

方向扩散方程与小波变换的相关性研究

孙晓丽 冯象初 宋国乡
(西安电子科技大学理学院 西安 710071)

摘要: 方向扩散方程是一种有方向性的扩散, 本文基于这一特点, 对方向扩散方程与小波分解和重构的相关性作了研究。首先, 用小波分解后下层的低频图像作为对上层低频图像的一个初始近似, 验证了由上层低频图像经方向扩散方程可逐渐扩散收敛到下层的低频图像; 反过来, 由下层低频图像经方向扩散方程亦可逐渐扩散恢复到上层低频图像, 这正体现了小波分解与重构的渐变过程。因此, 由方向扩散方程的迭代扩散可以实现小波变换在相邻两层间的分解与重构, 且随着所选扩散时间间隔的减小, 可以在越来越细的尺度上观察相邻两层间小波分解与重构的渐变过程。

关键词: 方向扩散方程; 小波变换; 偏微分方程

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)03-0593-03

The Study of Correlation between Directed Diffusion Equation and Wavelet Transform

Sun Xiao-li Feng Xiang-chu Song Guo-xiang
(School of Science, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: Based on the point that directed diffusion equation is a diffusion process with direction, the correlation between directed diffusion and wavelet transform is studied in this paper. At first, the last low-frequency image after wavelet decomposition can be an initial approximation of the next low-frequency image. It is tested and verified that the last low-frequency image can diffuse and converge to the next low-frequency image. On the other hand, the next low-frequency image can also diffuse and converge to the last low-frequency image. Above process just presents the gradual variation of wavelet decomposition and reconstruction. So the interactive diffusion of directed diffusion equation can realize wavelet decomposition and reconstruction in two contiguous layers. With the reduction of time interval, the gradual variation of wavelet decomposition and reconstruction can be observed in more and more fine scales.

Key words: Directed diffusion equation, Wavelet transform, Partial differential equation

1 引言

方向扩散方程是由 Illner 等人模仿 Boltzmann 方程中的离散速率模型而提出的一类偏微分方程^[1,2]。就二维图像而言, 它是基于图像恢复问题而提出的^[3]。给定一幅受噪声污染的图像 I_0 , 希望由它恢复出干净的原始图像。一般地, 除了已给的噪声图像外, 还会知道一些原始图像的附加信息, 例如, 事先知道图像傅里叶变换后特定的频率范围、一些尖锐的边缘信息、亮区和暗区的一些对比信息等。综合所有这些已知信息, 就可以得到图像的一个初始近似 b , 除去噪声的过程也就是寻找 I_0 与 b 之间的一个中间状态, 使得最终去噪后的图像既保持了 b 中的大量已知信息, 又不会偏离原噪声图像 I_0 。正是基于这一目的, Illner 等人提出了方向扩散方程, 在文献[1]中, 作者证明了通过方向扩散方程可以由带噪图像 I_0 扩散收敛到由先验信息组成的初始近似图像 b 。

小波分解和重构正是在不同的尺度上来观察图像信息, 随着小波分解的进行, 分解后下一层低频图像中丢失了越来越多的高频信息, 因而它可作为上一层图像的一个初始逼近^[4]。本文选择上一层低频图像 f_0 为初始图像, 目标图像 b 为下一层的低频图像, 验证了由上一层低频图像经方向扩散方程可扩散收敛到下一层低频图像; 反过来, 选择 f_0 为下一层低频图像, b 为上一层低频图像, 同样验证了由下层低频图像经方向扩散方程可扩散重构回上层低频图像。从而, 本文借助方向扩散方程实现了小波分解与重构在相邻两层间的渐变过程, 若选择尽可能小的时间间隔, 就可以看到小波分解或重构两层间尽可能多的中间过程, 因而本文称其为一种高分辨率的多分辨分析过程。

2 方向扩散方程

设 f 为已知待处理的初始信号, b 为由已知关于原始信号的一些先验信息构成的对原始信号的一个初始逼近, 且二者满足规范化条件:

$$\sum_{i=1}^N f_i = \sum_{i=1}^N b_i = 1$$

则一维方向扩散方程定义为

$$\frac{\partial}{\partial t} f = bf'' - fb'' \quad (1)$$

将其扩展到二维图像域中, 则二维方向扩散方程定义为

$$\frac{\partial}{\partial t} f = b\Delta f - f\Delta b \quad (2)$$

这里 $\Delta f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2$ 。其中 $f = \{f_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,N}$ 为已知待处理的初始图像, $b = \{b_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,N}$ 为由已知关于原始图像的一些先验信息构成的对原始图像的一个初始逼近, 且二者亦满足规范化条件:

$$\sum_{i,j=1}^N f_{ij} = \sum_{i,j=1}^N b_{ij} = 1$$

在式(2)中若将 b 取为常数, 则方向扩散方程退化为

$$\partial f / \partial t = c\Delta f$$

这就是常见的最简单的热方程, 在扩散方程式(2)中, 当扩散时间 $t \rightarrow \infty$ 时, 方程的解 f 恒等于 b , 因而说扩散方程式(2)是有方向性地扩散到 b 的。正因为这样, Illner 等人将式(2)起名为方向扩散方程。

在文献[1]中作者证明了方向扩散方程在任意时刻的解 $f(t, \bullet)$, 都有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, \bullet) = b(\bullet) \quad (3)$$

且随着扩散的进行, 解函数 $f(t, \bullet)$ 与初始逼近函数 $b(\bullet)$ 之间的相关熵 $S_b(f)$ 不断增大, 当 $f = b$ 时, $S_b(f)$ 达到最大值为 0。这里相关熵定义为^[5]

$$S_b(f) = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} \ln \frac{f_{ij}}{b_{ij}}$$

3 用方向扩散方程实现小波分解与重构的离散格式

小波分解后下一层的低频图像正可以看作是上一层图像滤除高频信息后的一个初始逼近。因此选择上层低频图像为方向扩散方程中的初始图像 f , 选择下层低频图像为目标图像 b , 然后选择适当的扩散时间间隔, 就可以看到从上层低频图像分解到下层低频图像的中间变化过程。反过来, 选择下层低频图像作为初始图像 f , 上层低频图像为目标图像 b , 同样可以看到从下层低频图像重构回上层低频图像的中间变化过程。

在本文中, $I(i, j)_{i,j=1,\dots,N}$ 表示初始图像, $I_{i,j}$ 表示初始图像在位置 (i, j) 上的灰度值; $I(i, j, t_n)$ 表示经过扩散后在 t_n 时刻的图像, $I_{i,j}^n$ 表示 t_n 时刻图像在位置 (i, j) 上的灰度值, Δt 表示扩散的时间间隔; $B(i, j)_{i,j=1,\dots,N}$ 表示目标图像, $B_{i,j}$ 表示目标图像在位置 (i, j) 上的灰度值。图像的边界采用镜像对称方式进行延拓, 即

如果 $i < 1$, 则 $I_{i,j}^k = I_{-i+1,j}^k$; 如果 $i > N$, 则 $I_{i,j}^k = I_{2N-i,j}^k$;

如果 $j < 1$, 则 $I_{i,j}^k = I_{i,-j+1}^k$; 如果 $j > N$, 则 $I_{i,j}^k =$

$I_{i,2N-j}^k$;
如果 $i < 1$, 则 $B_{i,j}^k = B_{-i+1,j}^k$; 如果 $i > N$, 则 $B_{i,j}^k = B_{2N-i,j}^k$;

如果 $j < 1$, 则 $B_{i,j}^k = B_{i,-j+1}^k$; 如果 $j > N$, 则 $B_{i,j}^k = B_{i,2N-j}^k$;

散度项采用中心差分格式离散, 即

$$\begin{cases} (I_{xx})_{i,j}^n = I_{i+1,j}^n - 2I_{i,j}^n + I_{i-1,j}^n \\ (I_{yy})_{i,j}^n = I_{i,j+1}^n - 2I_{i,j}^n + I_{i,j-1}^n \end{cases} \quad (4)$$

因而

$$\begin{aligned} \Delta I_{i,j}^n &= (I_{xx})_{i,j}^n + (I_{yy})_{i,j}^n \\ &= I_{i+1,j}^n - 4I_{i,j}^n + I_{i-1,j}^n + I_{i,j+1}^n + I_{i,j-1}^n \end{aligned} \quad (5)$$

同理

$$\begin{aligned} \Delta B_{i,j} &= (B_{xx})_{i,j} + (B_{yy})_{i,j} \\ &= B_{i+1,j} - 4B_{i,j} + B_{i-1,j} + B_{i,j+1} + B_{i,j-1} \end{aligned} \quad (6)$$

从而二维方向扩散方程的离散形式为^[6,7]

$$\begin{aligned} \frac{I_{i,j}^{k+1} - I_{i,j}^k}{\Delta t} &= B_{i,j} \left[(I_{i-1,j}^k - 2I_{i,j}^k + I_{i+1,j}^k) \right. \\ &\quad \left. + (I_{i,j-1}^k - 2I_{i,j}^k + I_{i,j+1}^k) \right] - I_{i,j}^k \left[(B_{i-1,j} - 2B_{i,j} + B_{i+1,j}) \right. \\ &\quad \left. + (B_{i,j-1} - 2B_{i,j} + B_{i,j+1}) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

化简得

$$\begin{aligned} I_{i,j}^{k+1} &= I_{i,j}^k + \Delta t [B_{i,j} (I_{i-1,j}^k + I_{i,j-1}^k + I_{i,j+1}^k + I_{i+1,j}^k) \\ &\quad - I_{i,j}^k (B_{i-1,j} + B_{i,j-1} + B_{i,j+1} + B_{i+1,j})] \end{aligned} \quad (8)$$

其中零时刻的图像 $I_{i,j}^0 (i, j = 1, \dots, N)$ 为给定的初始图像。

4 实验结果分析

本文选用‘狒狒’图像作为试验图像。首先对原始图像作三层小波分解, 选择上一层低频图作为初始图像, 下一层低频图为目标图像, 上一层低频图像经方向扩散方程可扩散收敛到下一层低频图像, 随着扩散的进行, 扩散结果离目标图像越来越近, 此时的收敛速度越来越慢。反过来, 选择下一层低频图像作为初始图像, 上一层低频图像作为目标图像, 下层低频图像亦可扩散恢复到上层低频图像, 同样, 随着扩散的进行, 扩散结果与原始图像越来越近, 而收敛的速度亦越来越慢。

图 1 是由第 2 层低频图像经方向扩散方程扩散收敛到第 3 层低频图像, 以及由第 3 层低频图像反向扩散收敛到第 2 层低频图像的结果对比图。图 1 (a) 为第 2 层低频图像, 图 1 (b) 为第 3 层的低频图像, 图 1 (c) 为由图 1 (a) 经方向扩散方程向图 1 (b) 扩散 300 步后得到的近似图像。本文用两幅图像之间灰度值差的最大值来度量两幅图的距离, 即 $d = \max_{i,j=1,\dots,N} |I_{i,j} - J_{i,j}|$ 。扩散 300 步时的结果图像与目标图像图 1 (b) 的距离 $d = 2.5929$, 从前面的扩散趋势来看, 在后续的扩散中这一距离将继续减小。因为本文是用最大距离

来度量两幅图像的距离的, 因此此时两幅图已经非常接近。图 1(d)为图 1 (b)反向向图 1 (a)扩散 300 步后得到的近似图, 此时的结果图像与初始图像图 1 (a)的距离为 $d = 3.2317$ 。图 1 (e)和图 1 (f)分别表示正向扩散和反向扩散中初始图像扩散收敛到目标图像的收敛速度, 其中横坐标表示迭代的步数, 纵坐标表示扩散到这一层时结果图像与目标图像的距离。从扩散速度图中可以看到开始一段时间内, 扩散图像与目标图像的距离迅速减小, 说明扩散收敛的速度很快, 随着扩散的进行收敛速度越来越趋于平缓, 当扩散图像与目标图像越来越接近时, 收敛的速度也越来越慢, 整个过程的收敛速度是递减的。

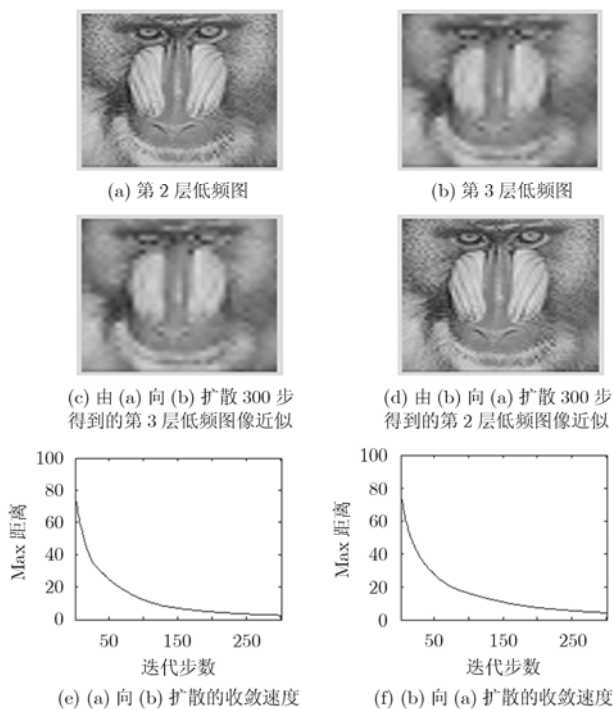


图1 小波分解第2层低频图像与第3层低频图像之间的扩散结果

在图 1 中, 只是具有代表性的显示了小波分解第 2 层与第 3 层低频图像之间的正向扩散分解与反向扩散重构过程, 本文还试验了原始图像与第 1 层低频、第 1 层低频与第 2 层低频以及第 2 层低频与第 3 层低频之间的正向和反向扩散, 以及用多幅不同图像进行了验证, 它们也都表现出了很好的收敛性质。这样如果将相邻两层间扩散过程的每一层中间图像都显示出来, 就可以看到两层间分解与重构的中间渐变过

程。且扩散时间间隔越小, 中间过程就看的越细。

就小波变换本身而言, 它可以通过使用分数的尺度因子来提供更精确的频率定位, 但必须以更复杂的构造和运算为代价。无论取多大的尺度因子, 利用方向扩散方程还是可以看到由该尺度因子所构造的小波变换相邻两层间分解与重构的中间过程, 因而, 用方向扩散方程来分析相邻两层间小波分解与重构过程具有其优越性。

5 结束语

本文通过方向扩散方程实现了小波分解和重构的渐变过程, 从而通过选择越来越小的时间间隔, 就可以在越来越细的尺度上观察相邻两层间的小波分解和重构。初始图像经方向扩散方程可以扩散收敛到目标图像, 而小波变换可以将图像的高频信息和低频信息分解开来, 在不同的尺度上观察图像的信息。将方向扩散方程与小波变换有机结合, 并应用于图像去噪、恢复等领域, 将是作者下一步研究的方向。

参考文献

- [1] Illner R and Neunzert H. Relative entropy maximization and directed diffusion equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1993, 16(10): 545-554.
- [2] Illner R, and Tie J. On directed diffusion with measurable background, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1993, 16(10): 681-690.
- [3] Weickert J. Anisotropic diffusion in image processing. [Doctor Thesis]. Germany: University of Kaiserslautern, 1996.
- [4] 冯象初, 甘小冰, 宋国乡. 数值泛函与小波理论. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003: 105-122.
- [5] 陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法(第2版). 北京: 清华大学出版社, 2003: 58-100.
- [6] 胡健伟, 汤怀民. 微分方程数值方法. 北京: 科学出版社, 1999, 2-5 章.
- [7] Zhuang Xinhua, Haralick R M, and Zhao Yunxin. Maximum entropy image reconstruction, *IEEE Trans. on signal processing*, 1991, 39(6): 1478-1480.

孙晓丽: 女, 1980 年生, 博士生, 研究方向为小波分析及其应用、偏微分方程及其在图像处理中的应用。

冯象初: 男, 1962 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为小波理论及应用、数值分析、图像处理等。

宋国乡: 女, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为小波理论及应用、应用泛函分析和最优化理论等。