

一种未知信源数的高分辨 DOA 估计算法

张涛麟 刘颖 廖桂生

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

摘要: 众多性能优良的超分辨波达方向(DOA)估计算法通常需要预先判定信源数目,然而,现有的信源数估计算法在有限采样快拍条件下,估计性能随着信噪比的降低而下降,错误概率也相应增加,最终导致 DOA 估计失败。该文提出一种超分辨的 DOA 估计算法,此算法不需要预判信源个数和进行特征值分解,同时在时变环境中,针对快拍数较少的情况下,依然保持较高的角度分辨能力,可以被认为是综合了 Capon 法和 MUSIC 法的优点。通过对实验数据和实测数据的计算机仿真及性能分析可得,与传统算法相比较,该算法有很好的鲁棒性和可行性。

关键词: 超分辨; 波达方向估计; 信源数估计; 特征值分解

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)02-0375-04

Algorithm on High Resolution DOA Estimation without Sources Number

Zhang Tao-lin Liu Ying Liao Gui-sheng

(Key Lab for Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Many of the super resolution DOA(Direction-Of-Arrival) estimation algorithms presume the number of signal sources. Since the sample snapshot is limited, however, the available algorithms on source number estimation may fail at lower SNR. In this paper, a novel algorithm for high resolution DOA estimation is proposed, which not only skips sources number estimation and EVD, but also behaves satisfactorily with a few snapshot, it may be viewed as a combination of merit of conventional Capon and MUSIC method. The algorithm's feasibility and robustness are analyzed and verified by the simulation and actual experiment data.

Key words: Super resolution; DOA estimation; Sources number estimation; EVD

1 引言

超分辨 DOA^[1]估计是阵列信号处理的重要内容之一,已被广泛应用于雷达、声纳、通信、医学、声学等众多领域,并已成为阵列雷达无源探测和智能天线空分多址(SDMA)等热点技术领域中的关键技术。因此,研究基于阵列天线的高精度、高分辨力和实用性的 DOA 估计算法具有重要的理论意义和实用价值。

超分辨 DOA 估计中,信源数目的判定是一个重要问题,众多性能优良的高分辨 DOA 估计算法,如 MUSIC 算法^[2, 3]、ESPRIT 算法^[4]和加权子空间拟合算法^[5](Weighted Subspace Fitting, WSF),大都是以判定信源数为前提,一般做法是先估计信源数,通过特征值分解,再进行 DOA 估计。在信源数估计算法中,信息论准则(AIC)和最小描述长度准则(MDL)^[6]是较有效的,然而由于实际应用中采样点个数的限制,其估计性能随着信噪比的降低而降低,错误概率相应增加,最终导致 DOA 估计方法失效。传统的利用 Capon 法进行 DOA 估计虽然不需要预知信源个数,但是受到瑞利限^[7]的制约,无法分辨一个波束宽度内的两个信号。

本文提出一种超分辨的 DOA 估计算法,此算法不需要预先判定信源个数和特征值分解,同时在快拍数较少的情况下,依然保持较高的角度分辨能力,本文称之为 *m*-Capon。全文结构如下:第 2 节介绍信号模型并分析 Capon、MUSIC 特点,第 3 节介绍本文方法,第 4 节给出仿真结果,并与 Capon 法、MUSIC 法进行比较,第 5 节是结束语。

2 信号模型和算法分析

2.1 信号模型

假设有 *M* 个窄带信号入射到 *N* 元阵列上 $M < N$,则阵列接收的信号为

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^M \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中 $s_k(t)$, $k = 1, \dots, M$ 是信号包络, $\mathbf{a}(\theta_k)$ 是阵列的导向矢量, $\mathbf{n}(t)$ 为 $N \times 1$ 的加性噪声矢量。

假定信源之间,信源与噪声之间都是统计独立的,输入信号的相关矩阵可以表示为

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^M \sigma_k^2 \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) + \mathbf{R}_n \quad (2)$$

在这里, $\sigma_k^2 = E\{[s_k(t)]^2\}$, $k = 1, \dots, M$ 为信号功率。 \mathbf{R}_n 为系统噪声的相关矩阵。

对 \mathbf{R} 进行特征值分解可以得到

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma_n^2 \sum_{i=M+1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (3)$$

其中 v_1, v_2, \dots, v_M 张成信号子空间 \mathbf{S}_N^M , $v_{M+1}, v_{M+2}, \dots, v_N$ 张成噪声子空间 \mathbf{N}_N^{N-M} , $\lambda_i, i = 1, \dots, M$ 为 M 个大特征值, σ_n^2 为白噪声功率。

实际中数据相关矩阵是通过 L 次的快拍数据估计得到的, 即

$$\widehat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^H \quad (4)$$

2.2 Capon 算法

基于最小方差技术, Capon 法的空间谱函数为

$$P_{\text{Capon}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (5)$$

与谱峰对应得所有 θ 即为波达方向的估计:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \{P_{\text{Capon}}(\theta)\} = \arg \min_{\theta} \{\mathbf{a}^H(\theta) \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)\} \quad (6)$$

当噪声仅为高斯白噪声, 对任意 θ , $P_{\text{Capon}}(\theta)$ 都是来自方向 θ 的信号功率的最大似然估计, 其空间谱正比于该方向的信号功率, 但受到阵列孔径的限制, 角度分辨率较低, 此算法的优点在于不需要先验已知或估计信源数目, 其采样数据长度的门限比较低。

2.3 MUSIC 算法

基于子空间投影的方法, MUSIC 法的空间谱函数为

$$P_{\text{MUSIC}} = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{P}_N \mathbf{a}(\theta)} \quad (7)$$

其中 \mathbf{P}_N 为噪声子空间对应的投影矩阵,

$$\mathbf{P}_N = \sum_{i=M+1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (8)$$

与“谱峰”对应得所有 θ 即为估计的波达方向:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \{P_{\text{MUSIC}}(\theta)\} = \arg \min_{\theta} \{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{P}_N \mathbf{a}(\theta)\} \quad (9)$$

显然, P_{MUSIC} 并不是任何意义下的真实谱, 严格的说, 它只是信号导向向量与噪声子空间之间的“距离”。尽管如此, 它却能在真实波达方向的附近出现“谱峰”, 可以超分辨地估计各个信号的波达方向。但是, 由于实际相关矩阵是通过有限快拍数据估计得到的, 快拍的个数很大程度上影响 MUSIC 方法 DOA 估计的性能, 而且, 此方法必须预先判定信源数目和对相关矩阵进行特征值分解。

3 m -Capon 算法

由上面的分析可以看到, Capon 方法直接利用相关矩阵进行 DOA 估计, 不需要预先信源个数, 但是该方法受到瑞利限制的制约, 角分辨能力较差。MUSIC 方法虽然具有超分辨性能, 但是需要估计信源数目和对相关矩阵的特征值分解, 而且对快拍数量的要求远远超过 Capon 算法, 这往往都是限制其实际应用的主要因素。如果能够结合两种方法的优

点, 自然会得到一种更有效的 DOA 估计方法。 m -Capon 算法就是基于这种思想得出的, 它是一种新的超分辨 DOA 估计算法。

将式(3)的阵列相关矩阵用矩阵的形式表示为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_s & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \quad (10)$$

其中 $\mathbf{U}_s = [v_1, v_2, \dots, v_M]$, $\mathbf{U}_n = [v_{M+1}, v_{M+2}, \dots, v_N]$ 分别为信号子空间与噪声子空间矩阵, $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$ 为由大特征值构成的对角矩阵。

进一步推导, 可以得到:

$$\sigma_n^{2m} \mathbf{R}^{-m} = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H + \mathbf{U}_s \text{diag} \left\{ \left(\frac{\sigma_n^2}{\lambda_i} \right)^m \right\} \mathbf{U}_s^H \quad (11)$$

其中 m 为任意整数, 很显然, 因为 σ_n^2 / λ_i^2 是小于 1 的数, 所以当 m 趋近于无穷大的时候, 式(11)趋近于噪声子空间, 即有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_n^{2m} \mathbf{R}^{-m} = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \quad (12)$$

这样就不用对相关矩阵进行特征值分解也不需要先验已知信源数目就可以得到噪声子空间, 式(12)表明当 $m \rightarrow \infty$ 时才收敛到噪声子空间, 实际应用时 m 只要取有限的整数就可以得到很好的性能, 这在仿真实验也得到了证实。

于是, 本文 DOA 估计的优化方程为

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg \max_{\theta} \left\{ \prod_{i=1}^m \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \right\} \\ &= \arg \max_{\theta} \left\{ \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \widehat{\mathbf{R}}^{-m} \mathbf{a}(\theta)} \right\} \\ &= \arg \min_{\theta} \left\{ \mathbf{a}^H(\theta) \widehat{\mathbf{R}}^{-m} \mathbf{a}(\theta) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

其物理意义相当于利用 m 个 Capon 估计器级联克服单个 Capon 估计器受瑞利限制的制约, 提高角度分辨力, 当 $m=1$ 时, 算法即是利用 Capon 谱峰搜索波达方向; 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 结合式(12), 相当于借助 MUSIC 谱峰进行 DOA 估计。由于 MUSIC 的“谱峰”分辨率远高于 Capon 谱, 理论上, 随着 m 的增加, 其角度分辨率趋近于 MUSIC。若直接利用噪声子空间的方法, 需要预先估计信源个数, 而且独立同分布的快拍数据要足够多, 对于多变的干扰环境, 这将成为算法在实际应用中的一个瓶颈, 而且带来的计算复杂度也会提高。然而, m -Capon 算法不但秉承了 Capon 算法不需要预先信源数, 对快拍数的要求比较低的优点, 同时也集成了 MUSIC 算法高分辨的特点。理论上, m 取值越大, DOA 估计性能越好, 然而, 在实际应用中由于信号协方差矩阵 \mathbf{R} 是通过有限次快拍数据估计得到的, 使得 $N-M$ 个小特征值并不相等, 当 m 取值很大时, 代入式(11)后, 特征值不相等的噪声分量会被误认为是信号分量, 导致最终得到的噪声子空间被缩小, 影响 DOA 估计性能。从下面的仿真实验及实测数据可以看出, 对于输入信噪比不是很低的情况下, 随着 m 取值的

增加 DOA 估计的分辨率越来越高，但改善的速度随 m 的增加逐渐趋于平缓。

4 仿真结果

4.1 计算机仿真

为了验证本文提出的 m -Capon 算法的优越性能，并与 MUSIC 算法、Capon 算法相比较，本节给出了计算机仿真说明所提算法的有效性和可行性。此算法适用于线阵、面阵、立体阵，不失一般性，本节仿真中的阵列配置为各向同性阵元组成的半波长均匀线阵，阵元数 $N = 13$ ，以阵列所在直线为坐标轴，来自不同方向的远场窄带信号互不相关，而且信号与加性噪声不相关。加性噪声为高斯白噪声；信噪比定义为 $SNR = 10 \lg \left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \right)$ ， σ_s^2 为信号功率， σ_n^2 为噪声功率。

DOA 估计偏差定义为 $\frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} (\hat{\theta}_j - \theta)$ ，标准差定义为 $\sqrt{\frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} (\hat{\theta}_j - \theta)^2}$ ，其中 J 为蒙特卡罗试验次数， θ 为真实值， $\hat{\theta}$ 为估计值。

(1) 随快拍数变化情况 考虑 DOA 估计性能随快拍数变化情况，信号方向为 $\theta = 100^\circ$ ，信噪比 10dB，200 次蒙特卡罗试验分析。

从图 1 可以看出，在快拍数小于 350 时，MUSIC 算法的 DOA 估计性能较差，无法准确估计信号方向，而本文方法和 Capon 法，在快拍数仅为 50 时就已经可以准确实现 DOA 估计，而且随着 m 的增加，其 DOA 估计性能随快拍数变化不大，在 $m=2$ 时，算法基本可以实现低快拍数条件下的准确 DOA 估计。

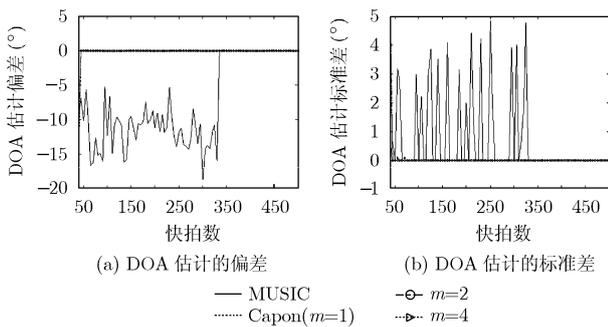


图 1 不同快拍数情况下，3 种 DOA 估计算法对 100° 方向入射目标的方位估计性能曲线

(2) 随输入信噪比变化情况 考虑 DOA 估计性能随输入信噪比变化情况，信号方向为 $\theta = 100^\circ$ ，快拍数为 200，200 次蒙特卡罗试验分析。

图 2 是在不同输入信噪比条件下，3 种 DOA 估计算法对 100° 方向入射信号 DOA 估计的性能曲线。从图中可以看出，对于 200 点的采样数据长度，Capon 算法和本文算法的输入信噪比门限基本在 -15dB，而 MUSIC 算法在快拍数比

较少的情况下，由于无法正确分解出信号子空间和噪声子空间，使得算法基本失效。

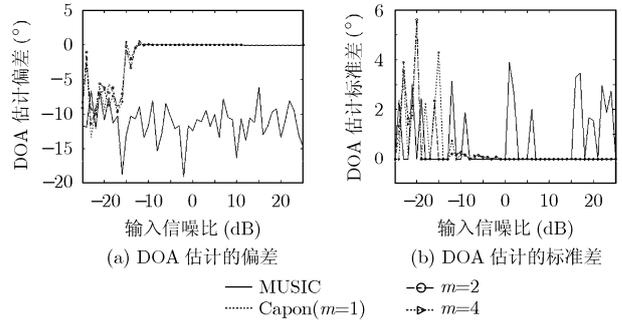


图 2 不同输入信噪比情况下，3 种 DOA 估计算法对 100° 方向入射目标的方位估计性能曲线

(3) 随相邻信号角度间距变化情况 考虑 DOA 估计随相邻信号角度间距变化情况，存在两个非相干信号，其入射角度分别为 $\theta_1 = 56^\circ$ ， $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$ 其中 $\Delta\theta \in [-10^\circ, 10^\circ]$ ，信噪比分别是 30dB 和 10dB，快拍数为 200，200 次蒙特卡罗试验分析。

从图 3 可以看出，Capon 算法在信号角度间隔 $|\Delta\theta| \leq 6^\circ$ 时，由于受到瑞利限的制约，无法分辨一个波束宽度内的两个目标，而本文算法，其角度分辨率明显突破瑞利限的制约，角度分辨率得到明显改善，从图中可以看出，本文算法在 $m = 3$ 和 $m = 4$ 时，性能曲线基本重合，而高分辨的 MUSIC 算法虽然不受瑞利限的限制，但由于快拍数据较少，不能准确分解出信号子空间，致使无法进行角度分辨。

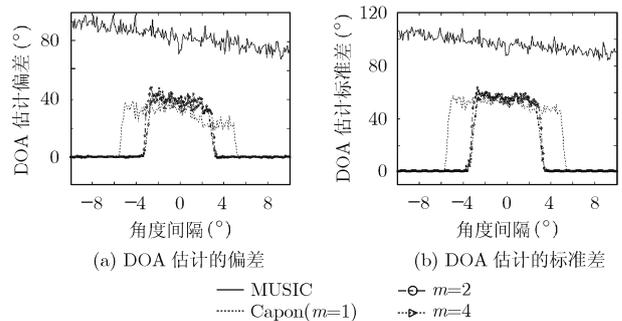


图 3 相邻信号不同角度间隔情况下，3 种 DOA 估计算法两个入射信号的方位估计性能曲线

(4) 分辨率随 m 取值的变化情况 前面的分析中已经指出，本文提出的 m -Capon 算法不但秉承了 Capon 算法不需要预判信源数，对快拍数的要求比较低的优点，同时也集成了 MUSIC 算法高分辨的特点。所以理论上， m 取值越大，DOA 估计性能越好，角度分辨率越高。但是其性能的提高也不是随 m 取值的增大而无限限制的增加的，当 m 取值增大到一定程度其性能接近理论最优，即接近 MUSIC 算法所能达到的分辨率。图 4 给出了本文提出的 m -Capon 算法的角

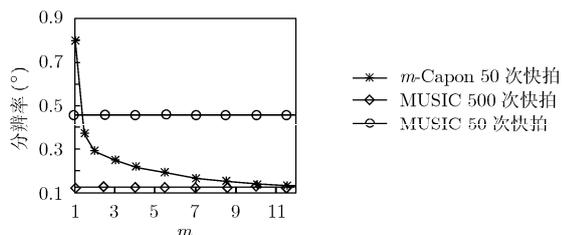


图4 m -Capon 法的估计性能随 m 取值的变化曲线

度分辨率随 m 取值的变化曲线, 从图中可以看出, 当 m 增大到一定程度时, 其性能的改善曲线趋于平缓, 接近 MUSIC 算法的分辨率。图中 m -Capon 法的仿真利用了 50 次快拍, 而 MUSIC 算法的仿真分别利用了 500 次快拍和 50 次快拍, 当快拍数较少时 MUSIC 算法的分辨率明显下降, 根本达不到“超分辨”的效果, 而本文提出的 m -Capon 算法在 m 取 1.5~4 时, 其分辨率已远远超过了少快拍数时的 MUSIC 方法的分辨率, 而且其运算复杂度也不是很大; 当 m 取值继续增大时, 例如取 10 时, 其性能基本接近理论最优分辨率, 当然这时的运算代价也比较大。

4.2 实测数据结果

下面利用某研究所提供的实测数据来验证本方法的有效性。两组数据来源于半径为 1.29m 的均匀圆阵, 该圆阵由 8 个全向天线构成, 系统工作频率 258.25MHz, 信号入射方向与阵列共面, 各信号互不相关, 取 $m=2$ 进行 DOA 估计, 如图 5, 图 6 所示。

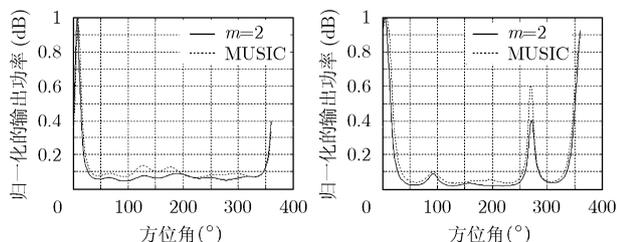


图5 单个信号 DOA 估计

图6 3个信号的 DOA 估计

在虚警概率门限以上, 通过峰值搜索的方法可以判定数据 1 的信号方向为 7° , 数据 2 的信号方向分别是 $5^\circ, 90^\circ, 270^\circ$, 经核实, 估计方向与实际信号方向一致。可以看出,

本文方法在 m 取值比较小时依然可以准确估计信号方向。

5 结束语

本文针对时变环境及非均匀环境下独立同分布的样本数目有限的问题, 提出一种超分辨的 DOA 估计算法, 此算法不需要预判信源个数和进行特征值分解, 同时在快拍数较少的情况下, 依然保持较高的角度分辨能力, 可以说是结合了 Capon 算法和 MUSIC 算法的优点。通过大量计算机仿真实验及实测数据性能分析可得, 与传统算法相比较, 该算法有很好的实用性和可行性。

参考文献

- [1] Van Trees Harry L. Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory. New York: Wiley, 2002: 1139-1285.
- [2] Barabell A J. Improving the resolution of eigenstructured based direction finding algorithms. Proc. ICASSP, Boston, MA, 1983: 336-339.
- [3] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. on AP*, 1986, 34(3): 243-258.
- [4] Roy R and Kailath T. ESPRIT—Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, 38(7): 984-995.
- [5] Viberg M, Ottersten B, and Kailath T. Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting. *IEEE Trans. on SP*, 1991, 39(11): 2436-2449.
- [6] Wax M and Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Trans. on ASSP*, 1985, 33(2): 387-392.
- [7] Wax M and Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Trans. on ASSP*, 1985, 33(2): 387-392.

张涛麟: 男, 1982 年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理。

刘颖: 女, 1982 年生, 博士生, 从事阵列信号处理及其在雷达信号处理中的应用。

廖桂生: 男, 1963 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事阵列信号处理、空时二维处理、统计信号处理、子波变换和神经网络及其在雷达、通信中的应用。