

# 一种低复杂度的差分酉空时调制多符号球形译码算法

王欣 李颖 魏急波

(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘要:** 该文提出了一种瑞利衰落信道下差分酉空时调制系统中多符号差分球形译码的改进算法。该算法在执行球形译码的最大似然度量搜索时,仅对具有较小最大似然度量的部分测试符号进行搜索,从而大大减少了搜索的次数,同时提出了一种逐项进行的最大似然度量计算方法,可以尽早发现超过搜索范围的测试符号并终止计算,在避免无谓的运算负担的同时得到所需的具有较小最大似然度量的部分测试符号。仿真表明,在适中的信噪比范围内,该算法在牺牲少量系统性能的基础上降低了超过 50% 的运算量。

**关键词:** 多输入多输出(MIMO); 差分酉空时调制; 多符号球形译码

中图分类号: TN914

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)09-2199-04

## A Low Complexity Multiple-Symbol Differential Sphere Decoding for Differential Unitary Space-Time Modulation

Wang Xin Li Ying Wei Ji-bo

(School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** In this paper, an improved multiple-symbol differential sphere decoding for differential unitary space-time modulation is presented. According to this algorithm, the sphere decoding process only search the trial symbols with less Maximum Likelihood (ML) metrics rather than all the symbols in the constellation, and an “element-by-element” calculation method is also presented to compute the ML metric which facilitates an early detection of trial symbol with large ML metric. Simulations show that the presented algorithm can significantly reduce the computational complexity with nearly no performance degradation in moderate SNR range.

**Key words:** MIMO; Differential Unitary Space Time Modulation (DUSTM); Multiple-Symbol Differential Sphere Decoding (MSDSD)

### 1 引言

差分酉空时调制中的多符号差分检测(Multiple-Symbol Differential Detection, MSDD)的方法利用多个传输符号上的信息来进行联合检测,消除了衰落变化较快时传统的单符号差分检测(Conventional Differential Detection, CDD)带来的误码平台<sup>[1]</sup>。Lampe更进一步提出了多符号差分球形译码的方法(Multiple-Symbol Differential Sphere Decoding, MSDSD),它采用球形译码在多符号检测中进行最大似然搜索<sup>[2]</sup>,进一步降低了多符号差分检测的复杂度。在球形译码的具体实现中,Schnorr-Euchner排序是一种非常有效的方式,它不需要指定初始半径,并且可以快速收敛,但是它需要根据最大似然度量的大小对测试符号进行一次严格的排序来加速译码过程并且保证最大似然搜索的性能。直观的做法是计算所有测试符号对应的最大似然度量,然后进行排序,但是对于多天系统,这种度量计算方法将成为主要的运算负担。

通过对球形译码的搜索过程的研究可以发现,那些具有

较大的递增度量的测试符号只有很小的可能成为最大似然路径中的节点,如果将这些节点从搜索过程中剔除,将会大大降低系统的运算量与复杂度。本文将测试符号的度量搜索与排序看作一个单符号检测问题,利用单符号检测算法中新的研究成果来解决球形译码中的度量排序,提出了一种测试符号部分搜索与快速排序算法。该方法首先设定一个局部搜索范围(小于星座图大小),接着通过对测试符号的度量进行逐项(element-by-element)计算,可以尽早发现超出搜索范围的测试符号并终止计算,最后得到一个测试符号的部分排序,再对局部搜索范围内的测试符号进行搜索,这样做一方面减少了球形译码搜索的节点数,一方面减少了度量计算的运算量,因此大大降低了系统复杂度。

### 2 系统模型

#### 2.1 多符号差分球形译码的信号模型

考虑一个工作在时变衰落信道下、具有  $N_T$  个发射天线与  $N_R$  个接收天线的差分空时调制系统,  $N_T \times N_T$  维矩阵  $V[k]$  是星座集中的矩阵。对  $V[k]$  进行差分编码得到发送矩阵  $S[k]$  为

$$S[k] = V[k]S[k-1], \quad S[0] = I_{N_T} \quad (1)$$

假设衰落信道  $\mathbf{H}$  中的元素是空间不相关的, 具有相同的时间统计特性, 并且服从经典的 Clark 模型。我们进一步假设在一个发送符号时间内衰落系数保持不变(准静态假设), 那么对应于发送符号  $\mathbf{S}[k]$  的  $N_T \times N_R$  维接收信号矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}[k] = \mathbf{S}[k]\mathbf{H}[k] + \mathbf{N}[k] \quad (2)$$

其中噪声矩阵  $\mathbf{N}[k]$  中的元素是零均值复高斯随机变量。

假设多符号的观察窗长度为  $N$ , 那么根据文献[3]所描述的信号模型, 最大似然多符号差分检测可以表示为

$$\hat{\mathbf{S}} = \arg \min_{\mathbf{S}} \left\| \sum_{i=1}^N \left\| \sum_{j=i}^N \mathbf{S}_j^H \tilde{\mathbf{R}}_{i,j} \right\|^2 \right\|, \quad \tilde{\mathbf{R}}_{i,j} = \alpha_{i,j} \mathbf{R}_j \quad (3)$$

这里系数  $\alpha_{i,j}$  的具体定义见文献[3]。为简洁起见, 时间参考  $[k]$  都写成了下标的形式。

可以将式(3)中的最大似然度量写成  $N-1$  个非负标量求和的形式, 每个非负标量可以表示为

$$\delta_n^2 = \left\| \mathbf{V}_n \tilde{\mathbf{R}}_{n,n} + \mathbf{X}_n \right\|^2, \quad \mathbf{X}_n = \mathbf{S}_{n-1} \sum_{j=n+1}^N \mathbf{S}_j^H \tilde{\mathbf{R}}_{n,j} \quad (4)$$

这里,  $1 \leq n \leq N-1$ 。球形译码可以用来寻找一条总度量最小的路径, 本文使用经典的 Schnorr-Euchner(SE)方法对测试符号进行排序, 它按照  $\delta_n^2$  递增的顺序来搜索所有的测试符号以保证搜索过程的快速收敛。

## 2.2 搜索与排序问题

在球形译码中使用 SE 方法时, 为获得期望的排序, 可以首先计算出所有测试符号对应的最大似然度量, 然后将它们按升序排列, 本文把这种方法称为全搜索(Full Search, FS)方法。显然, 全搜索能保证最大似然检测的性能, 但是它的复杂度非常高。为导出本文所提出的算法, 首先把式(4)重写为

$$\delta_n^2 = \left\| \mathbf{V}_n \tilde{\mathbf{R}}_{n,n} + \mathbf{X}_n \right\|^2 = \left\| \mathbf{X}_n - \mathbf{V}_n \tilde{\mathbf{R}}_{n,n} \right\|^2 \quad (5)$$

这里  $\tilde{\mathbf{R}}_{n,n} = -\tilde{\mathbf{R}}_{n,n}$ , 从式(5)可以看出  $\delta_n^2$  的最小化问题等效为一个传统的单符号检测问题。只不过这里的检测不但要找到最大似然解, 还要输出一个测试符号  $\mathbf{V}_n$  的排序。第3节的内容将介绍如何利用单符号检测算法领域的研究成果来解决这一问题。

## 2.3 快速单符号检测算法

在单符号检测算法中, 为降低多天线系统最大似然译码的复杂度, Clarkson首先利用格基约减算法提出了基于对角星座的快速差分译码<sup>[4]</sup>, 通过执行一个  $N_T \times N_R$  维的搜索来找到格形中的最近点。而文献[5]中的研究成果把搜索的维数降低到  $N_T$  维, 最近Chen在文献[6]中提出的算法将搜索的维数进一步降到了一维。作为本文所提出算法导出的基础, 以下先对文献[6]中的单符号检测算法进行简要介绍。

为简单起见, 本文在文献[7]所提出的对角星座上进行讨论, 信号星座集包含  $L$  个对角矩阵, 表示为  $\mathbf{V}_l = \mathbf{A}^l$ ,  $l = 0, 1, \dots, L-1$ 。设  $N_R = 1$ ,  $\mathbf{Y}_\tau$  是  $\tau$  时刻的接收向量。根

据文献[6], 最大似然检测转化为一个最小欧氏距离问题, 并且在对角星座假设下对它进行一次 cosine 近似, 那么检测问题  $\hat{l}_\tau = \arg \min_l \left\| \mathbf{Y}_\tau - \mathbf{V}_l \mathbf{Y}_{\tau-1} \right\|^2$  可以转化为一个求格形最近点问题:  $\arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{Z}^{1 \times N_T}} \left\| \mathbf{y} \mathbf{G} - \boldsymbol{\xi} \right\|^2$ 。这里  $\mathbf{y}$  和  $\boldsymbol{\xi}$  都是  $1 \times N_T$  的向量,  $\mathbf{G}$  是一个  $N_T \times N_T$  的矩阵, 其定义见文献[6], 在这里我们直接引用文献[6]中定理3所证明的结论, 检测结果  $\hat{l} \in \{0, 1, \dots, L-1\}$  满足:  $\hat{l} = \arg \min_l \left\| \mathbf{Y}_\tau - \mathbf{V}_l \mathbf{Y}_{\tau-1} \right\|^2 = \hat{y}_1 - \lfloor \hat{y}_1 / L \rfloor L$ , 这里  $\hat{y}_1$  是向量  $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{N_T}]$  的第一个元素, 并且其他的元素  $y_m$ ,  $m = 2, \dots, N_T$  可以由  $y_1$  完全确定。那么  $y$  所对应的最大似然度量就可以逐项(element-by-element)的计算出来

$$\mu_1 = [C_1(y_1 - \varphi_1)]^2$$

$$\mu_m = \mu_{m-1} + [C_m(Ly_m + \lambda_m y_1 - \varphi_m)]^2, \quad m = 2, \dots, N_T \quad (6)$$

$\mu_{N_T}$  是当前测试值  $y_1$  对应的总度量, 在  $\hat{l}$  的候选集中执行一次一维的搜索就可以得到单符号检测的结果。

$C_m, \varphi_m, m = 1, \dots, N_T$  是和接收矩阵有关的系数, 具体定义及定理证明见文献[6]定理3。

## 3 部分搜索与改进的度量计算

### 3.1 算法描述

在 MSDSD 算法的应用中, 使用全搜索(Full Search, FS)的方法将带来巨大的运算量, 并且, 在球形译码搜索中, 很多具有较大度量值的节点只有很小的概率成为最大似然路径上的节点, 对它们进行度量计算将消耗大量的处理时间。本文的核心思想就是控制每个节点上所检查的测试符号的数量, 也就是说, 只对那些具有较小度量值的节点进行部分搜索(Partial Search, PS), 那么整个算法的复杂度将会大大降低。

令  $P$  等于部分搜索的测试符号数,  $P \leq L$ , 我们期望得到测试符号的排序  $\Psi = \{\mathbf{V}(p) \mid p = 1, 2, \dots, P\}$ , 其中测试符号度量满足  $\delta_{n,1}^2 \leq \delta_{n,2}^2 \leq \dots \leq \delta_{n,P}^2$ , 这里

$$\delta_{n,p}^2 = \left\| \mathbf{V}(p) \tilde{\mathbf{R}}_{n,n} + \mathbf{X}_n \right\|^2 \quad (7)$$

按照式(5)的表述, 最小化问题等效于一个传统的单符号差分检测。使用2.3小节所描述的单符号检测算法, 使用  $\mu_{N_T}$  作为测试符号的总度量, 对所有可能的  $l$  值进行测试。与单符号检测不同, 我们的目的不单是找到具有最小度量的测试符号, 而且还希望得到一个测试符号所对应的度量的排序, 并选择其中具有较小度量的  $P$  个测试符号作为部分搜索的输出。

### 3.2 快速排序策略

注意到式(6)中的度量是逐维计算并累加的, 因此可以利用它来获得一个快速的部分排序。首先从选取  $[1, L]$  中任意一个整数作为  $y_1$  的测试值的起点开始测试, 保存一个队列  $Q$  包含前  $P$  个测试值对应的总度量  $\mu_{N_T}$ , 将它们按升序排列。对于后续的测试值, 可以将  $\mu_m$ ,  $m = 1, \dots, N_T$  与队列  $Q$  中的最大的度量值进行比较, 如果某一个  $\mu_m > \max\{Q\}$ , 那么就

终止对当前测试值度量的计算,继而检查下一个测试值;如果一直计算到  $\mu_{N_T} < \max\{Q\}$ ,那么就执行一个“插入并删除”操作将当前测试值和它的度量加入到队列  $Q$  中并删除最大值,从而保持队列长度不变。如果所有的测试值都已经检查过,那么算法就输出一个测试符号的向量  $[l_1, l_2, \dots, l_P]$ , 和队列  $Q$  中的度量值一一对应。

本文将快速排序算法总结如下:

步骤 1 从  $y_1 = 1$  到  $P$ , 计算对应的  $P$  个度量值,将它们按升序排列得到一个队列  $Q$ , 同时记下所对应的测试值;

步骤 2 如果  $y_1 \leq L$ ,  $y_1 = y_1 + 1$ , 逐维计算当前测试值对应的  $\mu_m$ ,  $m = 1, \dots, N_T$ 。如果  $y_1 > L$ , 终止程序并且输出测试值的记录;

步骤 3 检查条件  $\mu_m < \max\{Q\}$ , 如果不满足, 跳转到步骤 2;

步骤 4 如果  $m = N_T$ , 执行“插入并删除”操作, 更新队列  $Q$  和测试值的记录, 跳转到步骤 2。

可以看出, 这种逐项进行的最大似然度量计算方式提供了一种具有较大度量测试点的早期发现机制, 从而有效地减少了运算负担。

### 3.3 非对角星座的扩展应用

为避免对角星座对发送端放大器的不利影响和提高码字的信息速率, 文献[6]中提出了一种非对角的酉星座, 它以对角星座为核来构建, 一方面避免了对角星座的不利影响, 另一方面又可以利用对角星座译码的快速算法。文献[6]中的仿真已经表明这种新型的星座形式, 其性能优于正交码以及其它的几种空时码。简要描述如下, 定义

$$\mathbf{A}_q = \text{diag} \left[ \exp \left( \frac{j2\pi\lambda_{q,1}}{L} \right), \dots, \exp \left( \frac{j2\pi\lambda_{q,N_T}}{L} \right) \right]$$

这里  $\lambda_{q,1} = 1$ , 并且  $\lambda_{q,m} \in [0, L)$ ,  $m = 2, \dots, M$  是实数。令  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{A}_q, \mathbf{B}_q$ ,  $q = 1, \dots, 2^b - 1$  是酉矩阵。那么星座图可以定义为:  $\mathbf{V} = \{ \mathbf{A}_q \mathbf{A}_q^H \mathbf{B}_q \mid l = 0, 1, \dots, L-1; q = 0, 1, \dots, 2^b - 1 \}$ 。

如果将星座图  $\mathbf{V}$  应用于差分酉空时调制系统, 那么对对角星座的快速检测算法稍加修改就可以应用于非对角星座, 利用酉变换不改变矩阵的 Frobenius 范数的特性, 可以得到:

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \|\mathbf{X}_n - \mathbf{V}_n \hat{\mathbf{R}}_{n,n}\| = \|\mathbf{X}_n - \mathbf{A}_q \mathbf{A}_q^H \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{R}}_{n,n}\| \\ &= \|\mathbf{A}_q^H (\mathbf{X}_n - \mathbf{A}_q \mathbf{A}_q^H \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{R}}_{n,n})\| = \|\mathbf{A}_q^H \mathbf{X}_n - \mathbf{A}_q^H \mathbf{B}_q \hat{\mathbf{R}}_{n,n}\| \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{A}_q^H$  为对角阵, 因此仍然可以用 3.2 小节的算法来进行度量计算与排序, 算法实现时, 可以在不同的  $q$  值下分别检查测试符号的子集, 在每个子集中得到一个长度为  $P$  的队列  $Q_q$ , 执行一个并行的选择可以得到期望的长度为  $P$  的队列  $Q$ , 其中的元素可能来自不同的  $q$  所对应的子集中。

### 3.4 精确的部分搜索

需要指出的是, 该方法的度量计算是在 cosine 近似下进行的, 它得到的度量并不精确等于式(5)的结果, 因此本文方

法得到的排序可能和全搜索方法有所不同。为补偿这一近似的效果, 可以使用前述的部分搜索算法先得到一个两倍于期望搜索范围  $P$  的输出序列  $Q'$ , 再利用式(5)重新计算  $Q'$  中测试符号的精确度量, 然后再重新进行一次排序并取前  $P$  个测试符号就可以得到一个比较精确的排序  $Q$ , 该思想与文献[5]中所使用的扩张的差分格形译码算法类似, 都通过度量回代消除格形译码中 cosine 近似对系统性能的影响。以下把这种方法称为精确的部分搜索算法(exact Partial Search, exact PS), 该算法可以进一步保证搜索顺序的正确性, 但是也增加了额外的计算负担, 可以根据系统的计算裕量来选择合适的算法。

## 4 仿真结果

### 4.1 误符号率仿真

仿真中使用一种简单的非对角星座, 设发送矩阵为  $\mathbf{V}_1 \mapsto \mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U} = [1 \ 1; -1 \ 1] / \sqrt{2}$  为酉矩阵。它是  $\mathbf{V}$  在  $\mathbf{A}_q = \mathbf{U}^H, \mathbf{B}_q = \mathbf{U}, \mathbf{A}_q = \mathbf{A}$  时的特例。选择  $N_T = 2, N_R = 1, R = 2, L = 16$ , 并且根据文献[7]选择  $\lambda = [1 \ 7]$ 。所有算法都使用长度为 4 的观察窗。对衰落带宽  $B_f T = 0.03$  时的仿真结果如图 1 所示。图中给出了全搜索(搜索范围为 16)、范围为 6 的部分搜索、范围为 3 的部分搜索以及范围为 3 的精确部分搜索的误符号率性能曲线。为对照起见, 也给出了 CDD 的误符号率。

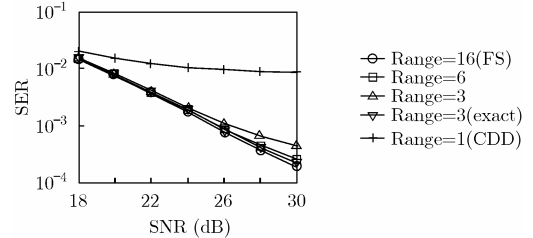


图 1 不同搜索范围的 MSDSD 算法误符号率性能

可以看到, 在  $B_f T = 0.03$ , 单符号检测呈现出一个很高的误码平台。在信噪比小于 22dB 时, 多个方案的多符号差分检测之间并没有明显的性能差别, 对于适中的信噪比范围(22dB~30dB), 全搜索、范围为 6 的部分搜索以及范围为 3 的精确搜索之间性能差别已经很小。

图 2 给出了不同信噪比下搜索范围和误符号率之间的关系。可以看出在每一个信噪比值下, 存在一个搜索范围的下界, 当搜索范围超过这个下界的时候, 性能曲线已经趋于不变。对于增长的信噪比, 这个下界也在缓慢增长。因此, 对于中等的信噪比, 过度扩大搜索范围是没有必要的, 在误符号率容许的条件下可以选择适当的搜索范围以减少运算量。

### 4.2 复杂度分析

这里将讨论本文所提出的部分搜索算法和全搜索算法在一个观察窗内解调所需的运算量。从图 3 中可以看出, 随着信噪比的增长, 所有算法的复杂度迅速降低至一个较低的水平, 当信噪比大于 25dB 时, 复杂度几乎与信噪比无关。

另外, 范围等于 3 的精确搜索在信噪比小于 17dB 的时候其运算量小于范围等于 6 的部分搜索(注意这个范围内它们的性能是没有差别的), 这是因为在较低的信噪比范围内, 复杂度主要由搜索范围决定, 较小的搜索节点数具有较小的运算复杂度。对较高的信噪比来说, 部分排序的结果已经相当精确, 并且各种算法都只需要少量的测试符号, 因此, 精确搜索中对度量的重新计算变得多余, 所以它和部分搜索之间呈现一个固定的运算量差别, 而由于在很小的噪声下, 球形译码会迅速找到最大似然解, 因此不同范围的部分搜索算法其运算量在高信噪比下最终呈现出微小的差别。

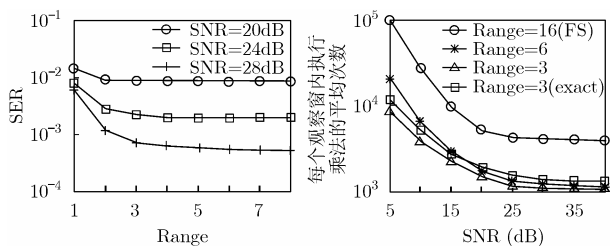


图 2 不同信噪比下不同搜索范围的算法性能比较

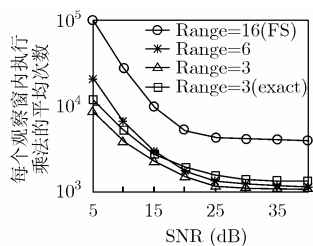


图 3 不同检测方法的复杂度

## 5 结束语

本文提出了一种应用于多符号差分球形译码的改进的度量计算与排序方法。通过使用部分搜索的策略, 多符号球形译码的复杂度大大降低, 仿真表明, 在大多数通信系统工作的信噪比范围内, 所提出的部分搜索算法几乎没有性能损失。通过调整系统的搜索范围, 可以对复杂度和性能进行权衡以确定系统的工作参数。本文的工作还表明, 使用对角星座为核来构成的非对角星座潜在地继承了对角星座的几何结构, 可以用来开发快速译码算法。

## 参考文献

- [1] Bhukania B and Schniter P. Multiple-symbol detection of differential unitary space-time modulation in fast-fading channels with known correlation. [http://www.ece.osu.edu/~schniter/postscript/ciss02\\_dust.pdf](http://www.ece.osu.edu/~schniter/postscript/ciss02_dust.pdf), 2002 Mar.
- [2] Lampe L, Schuber R, Pauli V, and Windpassinger C. Multiple-symbol differential sphere decoding. *IEEE Trans. on Commun.*, 2005, 53(12): 1981-1985.
- [3] Pauli V and Lampe L. Multiple-symbol differential sphere decoding for unitary space-time modulation. in *IEEE GLOBECOM*, MO. USA, 2005: 1630-1635.
- [4] Clarkson K L, Sweldens W, and Zheng A. Fast multiple-antenna differential decoding. *IEEE Trans. on Commun.*, 2001, 49(2): 253-261.
- [5] Ling C, Mow W H, Li K H, and Kot A C. Multiple-antenna differential lattice decoding. *IEEE J.Select.Areas Commun.*, 2005, 23(9): 1821-1829.
- [6] Chen X, Zhou K, and Aravena J L. A new family of unitary space-time codes with a fast parallel sphere decoder algorithm. *IEEE Trans. on Info Theory*, 2006, 52(1): 115-140.
- [7] Hochwald B M and Sweldens W. Differential unitary space-time modulation. *IEEE Trans. on Commun.*, 2000, 48(12): 2041-2052.

王欣: 男, 1980年生, 博士生, 研究方向为多天线通信系统的编码与检测问题、MIMO-OFDM等。

李颖: 女, 1978年生, 博士生, 研究方向为多天线通信系统的编码与检测问题等。

魏急波: 男, 1967年生, 博士生导师, 教授, 目前研究方向为通信信号处理与通信网络。