

空间相关信道下酉空时码误码性能的数值计算

郭永亮 朱世华 李锋

(西安交通大学信息与通信工程系 西安 710049)

摘要: 该文旨在通过数值计算技术来分析信道空间相关对酉空时码的性能影响。基于成对错误概率给出了平均误比特率和误码字率的上界。同时给出了当 MIMO 信道独立时, 该文结果与现有结果的等价性证明。Mento-Carlo 仿真表明, 酉空时码的误码性能随着信道空间相关的增加而恶化, 并且恶化的程度直接决定于信道相关的强弱。

关键词: 无线通信; 空间相关; 数值计算; 成对错误概率; 酉空时码

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)02-0397-04

The Numerical Computation of Error Performance for Unitary Space-Time Codes under Spatial Correlation

Guo Yong-liang Zhu Shi-hua Li Feng

(Dept of Information and Communications Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The impact of spatial correlation on performance of unitary space-time codes is focused on in this paper. Based on pair-wise error probability the upper bound of bit and codeword error ratio are given in this paper. The proof of equivalence between the derived result and existed result is presented when the channels are independent. Mento-Carlo simulation results show that the spatial correlation results in performance loss and the amount of this loss depends on the extent of spatial correlation.

Key words: Wireless communication; Spatial correlation; Numerical computation; Pair-wise error probability; Unitary space-time codes

1 引言

高效而可靠地传输信息一直是无线通信的发展方向, 但无线移动信道所固有的衰落和时变特性始终是系统设计者面临的挑战。信息论已证明, 多输入多输出(MIMO)系统能够提高系统的抗衰落和抗噪声性能, 从而获得更大的容量。MIMO 技术中的空时编码技术通过将时间分集与空间分集结合起来, 分别在时域和空域引入冗余, 提高了系统的传输性能。空时编码技术分为分组码和网格码两类。网格码的特点是性能较好, 但解码复杂度很高; 分组码由于引入了正交设计, 具有编解码简单的优点, 因而被 3GPP 的 WCDMA 协议采纳。

然而, 无论是网格码还是分组码, 在接收端进行解码时都需要通过信道估计来获得信道状态信息(CSI), 这需要发射端发射已知的训练序列来进行信道估计, 在天线数目较多或信道衰落较快时这一点很难满足^[1,2], 因此研究接收端无需信道估计的非相干空时编码具有很大的实用价值。酉空时码^[2]码字满足正交性, 是非相干空时码的一种, 这类非相干空时码能够达到非相干 MIMO 系统的信道容量^[1]。现有酉空时码的文献基本上都有一个重要的假设: 各发射天线到各接收天线的信号所经历的衰落是互相独立的, 但在实际的传播环境

中, 由于本地散射体的分布特性或天线阵元间的有限距离会导致各个子信道对信号的衰落在空间上可能并不独立, 故有必要研究信道空间相关对酉空时码的性能影响, 进而能更加有效地指导编码设计。文献[3]虽然分析了空间相关对酉空时码的性能影响, 但其所有结果均是针对两个特定的码字对而言的, 对于实际系统的设计, 平均误码性能将更有意义。基于此, 本文考虑了误比特率和误码字率上界的数值计算, 相对于成对错误概率, 其能够更有效地指导系统设计。

2 MIMO 系统模型

考虑一个多天线无线通信系统, 其发射与接收天线数分别为 M 和 N , 一帧内的时隙数为 T 。在时隙 t , 从发射天线 i 发送信号 s_{ti} , $1 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq M$ 。 h_{ij} 为发射天线 i 到接收天线 j 的信道增益, $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$ 。假设 MN 个信道增益均服从均值为 0, 每维方差为 $1/2$ 的复高斯分布, 设信道在一帧内保持不变, 在帧间是独立变化的。令 $T \times M$ 矩阵 $\mathbf{S} = (s_{ti})_{T \times M}$, 酉空时码的设计准则要求 \mathbf{S} 满足 $\mathbf{S}^H \mathbf{S} = \mathbf{I}_M$ ^[2], 其中 $(\cdot)^H$ 表示矩阵的共轭转置。假设 TN 个噪声 η_{tj} , $1 \leq t \leq T, 1 \leq j \leq N$, 统计独立且均服从均值为 0, 每维方差为 $1/2$ 的复高斯分布。令 $M \times N$ 矩阵 $\mathbf{H} = (h_{ij})_{M \times N}$, $T \times N$ 矩阵 $\mathbf{Y} = (y_{tj})_{T \times N}$, $T \times N$ 矩阵 $\mathbf{W} = (\eta_{tj})_{T \times N}$, 则 MIMO 系统输入输出关系的矩阵形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \sqrt{\rho T/M} \mathbf{S} \mathbf{H} + \mathbf{W} \\ &= \sqrt{\rho T/M} \mathbf{S} (\mathbf{R}^t)^{1/2} \mathbf{H}_w (\mathbf{R}^r)^{1/2} + \mathbf{W} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ρ 表示信噪比, $M \times N$ 矩阵 \mathbf{H}_w 的每个元素统计独立且均服从均值为 0, 每维方差为 1/2 的复高斯分布, \mathbf{R}^t 和 \mathbf{R}^r 分别为发射和接收相关矩阵。

3 酉空时码的成对错误概率

基于式(1)文献[3]给出了酉空时码的最大似然解码准则为

$$\hat{\mathbf{S}} = \arg \min_{\mathbf{S} \in A} \text{vec}(\mathbf{Y})^H [\mathbf{C}(\mathbf{S})]^{-1} \text{vec}(\mathbf{Y}) \quad (2)$$

其中 $\hat{\mathbf{S}}$ 为估值符号, A 为全体发射矩阵所组成的集合, $\mathbf{C}(\mathbf{S}) \triangleq \frac{\rho T}{M} (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{S}) (\mathbf{R}^r \otimes \mathbf{R}^t) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{S})^H + \mathbf{I}_{TN}$ 。令 $|A|$ 为集合 A 的基数, 设 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in A$, 由式(2)知发射 \mathbf{S}_1 而在接收端误判为 \mathbf{S}_2 的概率为

$$P \left\{ \bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{|A|} \left[\text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{C}(\mathbf{S}_2)^{-1} \text{vec}(\mathbf{Y}) < \text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{C}(\mathbf{S}_k)^{-1} \text{vec}(\mathbf{Y}) \right] \right\} \quad (3)$$

由于发射码字为 \mathbf{S}_1 , 故依据式(1), 式(3)中的 \mathbf{Y} 为 $\sqrt{\rho T/M} \mathbf{S}_1 \mathbf{H} + \mathbf{W}$ 。

显然, 式(3)所示的事件为 $|A|-1$ 个事件的交, 若直接计算式(3)会使得问题变得过分复杂, 借鉴文献[2]中的做法, 姑且假设集合 A 中只有两个发射矩阵 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 , 此时成对错误概率简化为

$$\begin{aligned} P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2 | \mathbf{S}_1) \\ = \left(\text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{C}(\mathbf{S}_2) \text{vec}(\mathbf{Y}) < \text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{C}(\mathbf{S}_1) \text{vec}(\mathbf{Y}) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2 | \mathbf{S}_1)$ 表示将 \mathbf{S}_1 误判为 \mathbf{S}_2 的概率。令 $\mathbf{D} = \mathbf{C}(\mathbf{S}_2)^{-1} - \mathbf{C}(\mathbf{S}_1)^{-1}$, 则

$$P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2 | \mathbf{S}_1) = P \left\{ \text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{D} \text{vec}(\mathbf{Y}) < 0 \right\} \quad (5)$$

统计量 $\text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{D} \text{vec}(\mathbf{Y})$ 的矩生成函数 $G(t)$ 为^[4]

$$G(t) = \prod_{k=1}^{TN} \frac{1}{\lambda_k t + 1} \quad (6)$$

其中 λ_k , $1 \leq k \leq TN$, 为矩阵 $\left[\mathbf{I}_{TN} + \frac{\rho T}{M} (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{S}_1) \cdot (\mathbf{R}^r \otimes \mathbf{R}^t) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{S}_1)^H \right] \mathbf{D}$ 的特征值。值得指出的是, 对于随机变量 ξ , 文献[3]中的矩生成函数(尽管文献[3]中将其称为特征函数(characteristic function), 实际上应称为矩生成函数(moment generation function))的定义为 $\phi_\xi(s) = E[\exp(s\xi)]$, 而本文的矩生成函数定义为 $G_\xi(t) = E[\exp(-t\xi)]$, 两个定义仅相差一个符号, 这纯粹是为了和后文将要引用的参考文献一致。为描述 $G(t)$ 的收敛域, 对每个非零特征值 λ_i 定义一

个与其相关的子集 $\text{ROC}(\lambda_i)$ 为

$$\text{ROC}(\lambda_i) = \begin{cases} \text{Re}(t) > -\lambda_i^{-1}, & \lambda_i > 0 \\ \text{Re}(t) < -\lambda_i^{-1}, & \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (7)$$

$G(t)$ 的收敛域为所有非零特征值所对应 $\text{ROC}(\lambda_i)$ 的交集, 显然其是包含虚轴的一个条形区域。

在文献[5]中给出了直接利用随机变量 X 的矩生成函数 $G_X(t)$ 来计算概率 $P(X < 0)$ 的方法, 由文献[5]知式(5)为

$$\begin{aligned} P(\text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{D} \text{vec}(\mathbf{Y}) < 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(t)/t dt \\ &= -\sum_{k=1}^K \text{Res}(G(t)/t, p_k) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 c 为 $G(t)$ 收敛域内实轴上的任一点, $\text{Res}(G(t)/t, p_k)$ 为函数 $G(t)/t$ 在其极点 p_k 处的留数, K 为值小于零的特征值的个数。

对于独立 MIMO 信道, 式(6)可化为

$$G(t) = \left(\prod_{p=1}^T \frac{1}{\mu_p t + 1} \right)^N \quad (9)$$

其中 $\mu_p (1 \leq p \leq T)$ 为矩阵 $\left(\frac{\rho T}{M} \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_1^H + \mathbf{I}_T \right) \left(\frac{\rho T}{M} \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_2^H + \mathbf{I}_T \right)^{-1} - \mathbf{I}_T$ 的特征值。值得注意的是, 对独立 MIMO 信道, 文献[2]附录 B 中的 B.6 和 B.7 式给出了 B.1 式的统计量

$\frac{\rho T/M}{1 + \rho T/M} \text{tr} \left\{ \mathbf{X}^+ (\Phi_2 \Phi_2^+ - \Phi_1 \Phi_1^+) \mathbf{X} \right\}$ 的特征函数为

$$F(\omega) = \prod_{m=1}^M \left[\frac{1 + \rho T/M}{(\rho T/M)^2 (1 - d_m^2) \left((\omega - i/2)^2 + \alpha_m^2 \right)} \right]^N \quad (10)$$

$$\alpha_m \triangleq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1 + \rho T/M}{(\rho T/M)^2 (1 - d_m^2)}}$$

其中 $d_m, 1 \leq m \leq M$, 为矩阵 $\mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_2$ 的第 m 个奇异值。通过简单的数学推导可知, 在独立 MIMO 信道下, 本文的统计量 $\text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{D} \text{vec}(\mathbf{Y})$ 就是文献[2]中的统计量 $\frac{\rho T/M}{1 + \rho T/M} \text{tr} \left\{ \mathbf{X}^+ (\Phi_2 \Phi_2^+ - \Phi_1 \Phi_1^+) \mathbf{X} \right\}$ 的相反数, 即两者只相差一个符号。实际上, 由式(5), 本文在计算 $P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2 | \mathbf{S}_1)$ 时是计算 $\text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{D} \text{vec}(\mathbf{Y}) < 0$ 的概率, 而文献[2]中计算 $P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2 | \mathbf{S}_1)$ 时是计算 $\frac{\rho T/M}{1 + \rho T/M} \text{tr} \left\{ \mathbf{X}^+ (\Phi_2 \Phi_2^+ - \Phi_1 \Phi_1^+) \cdot \mathbf{X} \right\} > 0$ 的概率。由于篇幅所限, 式(9)的 $G(t)$ 与式(10)中 $F(\omega)$ 的关系不在本文中讨论。

4 误码性能的数值计算

若直接利用式(8)计算成对错误概率, 则至少会存在以下两个难题: 一是必须计算矩生成函数 $G(t)$ 的极点; 二是当

$G(t)$ 存在多重极点或本性奇点时留数通常很难计算且其计算通常是病态问题。鉴于此, 本文采用文献[5]中的数值积分方法来计算成对错误概率, 利用高斯-切比雪夫求积公式可得

$$P(\text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{D} \text{vec}(\mathbf{Y}) < 0) = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{v/2} \{ \text{Re}[G(c + ic\tau_k)] + \tau_k \text{Im}[G(c + ic\tau_k)] \} + E_v \quad (11)$$

式(11)中 v 为被积函数的取样点数, 此处限定 v 取偶数, $\tau_k = \tan[(2k-1)\pi/(2v)]$, E_v 为积分误差, 当 $v \rightarrow \infty$ 时, $E_v \rightarrow 0$, 因此可通过调整 v 值对误差进行控制。

上述的成对错误概率分析均是针对两个特定码字 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 而言的, 对于实际系统设计而言, 误码率和误码字率将更有意义。由文献[6]的式(6)可知误码字率 P_{fer} 的联合界(Union Bound, UB) P_{UB} 可表示为

$$P_{\text{fer}} \leq P_{\text{UB}} = \frac{1}{|A|} \sum_{\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j \in A, \mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_j} P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) \quad (12)$$

即使无法得到精确的 P_{fer} , 但其联合界 P_{UB} 可在统计意义上表征系统的平均误码性能, 对实际系统的设计具有相当的参考价值。基于式(11), 可用式(12)对误码字率的联合界进行数值计算。

设平均每个码字所载荷的比特数为 b , 以下考虑平均误比特率 P_{ber} 的计算。首先考虑误判一个码字所导致的错误比特数目, 设发射码字为 \mathbf{S}_1 , 则误判 \mathbf{S}_1 所导致的平均误比特数 e_1 为

$$e_1 = e_{12} \cdot P_T(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2) + e_{13} \cdot P_T(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_3) + \dots + e_{1|A|} \cdot P_T(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_{|A|}) \quad (13)$$

其中 $e_{1j} (2 \leq j \leq |A|)$ 表示将码字 \mathbf{S}_1 误判为 \mathbf{S}_j 时所导致的错误比特数, $P_T(\cdot)$ 表示以式(2)为准则的误码字率(即其所考虑的码字集合的基数为 $|A|$, 该错误概率如式(3)所示), 并不是如式(4)所示的成对错误概率(其约定码字集合中只有两个码字, 该错误概率如式(4)所示)。由于 $P_T(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2)$ 为 $|A| - 1$ 个事件 $\text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{C}(\mathbf{S}_2) \text{vec}(\mathbf{Y}) < \text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{C}(\mathbf{S}_k) \text{vec}(\mathbf{Y}), 1 \leq k \leq |A|, k \neq 2$ 之交的概率, 而成对错误概率 $P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2)$ 只是一个事件 $\text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{C}(\mathbf{S}_2) \text{vec}(\mathbf{Y}) < \text{vec}(\mathbf{Y})^H \mathbf{C}(\mathbf{S}_1) \text{vec}(\mathbf{Y})$ 的概率, 故有

$$P_T(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2) \leq P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2) \quad (14)$$

依据式(14)将式(13)右边放大可得

$$e_1 \leq e_{12} P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2) + e_{13} P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_3) + \dots + e_{1|A|} P(\mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_{|A|}) \quad (15)$$

每传输一个码字其平均误比特数 e 为

$$e = \sum_{i=1}^{|A|} p(\mathbf{S}_i) e_i = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^{|A|} e_i \quad (16)$$

式(16)中 $p(\mathbf{S}_i)$ 为发射码字 \mathbf{S}_i 的先验概率, 其中第2个等号考虑到了所有码字等概发射。将式(15)所示的 $e_i (1 \leq i \leq |A|)$ 代入式(16)右边可得

$$e \leq \frac{1}{|A|} \sum_{\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j \in A, \mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_j} P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) e_{ij} \quad (17)$$

平均误比特率 P_{ber} 为每个码字的平均误比特数 e 与每个码字所载荷的平均比特数 b 之比值, 由式(17)有

$$P_{\text{ber}} = \frac{e}{b} \leq \frac{1}{|A|b} e \leq \frac{1}{|A|b} \sum_{\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j \in A, \mathbf{S}_i \neq \mathbf{S}_j} P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j) e_{ij} \quad (18)$$

基于式(11)计算 $P(\mathbf{S}_i \rightarrow \mathbf{S}_j)$ 后, 由式(18)可算出 P_{ber} 的上界。

5 仿真结果及分析

本节将对以上的分析结果进行仿真, 所选取的酉空时码方案来自于文献[7], 其发射矩阵可描述为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \\ -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中 x_1 和 x_2 取自半径为1的MPSK星座, 为方便, 本节中固定接收天线数为2。设 $\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^r = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$, 为全面分析空

间相关对误码性能的影响, 分别对 $r = 0, 0.3, 0.8$ 进行数值仿真, 显然, 随着 r 值的增大, 空间相关越强。仿真时式(11)中 c 取值为矩生成函数收敛域内正半轴区间的中点, v 取为100, 这足以满足所需的精度。为了对第4节所述的误码率和误码字率上界进行仿真, 选取式(19)中 x_1 和 x_2 的调制方式为BPSK, 此时码字集合 A 中共有4个矩阵, 即 $|A| = 4$, 分别依据式(12)和式(18)对误码字率和误比特率上界进行数值计算可得图1和图2, 为便于比较, 图中同时给出了两个误码指标的仿真结果, 如图所示, 仿真结果与数值计算结果几乎能够重合, 这表明本文所给出的误码字率和误比特率上界是相当紧的。此外, 可以看出, 酉空时码的误码性能均随着信道空间相关的增加而恶化, 并且, 恶化的程度直接决定于空间相关的强弱, 并且, 当空间相关较弱时, 误码性能的恶化对空间相关并不敏感。

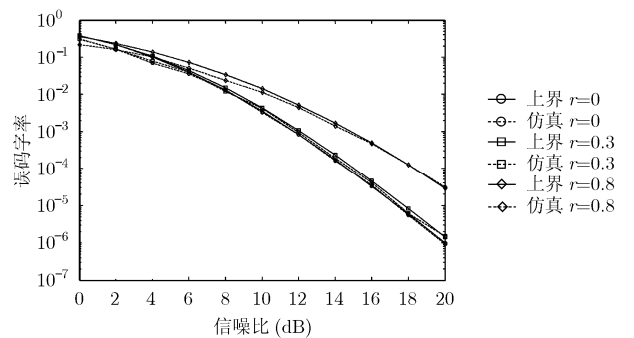


图1 空间相关信道下误码字率比较曲线

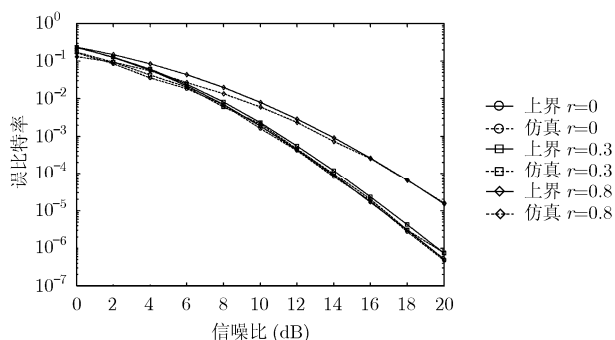


图2 空间相关信道下误比特率比较曲线

6 结束语

本文分析了信道相关对酉空时码的性能影响, 基于成对错误概率, 分别给出了编码的误码率和误码字率上界, 结果表明, 空间相关的存在会恶化误码性能, 并且, 恶化的程度直接决定于空间相关的强弱, 这为在存在空间相关时设计酉空时码提供了一定的参考价值。

参考文献

- [1] Marzetta T L and Hochwald B M. Capacity of a mobile multiple-antenna communication link in Rayleigh flat fading. *IEEE Trans. on IT*, 1999, 45(1): 139-157.
- [2] Marzetta T L and Hochwald B M. Unitary space-time modulation for multiple-antenna communications in Rayleigh flat fading. *IEEE Trans. on IT*, 2000, 46(2): 543-564.
- [3] Liu D P, Zhang Q T and Chen Qiming. Structures and performance of noncoherent receivers for unitary space-time modulation on correlated fast-fading channels. *IEEE Trans. on VT*, 2004, 53(7): 1116-1125.
- [4] Mathai A M and Provost S B. Quadratic Forms in Random Variables, Theory and Application. New York: Marcel Dekker, 1992: 38-39.
- [5] Taricco G and Biglieri E. Exact pairwise error probability of space-time codes. *IEEE Trans. on IT*, 2002, 48(2): 510-513.
- [6] Marzetta T L, et al. Systematic design of unitary space time constellations. *IEEE Trans. on IT*, 2000, 46(6): 1962-1973.
- [7] Tarokh V and Kim I M. Existence and construction of noncoherent unitary space-time codes. *IEEE Trans. on IT*, 2002, 48(12): 3112-3117.

郭永亮: 男, 1977年生, 博士生, 研究方向为时空编码和多入多出系统.

朱世华: 男, 1950年生, 教授, 主要研究方向为无线通信.

李 锋: 男, 1981年生, 博士生, 研究方向为 OFDM 和多入多出系统.