基于时域混合场积分方程求解目标瞬态散射特性

任 猛　周东明　刘 锋　何建国
(国防科技大学电子科学与工程学院　长沙　410073)

摘　要：当入射平面波的频谱包含目标的谐振频点时，时域电场积分方程和时域磁场积分方程求解的表面电流不稳定，会出现后期震荡现象。通过线性组合时域电场积分方程和时域磁场积分方程，可以获得一种混合场积分方程。数值结果显示，这种混合场积分方程消除了因内部谐振引起的后期震荡，得到了稳定的表面电流分布和远区散射场。
关键词：时域混合场积分方程；瞬态特性；内部谐振；后期震荡
中图分类号：O441　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2008)02-0494-04

The Solution of Time-Domain Combined Field Integral Equation for Transient Scattering by Conducting Surfaces of Arbitrary Shape

Ren Meng　Zhou Dong-ming　Liu Feng　He Jian-guo
(*College of Electronics Science and Engineering*, *National Univ. of Defense Technology*, *Changsha* 410073, *China*)

Abstract: The time-domain EFIE and MFIE approaches produce late-time oscillation for transient scattering responses from conducting objects when the incident spectrum of the field contains frequency components, which may correspond to the internal resonance of the structure. A time-domain Combined Field Integral Equation (CFIE) is presented. This formulation is based on a linear combination of the time-domain EFIE with MFIE. Numerical results for the EFIE, MFIE, and CFIE are presented and compared with those obtained from the Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT) of the frequency-domain CFIE solution. And the time-domain CFIE solutions devoid of any resonant components.
Key words: Time-Domain Combined Field Integral Equation(TD-CFIE); Transient response; Internal resonance; Late-time oscillation

1　引言

随着脉冲雷达、高分辨率雷达在目标识别和超宽带技术方面的飞速发展，目标的时域特性越来越引起人们的兴趣[1]。基于矩量法(MOM)求解时域积分方程(TDIE)是获得目标时域特性的一种有效手段，近年来得到了广泛的关注和深入的研究。与时域差分方程方法相比，采用积分方程求解目标电磁瞬态特性有其特有的优势：(1)只对目标表面进行剖分，减少了求解的未知数；(2)自动满足远场边界条件。在时域积分方程的求解中，一般采用时间步进(MOT)迭代算法， MOT 算法分为显示[2]和隐式[3]两种方案。但是不管是显式方案，还是隐式方案，单独求解时域电场积分方程[2](TD-EFIE)或者时域磁场积分方程[4]，只要入射脉冲的频谱包含目标的谐振频点时，都会存在后期震荡现象，使计算结果不稳定。

TD-EFIE 和 TD-MFIE 的后期震荡，阻碍了时域积分方程方法在实际中的应用。针对后期震荡现象，一些学者提出了空间滤波和时间滤波方案[5−8]，部分缓解了后期震荡效应；利用精确的空间积分规则并且恰当地选择时间步长[9]，同样起到了平稳 MOT 算法的作用。但是这些方案都不能从根本上消除因目标内部谐振带来的后期震荡，Shanker 等人[10]对此现象进行了深入分析，指出将电场和磁场积分方程进行某种组合，构成混合场积分方程，可以消除因谐振引起的后期震荡；文献[11]表达了同样的思想，只是混合场的组合方式不同；文献[12]也采用了混合场积分方程求解目标瞬态特性，将电场积分方程和磁场积分方程都对时间求偏导，并且采用了高阶矢量基函数和带限外插技术。本文只对电场积分方程进行一阶求导，采用低阶 RWG 空间基函数[13]，三阶时间基函数，线性组合推导时域混合场积分方程，数值结果显示其计算结果的稳定性。

2　电磁场积分方程

设自由空间 V 中一闭合理想导体(PEC)，其表面为 S，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 为外表面法向方向。入射场 $\boldsymbol{E}^i$，$\boldsymbol{H}^i$ 激励导体表面产生感应电流 $\boldsymbol{J}$，进而在空间产生散射场 $\boldsymbol{E}^s$，$\boldsymbol{H}^s$。根据边界条件可得

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{E}^i+\boldsymbol{E}^s\right)=0 \tag{1}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\boldsymbol{H}^i+\boldsymbol{H}^s\right)=\boldsymbol{J} \tag{2}$$

其中

2006-07-24 收到，2006-12-25 改回

$$\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{J}) = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi \tag{3}$$

$$\boldsymbol{H}^S(\boldsymbol{J}) = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r},t\right) = \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)}{R}\mathrm{d}S' \tag{5}$$

$$\phi\left(\boldsymbol{r},t\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s\int_0^T \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r},t'\right)}{R}\mathrm{d}t'\mathrm{d}S' \tag{6}$$

$R=\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|$ 为场点到源点距离，$\tau = t - R/C$ 为延迟时间。为消除电标位的时间积分，对式(1)两边求导，得到时域电场积分方程(TD-EFIE)：

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^i\left(\boldsymbol{r},t\right) = \hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\mathrm{d}S'\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\tau)}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_S\mathrm{d}S'\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)}{R}\right] \tag{7}$$

对式(2)的源积分抽取 Cauchy 主值并进行相应的矢量变换，得到时域磁场积分方程(TD-MFIE)：

$$\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)}{2} = \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{r},t) + \hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)}{R}\mathrm{d}S' \tag{8}$$

对式(7)，式(8)进行如下线性组合，可以得到时域混合场积分方程(TD–CFIE)：

$$\begin{aligned}(1-k)\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^i\right) + k\eta\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^i\right) &= (1-k)\left[-\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^S(\boldsymbol{J})\right] \\ &\quad + k\eta\left[\frac{\boldsymbol{J}}{2} - \hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\nabla\times\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',\tau)}{R}\mathrm{d}S'\right]\end{aligned} \tag{9}$$

$0\le k\le 1$ 为线性组合系数，$k=0$，式(9)为 TD–EFIE，$k=1$，式(9)转化为 TD–MFIE，η 为自由空间波阻抗。

3　积分方程的离散

矩量法求解积分方程，首先要把目标的表面电流用基函数展开。采用三角形网格剖分，选择定义在三角形对上的 RWG 基函数作为空间基函数(如图 1)，其表达式如式(10)所示；选择三阶多项式作为时间基函数(如图 2)，其表达式如式(11)所示，其中 A_n 为三角形的面积，Δt 为时间步长：

$$\boldsymbol{f}_n\left(r\right) = \begin{cases}\dfrac{l_n}{2A_n^+}\rho_n^+, & \boldsymbol{r}\in T_n^+ \\ \dfrac{l_n}{2A_n^-}\rho_n^-, & \boldsymbol{r}\in T_n^+ \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{10}$$

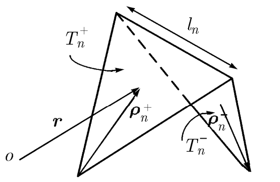

图 1　三角形对和相关几何参数

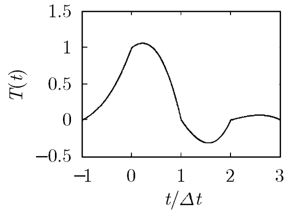

图 2　时间基函数波形

$$T\left(t\right) = \begin{cases}\dfrac{t^3}{6\Delta t^3} + \dfrac{t^2}{\Delta t^2} + \dfrac{11t}{6\Delta t} + 1, & -\Delta t\le t\le 0 \\ -\dfrac{t^3}{2\Delta t^3} - \dfrac{t^2}{\Delta t^2} + \dfrac{t}{2\Delta t} + 1, & 0\le t\le\Delta t \\ \dfrac{t^3}{2\Delta t^3} - \dfrac{t^2}{\Delta t^2} - \dfrac{t}{2\Delta t} + 1, & \Delta t\le t\le 2\Delta t \\ -\dfrac{t}{6\Delta t^3} + \dfrac{t^2}{\Delta t^2} - \dfrac{11t}{6\Delta t} + 1, & 2\Delta t\le t\le 3\Delta t \\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{11}$$

因此表面电流能用上述空间基函数和时间基函数展开成如下形式：

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i=1}^{N_t}\sum_{n=1}^{N_s} I_{n,i}(t)\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r})T_i(t) \tag{12}$$

N_s，N_t 分别表示空间采样和时间采样数，$T_i(t) = T\cdot(t - i\cdot\Delta t)$。将式(12)代入式(7)，式(8)，式(9)，求解电流系数 $I_{n,i}$ 即可获得任意时刻表面电流分布。

4　MOT(Marching-On-in-Time)迭代方案

应用 Galerkin 法检验，选择空间展开函数 $\boldsymbol{f}_n$ 作为检验函数，定义内积如下：

$$\left\langle f,g\right\rangle = \int_S f\cdot g\mathrm{d}S \tag{13}$$

将式(12)代入式(7)，式(8)，并对式(7)，式(8)在时刻 $t=t_j=j\Delta t$ 应用上述检验过程得

$$\boldsymbol{V}_j^E = \sum_{i=1}^{j}\boldsymbol{Z}_{j-i}^E\cdot I_i \tag{14}$$

$$\boldsymbol{C}_j^M = \boldsymbol{V}_j^M + \sum_{i=1}^{j}\boldsymbol{Z}_{j-i}^M I_i \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_{j,m}^E = \left\langle\boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{r}),\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^i\left(\boldsymbol{r},t_j\right)\right\rangle \tag{16}$$

$$\boldsymbol{V}_{j,m}^M = \left\langle\boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{r}),\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}^i\left(\boldsymbol{r},t_j\right)\right\rangle \tag{17}$$

$$\boldsymbol{C}_{j,m}^M = \left\langle\boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{r}),\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r},t_j\right)}{2}\right\rangle = \sum_{i=1}^{j}\sum_{n=1}^{N_s} I_{n,i}T_i(t)\left\langle\boldsymbol{f}_m,\frac{\boldsymbol{f}_n}{2}\right\rangle \tag{18}$$

$$\boldsymbol{Z}_{j-i,m}^E = \left\langle\boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{r}),\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{n}}\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\mathrm{d}S'\sum_{n=1}^{N_s}\frac{\boldsymbol{f}_n}{R}\frac{\partial^2 T_i(\tau)}{\partial\tau^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_S\mathrm{d}S'\sum_{n=1}^{N_s}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{f}_n}{R}T_i(\tau)\right]\right\rangle \tag{19}$$

$$\boldsymbol{Z}_{j-i,m}^{M}=\left\langle \boldsymbol{f}_{m}(\boldsymbol{r}),\hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{C}\int_{S}\sum_{n=1}^{N_s}\frac{\boldsymbol{f}_n\times\widehat{R}}{R}\cdot\frac{\partial T_i(\tau)}{\partial\tau}\cdot I_{n,i}\mathrm{d}S'+\int_{S}\sum_{n=1}^{N_s}\frac{\boldsymbol{f}_n\times\widehat{R}}{R^2}\cdot T_i(\tau)\cdot I_{n,i}\mathrm{d}S'\right]\right\rangle \tag{20}$$

$\tau=t_i-R/C$ 表示时间延迟，作代换 $i\leftrightarrow j-i$，同时考虑到时间基函数 $T(0)=1$ 的特性可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_{j,m}^{M}&=\sum_{i=1}^{j}\sum_{n=1}^{N_s}I_{n,i}T_i(t)\left\langle \boldsymbol{f}_m,\frac{\boldsymbol{f}_n}{2}\right\rangle\\&=\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{n=1}^{N_s}I_{n,j-i}T_{j-i}(t)\left\langle \boldsymbol{f}_m,\frac{\boldsymbol{f}_n}{2}\right\rangle\\&=\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{n=1}^{N_s}I_{n,j-i}T(t_i)\left\langle \boldsymbol{f}_m,\frac{\boldsymbol{f}_n}{2}\right\rangle\\&=\sum_{n=1}^{N_s}I_{n,j}\left\langle \boldsymbol{f}_m,\frac{\boldsymbol{f}_n}{2}\right\rangle=\sum_{n=1}^{N_s}\boldsymbol{C}_{mn}I_{n,j}\end{aligned} \tag{21}$$

则式(21)与先前时刻的电流系数无关，只包含当前时刻的电流系数 $I_{n,j}$，也是待求解的未知量。将这种代换代入式(14)右边求和中，可得

$$\sum_{i=1}^{j}\boldsymbol{Z}_{j-i}^{E}I_i=\sum_{i=0}^{j-1}\boldsymbol{Z}_i^{E}I_{j-i}=I_j\boldsymbol{Z}_0^{E}+\sum_{i=1}^{j-1}\boldsymbol{Z}_i^{E}I_{j-i} \tag{22}$$

式(22)右边第 1 项包含当前电流系数(未知量)，第 2 项包含先前各时刻的电流系数，都为已知量。将式(22)代入式(14)，可得电场积分方程的 MOT 隐式形式：

$$\boldsymbol{Z}_0^{E}I_j=\boldsymbol{V}_j^{E}-\sum_{i=1}^{j-1}\boldsymbol{Z}_i^{E}I_{j-i} \tag{23}$$

同理，可得磁场积分方程的 MOT 隐式形式：

$$\left(\boldsymbol{C}_{mn}^{M}-\boldsymbol{Z}_0^{M}\right)I_j=\boldsymbol{V}_j^{M}+\sum_{i=1}^{j-1}\boldsymbol{Z}_i^{M}I_{j-i} \tag{24}$$

将式(23)，式(24)按照式(9)进行线性组合，即得混合场积分方程的 MOT 隐式形式：

$$\begin{aligned}&\left[(1-k)\boldsymbol{Z}_0^{E}+k\eta\left(\boldsymbol{C}_{mn}^{M}-\boldsymbol{Z}_0^{M}\right)\right]I_j\\&=(1-k)\left(\boldsymbol{V}_j^{E}-\sum_{i=1}^{j-1}\boldsymbol{Z}_i^{E}I_{j-i}\right)\\&\quad+k\eta\left(\boldsymbol{V}_j^{M}+\sum_{i=1}^{j-1}\boldsymbol{Z}_i^{M}I_{j-i}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

式(25)左边的系数矩阵是一个 $N_s\times N_s$ 稀疏矩阵，右边是一个 $N_s\times 1$ 向量，采用基于 Krylove 子空间法迭代求解电流系数 I_j。

式(25)中，对于奇异积分，采用围线积分求解；对于非奇异积分，内层积分采用 7 点 Guass 采样，外层积分在三角形质心采样，数值求解。

5 数值结果

设置入射场为 Gauss 平面波，其电磁场分量定义为

$$\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\frac{4}{\sqrt{\pi}\cdot T}e^{-\gamma^2} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\frac{4}{\sqrt{\pi}\cdot T}e^{-\gamma^2} \tag{27}$$

其中

$$\gamma=\frac{4}{T}\left(\mathrm{Ct}-\mathrm{Ct}_0-\boldsymbol{r}\bullet\hat{\boldsymbol{k}}\right) \tag{28}$$

波矢量 $\hat{\boldsymbol{k}}=-\hat{\boldsymbol{z}}$，$\boldsymbol{E}_0=\hat{\boldsymbol{x}}$，$T$ 是脉冲宽度，延迟时间 $\mathrm{Ct}_0=6\mathrm{lm}$ (light meter：光传播 1m 所用的时间)。

图 3 为三角形剖分后的立方体和圆柱模型，它们都为理想导体，中心在原点，其中立方体的边长为 1m，三角形总数为 192 个，未知数 288 个；圆柱的底面半径是 0.5m，高是 1m，三角形 136 个，未知数 204 个。图 4 是 $T=4\mathrm{lm}$ 时立方体顶面中心处电流的瞬态分布情况。由图可知，EFIE 在大约 70 lm 后出现震荡现象，MFIE 要比 EFIE 震荡晚一些，而 CFIE 一直保持稳定，没有出现后期不稳定现象。图 5 是 $T=6\mathrm{lm}$ 时立方体顶面中心处的电流分布，从图上可以看出，虽然 MFIE 仍然比 EFIE 晚震荡，但是总体上看，MFIE 和 EFIE 都比 $T=4\mathrm{lm}$ 时提前震荡，这主要是由于积分采样引起的误差积累和内部谐振共同作用的结果。从图 5 中还可以看到，CFIE 依然稳定。图 6，图 7 分别是 $T=4\mathrm{lm}$ 和 $T=6\mathrm{lm}$ 时圆柱顶面中心点处的电流分布，可以看到类似于图 4，图 5 的结果。图 8，图 9 分别是立方体和圆柱在 $T=4\mathrm{lm}$ 和 $T=6\mathrm{lm}$ 时的后向远区散射场分布，同时利用频域采样结果经过反转离散傅里叶变换(IDFT)进行对比，可以看到 CFIE 计算的后向远区散射场与 IDFT 的结果具有较好的一致性。

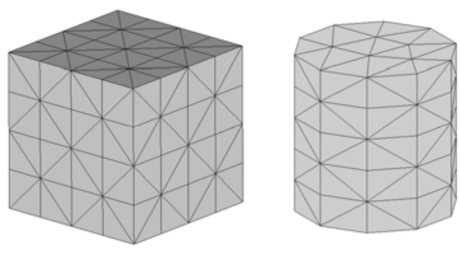

图 3 三角形剖分的立方体和圆柱模型

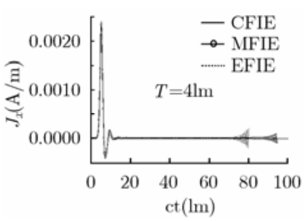

图 4 $T=4\mathrm{lm}$ 时立方体顶面中心处电流分布

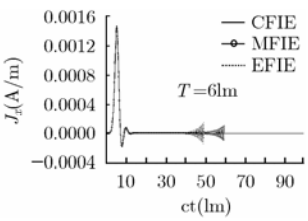

图 5 $T=6\mathrm{lm}$ 时立方体顶面中心处电流分布

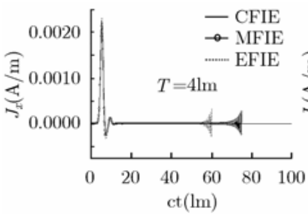

图 6 $T=4\mathrm{lm}$ 时圆柱体顶面中心处电流分布

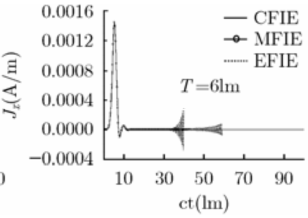

图 7 $T=6\mathrm{lm}$ 时圆柱体顶面中心处电流分布

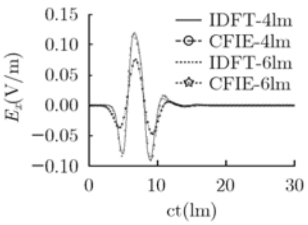

图 8　$T=4$lm 和 $T=6$lm 时立方体远场分布

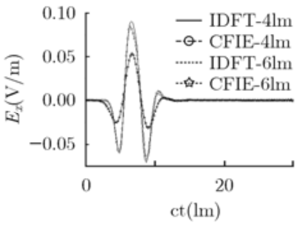

图 9　$T=4$lm 和 $T=6$lm 时圆柱体远场分布

6　结束语

由于目标内部谐振频点的影响，时域 EFIE 和 MFIE 在求解目标瞬态散射特性时，会出现后期震荡现象。但是通常 MFIE 要比 EFIE 的稳定性好，震荡会比 EFIE 向后延迟。按照本文提出的混合场的组合方式和 MOT 隐式迭代方案，改善了阻抗矩阵的条件数，使极点向单位圆靠拢，较好地克服了由于目标内部谐振带来的影响，得到稳定的表面电流分布。通过与频域采样 IDFT 的结果对比，后向散射场吻合较好，证明了这种时域混合场积分方程计算目标散射的精确性，为时域积分方程加速算法求解电大尺寸目标奠定了基础。对于复杂目标，只要精确剖分，并采用适当的时间步长，该混合场积分方程能够克服目标内部谐振，得到稳定的解。

参 考 文 献

[1] Rao S M. Time Domain Electromagnetics, San Diego, Academic Press, 1999: 1–9.

[2] Rao S M and Wilton D R. Transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1991, 39(1): 56–61.

[3] Rao S M and Sarkar T K. Transient analysis of electromagnetic scattering from wire structures utilizing an implicit time-domain integral equation technique. *Microw. Opt. Technol. Lett.*, 1998, 17(1): 66–69.

[4] Jung B H and Sarkar T K. Transient scattering from three-dimensional conducting bodies byusing magnetic field integral equation. *J. of Electromagn. Waves and Appl.*, 2002, 16(1): 111–128.

[5] Vechinski D A and Rao S M. A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1992, 40(6): 661–665.

[6] Sadigh A and Arvas E. Treating instabilities in marching-on-in-time method from a different perspective. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1993, 41(12): 1695–1702.

[7] Rynne B P and Smith P D. Stability of time marching algorithoms for the electric field integral equations. *J. Electromagn. Waves Appl.*, 1990, 12(4): 1181–1205.

[8] Davies P J. A stability analysis of a time marching scheme for the general surface electric field integral equation. *Appl. Numer. Math.*, 1998, 27(1): 35–57.

[9] Manara G, Monorchio A, and Reggiannini R. A space-time discretization criterion for a stable time-marching solution of the electric field integral equation. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 1997, 45(3): 527–532.

[10] Shanker B, Erigin A A, Aygun K, and Michielssen E. Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral equation. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2000, 48(7): 1064–1074.

[11] Jung B H and Sarkar T K. Time-domain CFIE for the analysis of transient scattering from arbitrarily shaped 3D conducting objects. *Microw. Opt. Technol. Lett.*, 2002, 34(4): 289–296.

[12] Widan R A, Pisharody G, Weile D, Shanker B, and Michielssen E. An accurate scheme for the solution of the time-domain integral equations of electromagnetics using higher order vector bases and bandlimited extrapolation. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 2004, 52(11): 2973–2983.

[13] Rao S M. Electromagnetic scattering and radiation of arbitrarily-shaped surfaces by triangular patch modeling. [PhD, Dissertation], Univ. Mississippi 1980(8).

任　猛：　男，1978 年生，博士生，从事计算电磁学、超宽带信号辐射散射理论与技术研究.

周东明：　男，1976 年生，博士生，从事计算电磁学、超宽带信号辐射散射理论与技术研究.

何建国：　男，1954 年生，教授，博士生导师，中国电子学会高级会员，出版专著 5 部，先后在国内外刊物发表论文 50 余篇，获各种科技进步奖 10 余项，研究领域超宽带技术和电磁兼容等.