

确定分形函数的局部奇异性指数及其谱

王兆瑞^① 吕善伟^① 中村武恒^②

^①(北京航空航天大学电子信息工程学院 北京 100083)

^②(京都大学电子工程系 京都 615-8510 日本)

摘要: 基于配分函数的多分形形式仅仅提供了信号奇异性指数的全局描述,并没有给出局部信息,然而在实际应用中,揭示出信号的局部奇异性信息往往更具有重要性。该文提出了一种确定信号局部奇异性指数的新算法,构造了一种类似于奇异性谱的直方图,并用来描述信号奇异性全局统计分布。数字试验验证了该算法的有效性。

关键词: 奇异性谱; 局部 Hölder 指数; 小波变换

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)02-0290-03

Determining the Local Singularity Exponents and Spectrum of the Fractal Function

Wang Zhao-rui^① Lü Shan-wei^① Nakamura Taketsune^②

^①(School of Electronic and Information Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China)

^②(Graduate School of Engineering, Kyoto University, Kyoto 615-8510, Japan)

Abstract: Traditional partition function-based multifractal formalism provides only global estimates of singularity exponents, no local information is offered. However, it is more important to recover the local singularity. A novel algorithm for determining the local singularity exponents is proposed, which provides the local scaling information of interest, whilst a singularity-spectrum-like histogram is constructed to describe the global statistical distribution of the local singularity strengths. The validity is verified by numerical experiment.

Key words: Singularity spectrum; Local Hölder exponents; Wavelet transform

1 引言

多分形布朗运动 mBm(multifractional Brownian motion)^[1]是描述多分形现象的著名模型,不过,为了将其运用在实际问题中,需要有效地估计出实际信号中刻画奇异性的局部 Hölder 指数。虽然在 20 世纪 90 年代初期发展起来的基于配分函数的多分形形式已经被广泛地用来检测信号中的多分形性,但是由于该技术内在的统计属性,使其只能提供信号奇异性全局描述;另外,用这种方法计算奇异性谱时,由于对奇异性指数进行了加权,从而使最终得到的谱受到了一定的平滑,这样就可能掩盖信号中一些有用的信息。因此,需要一种既能揭示所分析信号的全局奇异性分布,又能给出局部奇异性信息的方法。

由于小波变换^[2]可以充分揭示信号在不同尺度及时间上的变化情况,非常适合分析信号中的时变动力学特征;此外,小波变换很高的计算效率以及其在处理非平稳和分形信号中的成功应用^[3],都是选用小波变换的原因。对于处理信号局部奇异性这样的问题,最关键的是对信号的表示具有移位不变性,最大重叠离散小波变换 MODWT(Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform)^[4]满足这一要求。

Goncalves 和 Abry^[5]通过多窗口尺度图估计信号的局部奇异性指数,但是这种技术涉及到构造非标准的小波,给

实际应用带来了困难。Wang^[6]和他的同事们也利用离散小波变换 DWT(Discrete Wavelet Transform)估计了局部自相似过程中的局部自相似指数,不过,在他们的算法中,对划分间隔的主观性选择造成了估计结果的偏差很大;另外,上述学者都没有将局部奇异性指数和全局奇异性谱联系起来。

2 理论背景

2.1 基于 MODWT 的小波谱

小波谱有时也被称为小波方差,它将信号的方差分解到不同的尺度和空间上。

根据 MODWT 的能量守恒特性:

$$\|\mathbf{X}(n)\|_{n \in N}^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \|\tilde{\mathbf{W}}_{j,t}\|^2 \quad (1)$$

定义点状小波谱:

$$P_{j,t} = \|\tilde{\mathbf{W}}_{j,t}\|^2 \quad (2)$$

式中 $\mathbf{X}(n)$ 为被分析信号, $\tilde{\mathbf{W}}_{j,t}$ 为小波系数,下标 j 和 t 分别表示小波系数所处的尺度和位置。点状小波谱描述信号在位置 t 和尺度 j 处的能量分布。

根据上述定义,可以定义局部小波谱:

$$\bar{P}_{j,V} = \frac{1}{V} \sum_{t=0}^{V-1} \|\tilde{\mathbf{W}}_{j,t}\|^2 \quad (3)$$

局部小波谱测量信号在位置 t 和尺度 j 周围 V 的能量。 V 依

赖于所用小波的物理形状, 通常被称为信号的影响锥域(cone of influence)。

假定小波 $\psi(t)$ 具有 n 阶消失矩并且具有紧支撑 $[-K_\psi, K_\psi]$, 点 t_0 在尺度-位置平面中的影响锥域是点 (t', j) 的集合, t_0 被包括在 $\psi_{j,t'}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - t')$ 的支撑中。由于 $\psi(2^j t - t')$ 的支撑等于 $[t' - 2^j K_\psi, t' + 2^j K_\psi]$, 所以函数 \mathbf{X} 在点 t_0 处的值将影响下述范围的小波系数值:

$$|t' - t_0| \leq 2^j K_\psi \quad (4)$$

在尺度-位置平面, 这是一个指向 t_0 的锥形域。

由于小波函数通常由共轭镜像滤波器 h_w 来刻画, 所以在数字计算时用 h_w 的支撑 $[-K_{h_w}, K_{h_w}]$ 来代替 ψ 的支撑, 也就是:

$$|t' - t_0| \leq 2^j K_{h_w} \quad (5)$$

2.2 局部奇异性指数

令 $\mathbf{X}: \Theta \rightarrow \mathfrak{R}$ 为一个函数, 其中 $\Theta \subset \mathfrak{R}$ 是开集并且 $h \in (0, 1)$, 称 $\mathbf{X} \in C_i^h(\Theta)$, 如果

$$\exists C: \forall t_1, t_2 \in \Theta: |\mathbf{X}(t_1) - \mathbf{X}(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^h \quad (6)$$

如果 $h \in (m, m+1)$, $m \in \mathbb{N}$, 那么 $\mathbf{X} \in C_i^h(\Theta)$ 意味着:

$$\exists C: \forall t_1, t_2 \in \Theta: |\partial^m \mathbf{X}(t_1) - \partial^m \mathbf{X}(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^{h-m} \quad (7)$$

令 $h_t(\mathbf{X}, t_0, r) = \sup\{h: \mathbf{X} \in C_i^h(B(t_0, r))\}$, 式中 $B(t_0, r)$ 为中心位于 t_0 , 半径等于 r 的球, 则局部 Hölder 指数定义如下^[7]:

设 \mathbf{X} 为定义在 t_0 邻域的连续函数, 则 \mathbf{X} 在 t_0 处的局部 Hölder 指数为实数 $h_t(t_0)$:

$$h_t(t_0) = \lim_{r \rightarrow 0} h_t(\mathbf{X}, t_0, r) \quad (8)$$

以后将 $h_t(t_0)$ 简记为 h 。

需要指出的是, 本文仅研究信号中非震荡的奇异性, 这是由于当奇异性具有震荡特性时, 对应的小波系数具有特殊的性质^[8]。

令 $t_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, 并且分析小波 ψ 具有 $[h]+1$ 阶消失矩, 那么 $\mathbf{X} \in C_i^h(B(t_0, r))$ 当且仅当存在常数 C , 对所有 (j, t') 且 $t' \in B(t_0, r)$, 下式成立:

$$\|\tilde{\mathbf{W}}_{j,t'}\|_{L^2} = O(2^{j(h+1/2)}), \quad j \rightarrow -\infty \quad (9)$$

小波系数对局部 Hölder 空间给出了一个必要且充分的表述。

3 算法描述

在实际中, 通常只能测量到随机过程 $\mathbf{X}(t)$ 在一些离散时间点上的实现, 为方便起见, 假定这些点支撑在区间 $(0, 1)$, 并且是等间隔分布的。

3.1 估计奇异性指数 h

由式(9)得到 $\|\tilde{\mathbf{W}}_{j,t'}\|^2 = O(2^{2j(h+1)})$, 当 $j \rightarrow -\infty$ 时, 结合局部小波谱和小波变换影响锥域的定义, 有下式成立:

$$\hat{P}_{j,V} = \frac{\sum_{t' \in V} \|\tilde{\mathbf{W}}_{j,t'}\|^2}{2 \cdot 2^j \cdot K_{h_w}} = O(2^{2jh}) \quad (10)$$

假定在各个尺度上位于影响锥域内的小波系数服从零均值的渐进正态分布, 则 $\hat{P}_{j,V}$ 正比于 $2 \cdot 2^j \cdot K_{h_w}$ 个零均值高斯随机变量的平方和, 这些随机变量具有相同的方差, 但彼此相关, 于是就可以用一个比例化 χ^2 分布来近似 $\hat{P}_{j,V}$ 的分布, 即

$$\frac{\eta_j \hat{P}_{j,V}}{\bar{P}_{j,V}} \stackrel{d}{=} \chi_{\eta_j}^2 \quad (11)$$

式中 η_j 为等价自由度, 由式 $\eta_j = \max((2^{j+1} \cdot K_{h_w} - B_j)/2^j, 1)$ 决定^[4], B_j 为边界系数。

根据式(11), 有

$$\log_2(\hat{P}_{j,V}) \stackrel{d}{=} \log_2(\chi_{\eta_j}^2) + \log_2(\bar{P}_{j,V}) - \log_2(\eta_j) \quad (12)$$

由于 $E(\log_2(\chi_{\eta_j}^2)) = \phi\left(\frac{\eta_j}{2}\right) + 1$ 且 $\text{var}(\log_2(\chi_{\eta_j}^2)) = \phi'\left(\frac{\eta_j}{2}\right)$, 式

中 $\phi(\cdot)$ 和 $\phi'(\cdot)$ 分别为 digamma 和 trigamma 函数, $E(\cdot)$ 表示期望运算, 于是下式成立:

$$E(\log_2(\hat{P}_{j,V})) = \phi\left(\frac{\eta_j}{2}\right) + a + 2hj - \log_2\left(\frac{\eta_j}{2}\right) \quad (13)$$

令

$$Y_{j,V} = \log_2(\hat{P}_{j,V}) - \phi\left(\frac{\eta_j}{2}\right) + \log_2\left(\frac{\eta_j}{2}\right) \quad (14)$$

则有线性回归模型:

$$Y_{j,V} = a + j2h + e_{j,V} \quad (15)$$

其中误差项:

$$e_{j,V} = \log_2\left(\frac{\hat{P}_{j,V}}{\bar{P}_{j,V}}\right) - \phi\left(\frac{\eta_j}{2}\right) + \log_2\left(\frac{\eta_j}{2}\right) \quad (16)$$

服从均值为零, 方差为 $\phi'\left(\frac{\eta_j}{2}\right)$ 的近似高斯分布。据此可以利用线性最小二乘理论来得到 h 的加权最小二乘估计:

$$\hat{h} = \frac{\sum_{j=1}^J w_j \sum_{j=1}^J j w_j Y_{j,V} - \sum_{j=1}^J j w_j \sum_{j=1}^J w_j Y_{j,V}}{\sum_{j=1}^J w_j \sum_{j=1}^J j^2 w_j - \left(\sum_{j=1}^J j w_j\right)^2} \quad (17)$$

式中权系数 $w_j = 1/\phi'(\eta_j/2)$, J 是小波分解总层数。

3.2 生成 h 的直方图

由于所谓的奇异性谱就是给出分形信号中奇异性成分的统计分布, 所以自然可以利用上述得到的局部 Hölder 指数来生成相应的直方图, 并以此来近似传统的奇异性谱。为了便于二者的比较, 本文采用归一化的直方图, 记为 $\text{hist}(h)$ 。

3.3 算法的实际完成

令向量 $\mathbf{X} = [x(t_1), \dots, x(t_N)]$, $t_i = (i-1)/(N-1)$ 表示信号 $\mathbf{X}(t)$ 的 N 点实现, 则算法的完成包括下列步骤:

(1) 对输入向量 \mathbf{X} 进行 MODWT, 得到相应的小波系

数: $\tilde{\mathbf{W}}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} \tilde{h}_{j,l} \mathbf{X}_{t-l \bmod N}$ 。

(2) 循环前移系数向量 $\{\tilde{\mathbf{W}}_{j,t}\}$, 以使其与原时间信号尽可

能在时间点上对齐。对于 Daubechies 最小不对称小波, 前移

$$\text{量 } T_{wj} \text{ 由下式决定: } T_{wj} = \begin{cases} -0.5L_j, & L/2 \text{ is even} \\ -0.5L_j + 1, & L = 10 \text{ or } 18 \\ -0.5L_j - 1, & L = 14 \end{cases};$$

对于 Coiflet 小波, 前移量 T_{wj} 由下式决定:

$$T_{wj} = L/6 - 0.5L_j$$

(3) 对于每一个尺度, 确定 t_i 的影响锥域 $|t' - t_i| \leq 2^j K_{h_w}$ 。

(4) 估计每一尺度上, 位于影响锥域内的局部小波谱:

$$\hat{P}_{j,V} = \frac{\sum_{t' \in V} \|\tilde{w}_{j,t'}\|^2}{2 \cdot 2^j \cdot K_{h_w}}$$

(5) 对 $\log_2 \hat{P}_{j,V}$ 和 j 在不同尺度上利用加权最小二乘方法进行线性回归分析, 计算出斜率 b 。

(6) 计算第 i 个局部 Hölder 指数 $\hat{h}_i(t_i) = b/2$ 。

(7) 重复步骤(3)–步骤(6), 得到所有时间点上的局部 Hölder 指数。

(8) 生成所得局部 Hölder 指数的归一化直方图 $\text{hist}(h)$ 。

4 仿真试验

本文通过分析多分形布朗运动来验证该算法的有效性, 多分形布朗运动是一种零均值高斯非平稳随机过程, 相对于常值 Hölder 指数的分形布朗运动来讲它更适合描述现实生活中的物理现象。该过程的实现采用改进的轮换矩阵嵌入方法来生成^[9], 记为 $B_{h(t)}(t)$, 所用的 Hölder 函数为 $h(t) = 0.1 + 0.8t$, $0 < t < 1$, 仿真信号的长度是 $N = 4096$, 分析用小波为 Daubechies 最小不对称小波“sym2”, MODWT 采用反射边界条件。

试验结果为来自于 500 个样本的平均局部 Hölder 指数估计值 $\hat{h}(t)$ 及其归一化的直方图, 作为对比, 也给出了基于配分函数的奇异性谱, 如图 1 所示。

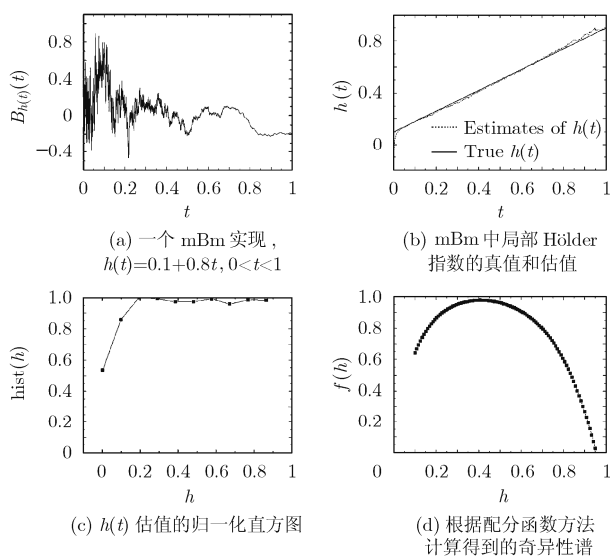


图 1

由图 1(c)和 1(d)可见, 奇异性指数估值的直方图和基于配分函数的奇异性谱都展示出了相当宽的谱形, 这种现象揭示了所分析的信号是多分形信号这个事实, 而图 1(b)则给出了信号中奇异性指数的时域分布。该仿真试验结果证明了本文算法不仅可以从全局的角度来确定信号中奇异性指数的统计分布, 更重要的是, 可以揭示出信号中奇异性指数在时间上的分布, 而这样的信息在基于配分函数的方法中是得不到的。

5 结束语

本文提出并验证了一个确定分形信号中奇异性分布的算法, 提供了一种描述多分形尺度行为的新方法, 这种方法不同于传统的基于配分函数的方法, 算法的完成是基于局部最大重叠离散小波变换谱, 数字试验证明了该算法的有效性和优越性。

参考文献

- [1] Peltier R F and Levy Vehel J. Multifractal Brownian motion: definition and preliminary results[R]. INRIA Research Report, No. 2645, 1995.
- [2] Grossmann A and Morlet J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1984, 15(4): 723–736.
- [3] Mallat S A. Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation[J]. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, 11(7): 674–693.
- [4] Percival D B and Walden A T. Wavelet Methods for Time Series Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 159–205.
- [5] Goncalves P and Abry P. Multiple-window wavelet transform and local scaling exponent estimation[A]. In Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing[C], Munich, Germany, 1997, 5: 3433–3436.
- [6] Wang Y, Cavanaugh J E, and Song C. Self-similarity index estimation via wavelets for locally self-similar processes[J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2001, 99(11): 91–110.
- [7] Levy Vehel J. Signal enhancement based on Hölder regularity analysis[A]. In the IMA Volumes in Mathematics and Its Applications[C], 2002, 132: 197–209.
- [8] Mallat S and Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1992, 38(2): 617–643.
- [9] Chan G and Wood A T A. Simulation of multifractal Brownian motion[A]. In Proceedings in Computational Statistics 1998[C], Bristol, Great Britain, 1998: 233–238.

王兆瑞 男, 1970 年生, 博士生, 研究方向为分形、非线性信号处理等。

吕善伟 男, 1937 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能天线、微波通信等。

中村武恒 男, 1969 年生, 博士, 副教授, 主要研究方向为超导、非线性理论等。