE-MUSIC 算法。在均布线阵条件下, FO-

EMUSIC 算法的可测向信号数为  $3(M-1)$ , 而同样基于四阶累积量的 MUSIC-like 算法只能分辨  $2(M-1)$  个信号, CE-MUSIC 算法最多也只能分辨  $2(M-1)$  个信号。

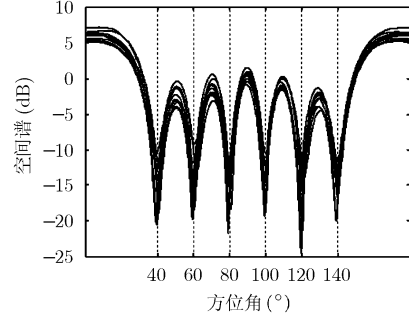


图 1 FO-EMUSIC 算法的阵列扩展能力

**实验 2** 分辨力与测角精度。两个不相关 BPSK 信号从  $[86^\circ, 94^\circ]$  入射到阵列, 初相取值在  $[0, 2\pi]$  内均匀分布, 信噪比  $[0, 15]$  dB, 数据由 300 次测向结果统计得到。仿真中, 空间谱只有一个负峰时认为分辨不成功, 并令两个角的估计值都等于这个负峰对应的角度, 第  $i$  ( $i=1, 2$ ) 个入射角的均方根误差定义为  $\sqrt{\sum_{j=1}^{300} [\hat{\theta}_i(j) - \theta_i(j)]^2 / 300}$ , 总的测角均方根误差为两个信号均方根误差的平均, 分辨概率定义为成功分辨两个源的次数与总实验次数的比值。由图 2 可以看出 FO-EMUSIC 算法的均方根误差明显小于 MUSIC 和 MUSIC-like 算法, 略小于 CE-MUSIC 算法; 低信噪比下分辨概率明显高于 MUSIC 和 MUSIC-like 算法, 略高于 CE-MUSIC 算法。

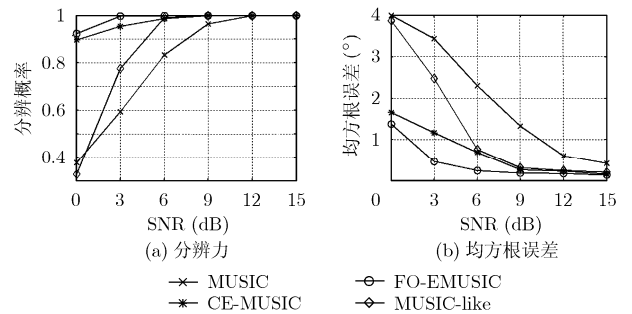


图 2 分辨力与测角均方根误差

#### 5 结束语

本文提出了适用于非圆信号测向的四阶扩展 MUSIC (FO-EMUSIC) 算法, 新算法是对以 MUSIC-like 算法为代表的四阶累积量测向算法的扩展, 进一步扩展了阵列孔径, 可测向信号数多于 MUSIC-like 算法, 其分辨力和测角精度优于 MUSIC 和 MUSIC-like 算法, 略优于 CE-MUSIC 算法。文章分析了 FO-EMUSIC 算法的计算量, 针对均布线阵提出了 FO-EMUSIC/ULA 算法, 计算量显著减小。仿真实验验证了 FO-EMUSIC 算法的优良性能。

## 参考文献

- [1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. *IEEE Trans. on Antennas Propagation*, 1986, 34(3): 276-280.
- [2] Chevalier P, Ferreol A, and Albera L. High resolution direction finding from higher order statistics: the 2q-MUSIC algorithm [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(8): 2986-2997.
- [3] Porat B and Friedlander B. Direction finding algorithms based on high-order statistics [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1991, 39(9): 2016-2023.
- [4] Dogan M C and Mendel J M. Application of cumulants to array processing-part I: aperture extension and array calibration [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(5): 1200-1216.
- [5] Charge P, Wang Y, and Saillard J. A noncircular sources direction finding method using polynomial rooting [J]. *Signal Processing*, 2001, 81(6): 1765-1770.
- [6] Abeida H and Delmas J P. MUSIC-like estimation of direction of arrival for noncircular sources [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(7): 2678-2690.
- [7] Haardt M and Romer F. Enhancements of unitary ESPRIT for non-circular sources [C]. *IEEE Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP)*, Montreal, QC, Canada, May 17-21, 2004, Vol. II: 101-104.
- [8] Kaiser T and Mendel J M. Covariance of finite-sample cumulants in array-processing [C]. *1997 proceeding of the IEEE signal processing workshop on high-order statistics*, Banff, Alberta, Canada, July 21-23, 1997: 306-310.
- 刘 剑: 男, 1978年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理, 综合电子战.
- 黄知涛: 男, 1976年生, 副教授, 主要研究方向为循环平稳信号处理、综合电子战.
- 周一宇: 男, 1948年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为综合电子战.