

## 基于准正交空时码的最优线性预编码矩阵设计

刘雪芳 傅丰林

(西安电子科技大学通信工程学院 西安 710071)

**摘要:** 为了充分利用信道信息改善应用准正交空时分组码的 MIMO 系统的性能, 该文提出了将预编码矩阵和准正交空时分组码相结合的发射机制。信息在经过准正交空时分组码编码后, 要经过线性预编码矩阵进行处理, 才可以从发射天线发送。文中的预编码矩阵设计利用了 MIMO 信道的非零均值矩阵和相关矩阵, 并采用成对差错概率作为其最优设计准则。仿真结果表明, 相对于未经过预编码矩阵的系统, 新系统的误码率性能有明显改善。

**关键词:** 准正交空时分组码; 线性预编码矩阵; 信道相关; 成对差错概率

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)02-0401-03

## Optimal Linear Precoding Design Based on the Quasi-Orthogonal STBC

Liu Xue-fang Fu Feng-lin

(School of Telecommunication Engineers, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** For improving the performance of MIMO system with quasi-orthogonal STBC exploiting the channel knowledge, a new transmitter scheme combining the linear precoding matrix is proposed. Before sending out from the transmit antennas, the information is sent into the space-time encoder, then is processed by a precoder matrix. Exploiting the channel correlation and mean, the linear precoder is designed based on the Pair-wise Error Probability (PEP). Simulation results show that significant gain in BER of the new system can be obtained compared with the unprecoded system.

**Key words:** Quasi-Orthogonal STBC(QOSTBC); Linear precoding matrix; Channel correlation; Pair-wise Error Probability (PEP)

### 1 引言

相对于单天线通信系统, 多入多出(MIMO)系统可以有效提高系统容量。并且, 随着发射端天线数的增加, 系统容量也会随之增加。为了达到多天线系统巨大的潜在容量, 空时编码(STC)和 MIMO 相结合的发射机制成为近几年的研究热点。正交空时编码(OSTBC)即是一种基于正交设计的码制, 但是考虑到无线链路的随机性, 空时码的设计前提是假设发射端不知道信道信息(CSI)。研究表明如果在发射端可以利用完整或部分信道信息(CSI), 即在发射端或接收端对信号做适当的线性处理, 则可以更进一步改善系统性能。线性预编码矩阵正是这样一个预处理的过程, 它可以在不改变 STC 的基础上, 使发射端自适应于信道状态。文献[1]研究了相关信道下的 OSTBC MIMO 系统的预编码矩阵设计。

近几年, 文献[2, 3]提出了一种新的码制——准正交空时编码(Quasi-Orthogonal STBC), 利用星座图旋转方法, 即可以得到全速率和全分集的改进型 QOSTBC。分析表明, 只需要稍微增加解码的复杂度, 新的 QOSTBC MIMO 系统在整个 SNR 范围内的性能明显优于 OSTBC MIMO 系统。

为了改善应用准正交空时分组码的 MIMO 系统的性能, 若能在发射端也利用部分信道信息, 则其性能必定会有进一步的改善, 并且同样会优于应用预编码矩阵的 OSTBC MIMO 系统。笔者研究了相关 MIMO 信道下的最优预编码矩阵设计。仿真表明, 经过预编码矩阵后的系统的误码率性能可以得到明显改善。

### 2 系统模型

#### 2.1 系统模型

本文考虑一个发射天线数为  $M_t$ , 接收天线数为  $M_r$  的 MIMO 系统, 如图 1 所示。在时刻  $t$ , 令  $\mathbf{H}(t)$  为  $M_r \times M_t$  维衰落信道矩阵, 且信道为准静态平坦衰落信道。输入数据被首先送入  $b \times t$  维 QOSTBC 编码器,  $b$  为空间维数,  $t$  为时间维数, 该编码器是在未知 CSI 情况下按照空时编码设计准则设计的, 输出码字为  $\mathbf{C}_{b \times t}$ 。为了使发送信号能自适应于信道状态, 在发送信号之前码字矩阵  $\mathbf{C}$  送入  $M_t \times b$  维预编码矩阵  $\mathbf{P}$ , 该预编码矩阵是随着接收端反馈回的信道信息进行调整的。设接收端的信号为  $M_r \times t$  维矩阵  $\mathbf{Y}$ , 则接收信号可表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{HPC} + \mathbf{N} \quad (1)$$

$\mathbf{N}$  为  $M_r \times t$  维高斯白噪声矩阵, 且  $\mathbf{N} \in (0, \mathbf{I}\sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  为噪

声功率。

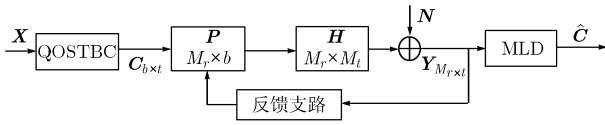


图1 MIMO系统模型

## 2.2 信道模型

假定 MIMO 信道为一个均值非零的相关信道。令  $\mathbf{R}_t$  为发射端相关矩阵,  $\mathbf{H}_m$  为信道系数的均值, 它表示 MIMO 信道的视距分量。

则信道矩阵  $\mathbf{H}$  可表示为<sup>[4]</sup>

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_w \mathbf{R}_t^{1/2} \quad (2)$$

$\mathbf{H}_w$  为一个  $M_r \times M_t$  维的复高斯随机变量矩阵, 其元素是一个零均值, 且方差为 1 的随机变量。在系统分析中假定发送端通过反馈信道已知均值矩阵和相关矩阵, 且相关矩阵是满秩的, 即可逆。

## 2.3 准正交空时编码

为了提高码速率, 系统中采用了可以达到发射速率为 1 且全分集的准正交空时编码(QOSTBC)。本文采用了文献[3]中的 4 天线 QOSTBC, 如下所示

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2^* & x_1^* & -x_4^* & x_3^* \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_4^* & x_3^* & -x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} \quad (3)$$

为了得到全分集, 码制中的两个码元是来自于某星座图  $\mathbf{A}$ , 而另外两个码元则是来自于旋转星座图  $e^{j\theta} \mathbf{A}$ , 根据文献[3], 旋转角度选择为  $\pi/4$ 。令  $\mathbf{C}$  为实际发射的码字,  $\hat{\mathbf{C}}$  为错误的估计码字, 其码字距离矩阵为式(4)。

$$(\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}})(\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}})^* = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中,  $a = \sum_{m=1}^4 |\Delta c_m|^2$ ,  $b = \Delta c_1 \Delta c_3^* + \Delta c_3 \Delta c_1^* + \Delta c_2 \Delta c_4^* + \Delta c_4 \Delta c_2^*$ , 且  $\Delta c_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  表示两个码字矩阵的第  $i$  个码元的差值。

## 3 最优预编码矩阵设计

### 3.1 PEP 准则

如果发送端可以充分利用信道信息, 则可以有效改善系统性能。采用预编码矩阵就可以使发射端自适应于信道的一种发射机制。由图 1 可得, 发射端实际发射的码字可以表示为

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{P}\mathbf{C} \quad (5)$$

显然, 由于  $\mathbf{C}$  是全速率的,  $\bar{\mathbf{C}}$  也可以达到全速率。并

且为了保证发射端的总平均功率, 必须满足  $\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^*) = 1$ 。

由文献[1]可得到, PEP 上限为

$$\text{PEP}(\bar{\mathbf{C}} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}) \leq \frac{\exp[\text{tr}(\mathbf{H}_m \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H}_m^*)] \det(\mathbf{R}_t)^{M_r}}{\det(\mathbf{W})^{M_r}} \cdot \exp[-\text{tr}(\mathbf{H}_m \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{H}_m^*)] \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_t \frac{\mathbf{A}'}{4\sigma^2} \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_t \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= (\bar{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}})(\bar{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}})^* \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}})(\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}})^* \mathbf{P}^* = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^* \end{aligned} \quad (8)$$

### 3.2 最优化问题描述

对式(6)求对数, 并忽略其中的常数项, 最优化设计可以描述为一个 MinMax( $\cdot$ )问题, 即最小化 PEP 上限, 其目标函数可表示为

$$\min_{\mathbf{W}} J(\mathbf{W}) = \text{tr}(\mathbf{H}_m \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H}_m^*) - M_r \log \det(\mathbf{W})$$

约束条件:  $\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^*) = 1$ , 且  $\mathbf{P}\mathbf{P}^*$  是半正定矩阵 (9)

### 3.3 最优预编码矩阵设计

令  $\mathbf{A}'(\bar{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{C}}) = \mathbf{P}\mathbf{U}_c \mathbf{A}_c \mathbf{U}_c^* \mathbf{P}^*$ , 根据式(4)中的  $a$  和  $b$  的定义, 对  $\mathbf{A}$  做本征分解, 得到

$$\mathbf{U}_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{bmatrix} \quad (10)$$

定义新的预编码矩阵为  $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{U}_c$ 。为了应用文献[1]中对于 OSTBC 的最优预编码矩阵设计的结论, 对式(9)所描述的最优化问题的条件做出适当放松。令  $\lambda_{\min}$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的最小本征值, 即令  $\mathbf{A}_c = \lambda_{\min} \mathbf{I}$ , 可得新的  $\mathbf{W}$  为

$$\mathbf{W}' = \frac{\lambda_{\min}}{4\sigma^2} \mathbf{R}_t \mathbf{P}\mathbf{P}^* \mathbf{R}_t + \mathbf{R}_t \quad (11)$$

且  $\det(\mathbf{W}')$  小于  $\det(\mathbf{W})$ 。将  $\mathbf{W}'$  代入式(9)中, 新的目标函数可以达到最优化设计的要求, 且该最优化预编码矩阵设计过程等同于文献[1]中设计过程。同时, 对式(9)中的约束条件做成相应改造, 根据不等式  $\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^*) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{A})\text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^*)$ <sup>[5]</sup>, 且由式(8)得  $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^* = 4\sigma^2(\mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{W} \mathbf{R}_t^{-1} - \mathbf{R}_t^{-1})$ , 当使用新构造的  $\mathbf{W}'$  时, 新的约束条件如下:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{W}' \mathbf{R}_t^{-1} - \mathbf{R}_t^{-1}) &= \lambda_{\min} / (4\sigma^2), \\ \text{且 } \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{W}' \mathbf{R}_t^{-1} - \mathbf{R}_t^{-1} &\text{ 是半正定矩阵} \end{aligned} \quad (12)$$

利用拉格朗日法解决该最优化问题。即令  $\mu$  为拉格朗日因子, 构造拉格朗日函数  $f$  并对  $\mathbf{W}'$  求导, 可得

$$-(\mathbf{W}')^{-1} \mathbf{H}_m^* \mathbf{H}_m (\mathbf{W}')^{-1} - M_r (\mathbf{W}')^{-1} + \mu \mathbf{R}_t^{-2} = 0 \quad (13)$$

对式(13)求解, 可得到

$$\mathbf{W}' = \frac{1}{2\mu} \mathbf{R}_t (\mathbf{M}_r \mathbf{I}_{M_t} + \boldsymbol{\Psi}^{1/2}) \mathbf{R}_t \quad (14)$$

其中定义矩阵  $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{M}_r^2 \mathbf{I}_{M_t} + 4\mu \mathbf{R}_t \mathbf{H}_m^* \mathbf{H}_m \mathbf{R}_t^{-1}$ 。若求出拉格朗日乘子  $\mu$ ，则可以求出  $\mathbf{W}'$ ，并最终确定预编码矩阵  $\mathbf{P}$ 。

令  $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{W}' \mathbf{R}_t^{-1} - \mathbf{R}_t^{-1}$ ，假设其是满秩矩阵，将式(14)代入，可得到式(12)中的约束条件为

$$\text{tr}(\boldsymbol{\Theta}) = \text{tr} \left( \frac{1}{2\mu} (\mathbf{M}_r \mathbf{I}_{M_t} + \boldsymbol{\Psi}^{1/2}) - \mathbf{R}_t^{-1} \right) = \lambda_{\min} / 4\sigma^2 \quad (15)$$

由于式(15)对于  $\mu$  是单调变化的，因此可以通过先确定  $\mu$  的最大值和最小值，再通过搜索的方法获取合适的  $\mu$  值。令  $\lambda_i$  为  $\mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{H}_m^* \mathbf{H}_m \mathbf{R}_t^{-1}$  的本征值， $\alpha_0$  为其迹， $\beta_0 = 2[\text{tr}(\mathbf{R}_t^{-1}) + \lambda_{\min} / 4\sigma^2]$ ，可得  $\mu$  的范围为

$$\mu_{\text{lower}} = \frac{4M_t^2 \lambda_1}{\beta_0^2} + \frac{2M_t M_r}{\beta_0}, \quad \mu_{\text{upper}} = \frac{4M_t \alpha_0}{\beta_0^2} + \frac{2M_t M_r}{\beta_0} \quad (16)$$

在式(16)所表示的范围内寻找  $\mu$ ，并代入式(15)中，直到达到合适的计算精度，同时保证矩阵  $\boldsymbol{\Theta}$  满足半正定的条件。图 2 给出了迭代次数的仿真图，可见，由于是一维搜索，因此收敛速度很快。

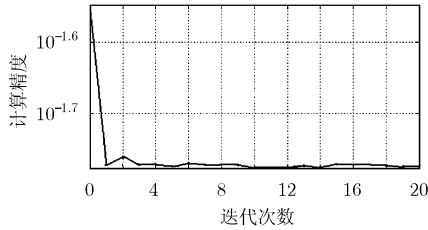


图 2 搜索  $\mu$  的迭代次数仿真

根据式(11)和式(14)，可得

$$\bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{P}}^* = \frac{2\sigma^2}{\mu \lambda_{\min}} (\mathbf{M}_r \mathbf{I}_{M_t} + \boldsymbol{\Psi}^{1/2}) - \frac{4\sigma^2}{\lambda_{\min}} \mathbf{R}_t^{-1} \quad (17)$$

令式(15)的右边为矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$ ，并对其做本征分解，得到  $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{U}_{\boldsymbol{\Phi}}^*$ ，且由于  $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \mathbf{U}_c$ ，因此可得最优预编码矩阵为

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\Phi}}^{1/2} \mathbf{U}_c^* \quad (18)$$

#### 4 仿真分析

为了验证经过预编码后 MIMO 系统的 BER 性能的改善，给出了  $4 \times 1$  的应用 QOSTBC 的 MIMO 系统和应用 OSTBC 的 MIMO 系统在两种信号调制方式下的 BER 仿真图。信道的均值矩阵是随机产生的。信道的相关矩阵是在如下条件下产生的：扩展角为 0.1rad，天线间距为半个波长。仿真结果是在随机产生 1000 次均值矩阵和特定相关矩阵下进行平均得到。QPSK 和 16QAM 均采用方形星座图，QOSTBC 采用文中 2.3 节所给出的模型，OSTBC 采用 Alamouti 编码，其预编码矩阵采用文献[1]中给出的最优化设计。

由图 3 和图 4 可看出，相对与未进行预编码的 QOSTBC

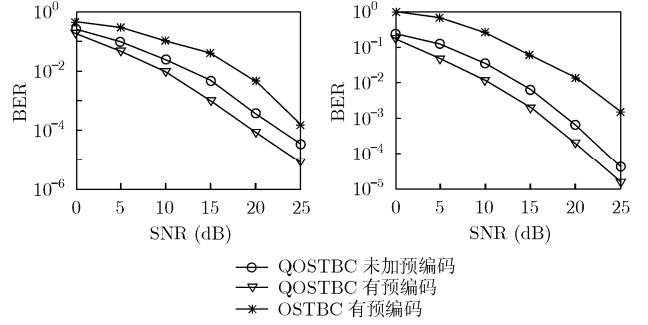


图 3 QPSK 调制的 BER 比较 图 4 16QAM 调制的 BER 比较

MIMO 系统来说，BER 性能有所改善，进行预编码后的系统增益平均为 2.5dB，且采用 QPSK 调制的 BER 性能优于采用 16QAM 调制方式。同时，可以看出相对于应用 OSTBC 的 MIMO 系统来说，应用 QOSTBC 的 MIMO 系统性能有较大改善，其增益平均可以达到 5dB。

#### 5 结束语

针对设计准正交空时编码时并未考虑信道信息的问题，提出将应用于 OSTBC MIMO 系统的预编码思想沿用于 QOSTBC MIMO 系统中，以改善系统性能。该方法在发射端利用了由接收端反馈的信道均值和发射天线之间的相关矩阵，采用最差情况下的 PEP 准则设计最优预编码矩阵。在不改变 QOSTBC 码制的条件下，使发射端可以自适应于信道状态。仿真表明该方法可以有效改善系统的 BER 性能，具有一定的实用价值。

#### 参考文献

- [1] Mai Vu and Arogyaswami Paulraj. Linear precoding for MIMO channels with non-zero mean and transmit correlation in orthogonal space-time coded systems. *IEEE 60th Vehicular Technology Conference*, Los Angeles, 2004, 4: 2503–2507.
- [2] Dalton L A and Georghiades C N. A full-rate, full-diversity four-antenna quasi-orthogonal space-time block code. *IEEE Trans. on Wireless Communications*, 2005, 4(2): 363–366.
- [3] Su Wei-feng and Xia Xiang-gen. Signal constellations for quasi-orthogonal space-time block codes with full diversity. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2004, 50(10): 2331–2347.
- [4] Shiu D, Foschini J G, Gans M, and Kahn J M. Fading correlation and its effect on the capacity of multi-element antenna systems. *IEEE Trans. on Commun.*, 2000, 48(3): 502–513.
- [5] Horn R A and Johnson C R. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985, Chapter 3.

刘雪芳：女，1977 年生，讲师，在职博士生，研究方向为信号识别、多天线系统研究。  
傅丰林：男，1941 年生，教授，研究方向为通信信号处理。