多进制相移键控信号的谱相关特性分析

张 炜　　杨 虎　　张尔扬
(国防科学技术大学电子科学与工程学院　长沙　410073)

摘　要：该文着重对于多进制频移键控(MPSK)信号的谱相关特性进行了分析，并改写了 MPSK 信号表达式，由此得到 BPSK,QPSK,8PSK,16PSK 信号的谱相关密度函数；应用谱相关函数的工程计算公式，对这 4 种信号的谱相关特性进行了仿真，验证了得到的谱相关密度函数的正确性。

关键词：循环谱密度；多进制频移键控；谱相关

中图分类号：TN911　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2008)02-0392-05

Spectral Correlation Analysis of MPSK Signals

Zhang Wei　　Yang Hu　　Zhang Er-yang
(*Electronics Science and Engineering College*, *National University of Defense Technique*, *Changsha* 410073, *China*)

Abstract: This paper put great emphasis on spectral correlation of MPSK signals. The cyclic spectrum density function of BPSK, QPSK, 8PSK, 16PSK signals based on a new MPSK signal expression is proposed; Extensive computer simulation of four signals based on engineering calculation formula of the spectral correlation function show the accuracy of cyclic spectrum density function.

Key words: Cyclic spectrum density; MPSK; Spectral correlation

1　引言

通信信号常用待传输信号为周期性信号的某个参数进行调制，如对正弦载波进行调幅、调频和调相，以及对周期性脉冲信号进行脉冲幅度、脉冲宽度和脉冲相位调制，都会产生具有周期平稳性的信号；信号的编码和多路转换也都具有周期平稳性。一个信号反映在二阶统计量(时变的相关函数或功率谱)上的周期性可以解释为该信号通过一个(二次的)非线性传输系统后的特性，常称之为谱线生成特性。与之对照，一个信号不同频带之间的相关特性则称作谱相关(spectral correlation)特性。

谱相关理论可用于通信信号的检测和调制样式识别。由于循环自相关包含了信号过程的统计平均处理，对平稳噪声和干扰的谱相关函数为零，剔除了某些非信号本身特性的随机因素的影响，因而在信号选择性、抗干扰能力、分辨力、信号分析能力等各方面常常优于常规的谱分析方法。对于通信信号的循环平稳性进行详细讨论的经典论述来自 Gardner 的论文[1−4]，其文献中对于典型的模拟和数字调制信号的循环谱密度函数进行了讨论。但是对于 MPSK 信号的分析仅集中于 BPSK 信号。

本文着重对于 MPSK 信号的谱相关特性进行分析。改写了 MPSK 信号表达式，并由此得到 BPSK,QPSK, 8PSK,16PSK 信号的循环谱密度函数；应用谱相关函数的工程计算公式，对这 4 种信号的谱相关特性进行了仿真，验证了得到的循环谱密度函数的正确性。文章的结构如下，第 2 节简单介绍谱相关原理及主要结论，第 3 节是 MPSK 信号谱相关特性分析及仿真结果，第 4 节是结束语。

2006-06-21 收到，2006-12-25 改回

2　谱相关原理[3−5]

一个连续时间二阶随机过程 $\{x(t);t\in(-\infty,+\infty)\}$，当且仅当它的均值和自相关函数是周期性的(周期为 T_0)，则称之为在广义上的循环平稳过程(或二阶循环平稳过程)。即 $m_x(t+T_0)=m_x(t)$ ， $R_x(t+T_0,u+T_0)=R_x(t,u)$ 。考虑 $u=t-\tau$ 时， $x(t)$ 的时变相关函数定义为

$$R_x(t,\tau)=E\left\{x(t)x^*(t-\tau)\right\} \tag{1}$$

由于上式的 $R_x(t,\tau)$ 是周期为 T_0 的周期函数，因此，可以用 Fourier 级数展开它，得到

$$R_x(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_x^{\alpha}(\tau)e^{j2\pi mt/T_0}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_x^{\alpha}(\tau)e^{j2\pi\alpha t} \tag{2}$$

式中 $\alpha=m/T_0$ ，且 Fourier 系数：

$$R_x^{\alpha}(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}R_x(t,\tau)e^{-j2\pi\alpha t}\mathrm{d}t \tag{3}$$

系数 $R_x^{\alpha}(\tau)$ 表示频率为 α 的循环自相关强度，它是 τ 的函数，简称循环(自)相关函数或谱相关函数。信号 $x(t)$ 的循环相关函数 $R_x^{\alpha}(\tau)$ 的 Fourier 变换：

$$S_x^{\alpha}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x^{\alpha}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

称为循环谱密度(Cyclic Spectrum Density，CSD)。有限时间长度内的对理想循环谱密度 $S_x^{\alpha}(f)$ 的估计量常被称为谱相关密度函数，记为 $\widehat{S}_x^{\alpha}(f)$

在实际应用中，只能根据有限个数据或者说有限的观察时间(Δt)内的 $x(t)$ ，来近似估计循环谱密度函数。采用离

散频率平滑循环周期图来估计谱相关函数的方法，称作谱相关工程计算的离散频率平滑方法。表达式如下：

$$S_{x\Delta t}^{\alpha}(t,f)_{\Delta f}\Big|_{\substack{f=kF_s\\ \alpha=2mF_s}}=\frac{T_s}{MN}\sum_{i=-M/2}^{M/2}\widetilde{X}_{\Delta t}(t,k+i+m)\cdot\widetilde{X}_{\Delta t}^{*}(t,k+i-m)\tag{5}$$

其含义为：对于 $x(t)$ 在中心时刻为 t，截获数据段长度为 $\Delta t=NT_s$，以采样周期 $T_s=1/f_s$ 均匀采样，得到 N 个样本，即 $\{x(t,n),n=0,1,\cdots,N-1\}$，$\tilde{X}_{\Delta t}(t,k)$ 是 $x(t,n)$ 的离散傅里叶级数，频率平滑间隔为 $\Delta f=M/NT_s$。上式计算的稳定性条件为 $\Delta t\Delta f=M>>1$

3　多进制相移键控信号的谱相关特性

3.1 幅度调制信号的谱相关性质[1,2]

在进行多进制相移键控信号的谱相关特性的分析之前，作为预备知识，我们先就幅度调制信号的谱相关特性进行阐述。针对一般性的幅度调制信号，可以笼统的写为

$$x(t)=b(t)p(t)\tag{6}$$

若 $p(t)$ 为连续单频载波，即 $p(t)=\cos(2\pi f_0t+\phi_0)$，其中 f_0 为载波频率，ϕ_0 为载波初始相位，依据文献[1,2]的结论，得到 $x(t)$ 的谱相关密度函数 $\widehat{S}_x^{\alpha}(f)$：

$$\widehat{S}_x^{\alpha}(f)=\frac{1}{4}\Big[\widehat{S}_b^{\alpha}(f+f_0)+\widehat{S}_b^{\alpha}(f-f_0)+\widehat{S}_b^{\alpha-2f_0}(f)e^{j2\phi_0}+\widehat{S}_b^{\alpha+2f_0}(f)e^{-j2\phi_0}\Big]\tag{7}$$

若 $b(t)$ 为脉冲幅度调制信号，则有

$$b(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nq(t-nT_c)\;=a(t)*q(t)$$

其中 $a(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n\delta(t-nT_c)$，$T_c$ 为码元周期。依据 LPTV 系统结论[1,2]，可以得到 $b(t)$ 的谱相关密度函数：

$$\widehat{S}_b^{\alpha}(f)=\frac{1}{T_0}Q(f+\alpha/2)Q^{*}(f-\alpha/2)\widetilde{S}_a^{\alpha}(f)\tag{8}$$

其中 $Q(f)$ 是 $q(t)$ 的傅里叶变换，对于全占空比的矩形脉冲，即

$$q(t)=\begin{cases}1, & |t|\le T_c/2\\ 0, & |t|>T_c/2\end{cases}$$

则有 $Q(f)=\sin(\pi fT_c)/\pi f$。$\widetilde{S}_a^{\alpha}(f)$ 是离散序列 $\{a_n\}$ 的谱相关密度函数。由离散情况下的谱相关理论，有

$$\widetilde{S}_a^{\alpha}(f)=\frac{1}{T_c}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\widehat{S}_a^{\alpha-m/T_c}\left(f+\frac{m}{2T_c}-\frac{n}{T_c}\right)\tag{9}$$

$\widehat{S}_a^{\alpha}(f)$ 是 $a(t)$ 的循环谱相关函数。那么若幅度调制信号时间序列服从平稳白噪声分布，则有 $\widehat{S}_a^{\alpha-m/T_c}(f)$ 只在 $\alpha=m/T_c$ 时才有非零值，即 $\widetilde{S}_a^{\alpha}(f)$ 才有非零值。其值可以依据下式得到

$$\widetilde{S}_a^{\alpha}(f)=\begin{cases}\widetilde{R}_a(0), & \alpha=m/T_c\\ 0, & \alpha\ne m/T\end{cases},\quad m\text{为整数}\tag{10}$$

3.2 MPSK 调制信号的谱相关性质

幅度归一化的 MPSK 信号的常见通用表达式有两种，分别为

$$x(t)=\cos\big(2\pi f_0t+\phi(t)+\phi_0\big)\tag{11a}$$

$$x(t)=I(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0)-Q(t)\sin(2\pi f_0t+\phi_0)\tag{11b}$$

在式(11a)中相位时间序列 $\phi(t)$ 是可以表示为

$$\phi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_nq(t-nT_c)$$

式中 f_0 是载波频率，$1/T_c$ 是码元速率，ϕ_0 是初始相位。对于 MPSK 信号，则有 θ_n 为在 $[0,2\pi]$ 之间均匀分布 M 个相位，相位差为 $2\pi/M$。在式(11b)中

$$I(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nq(t-nT_c)$$

$$Q(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nq(t-nT_c)$$

且 $a_n=\cos\theta_n$，$b_n=\sin\theta_n$。直接对上式进行谱相关函数的推导，所得结果不易讨论。为了简化公式推导中的中间结果，尽量引入取值属于 $\{\pm1,0\}$ 范围的序列是一个较优的方法。为了推导 MPSK 信号的谱相关特性，拟采用式(7)，式(8)的结论，将 MPSK 信号的表达式均改写为以式(6)为基本单元的求和形式。

3.2.1 BPSK 信号的谱相关特性　幅度归一化的 BPSK 信号表达式可以改写为

$$x_{\mathrm{BPSK}}(t)=c_1(t)\cos\big(2\pi f_0t+\phi_0\big)\tag{12}$$

其中 $c_1(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_{1n}q(t-nT_c)$，$\{c_{1n}\}$ 是平稳的等概率二元序列，且 $c_{1n}=\pm1$。对比式(11)与式(12)，易得 $\theta_n\in[0,\pi]$。应用式(7)，式(8)的结论，且合并二式，则有

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{x_{\mathrm{BPSK}}}^{\alpha}(f)=\frac{1}{4T_c}\Big\{&Q\Big(f+f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^{*}\Big(f+f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f+f_0)\\&+Q\Big(f-f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^{*}\Big(f-f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f-f_0)\\&+Q\Big(f-f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^{*}\Big(f+f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha-2f_0}(f)e^{j2\phi_0}\\&+Q\Big(f+f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^{*}\Big(f-f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha+2f_0}(f)e^{-j2\phi_0}\Big\}\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$\tilde{R}_{c_1}(0)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}c_{1n}\cdot c_{1n}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}1=1$$

即有 $\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f)=\begin{cases}1, & \alpha=m/T_c\\ 0, & \alpha\ne m/T_c\end{cases}$，$m$为整数。因此对于 BPSK 信号而言，只有在 $\alpha=m/T_c$ 和 $\alpha=(m/T_c)\pm2f_0$ 时存在非零谱相关密度函数。

3.2.2 QPSK 信号的谱相关特性　幅度归一化的 QPSK 信号表达式可以改写为

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{QPSK}}(t)=&1/\sqrt{2}\,c_1(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0)\\&+1/\sqrt{2}\,c_2(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+\pi/2)=x_1(t)+x_2(t)\end{aligned}\tag{14}$$

其中

$$c_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{1n}q(t-nT_c)$$

$$c_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{2n}q\quad(t-nT_c)$$

其中$\{c_{1n}\}$，$\{c_{2n}\}$都是平稳等概率二元序列，且$c_{1n}=\pm1$，$c_{2n}=\pm1$。对比式(11)与式(14)，应用和差化积公式，易得$\theta_n\in\left[\pi/4,3\pi/4,5\pi/4,7\pi/4\right]$。对比BPSK信号结论，则有$\widehat{S}_{x_1}^{\alpha}(f)$，$\widehat{S}_{x_2}^{\alpha}(f)$如下：

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{x_1}^{\alpha}(f)=\frac{1}{4\sqrt{2}T_c}\Big\{&Q\Big(f+f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f+f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f+f_0)\\&+Q\Big(f-f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f-f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f-f_0)\\&+Q\Big(f-f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f+f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha-2f_0}(f)e^{j2\phi_0}\\&+Q\Big(f+f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f-f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha+2f_0}(f)e^{-j2\phi_0}\Big\}\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{x_2}^{\alpha}(f)=\frac{1}{4\sqrt{2}T_c}\Big\{&Q\Big(f+f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f+f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_2}^{\alpha}(f+f_0)\\&+Q\Big(f-f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f-f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_2}^{\alpha}(f-f_0)\\&-Q\Big(f-f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f+f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_2}^{\alpha-2f_0}(f)e^{j2\phi_0}\\&-Q\Big(f+f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f-f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_2}^{\alpha+2f_0}(f)e^{-j2\phi_0}\Big\}\end{aligned}\tag{16}$$

若序列$\{c_{1n}\}$，$\{c_{2n}\}$是平稳的且不相关，并且二者是平衡的，即有$\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f)-\widetilde{S}_{c_2}^{\alpha}(f)\equiv0$，那么

$$\begin{aligned}&\widehat{S}_{x_{\mathrm{QPSK}}}^{\alpha}(f)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}T_c}\Big\{Q\Big(f+f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f+f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f+f_0)\\&\quad+Q\Big(f-f_0+\frac{\alpha}{2}\Big)Q^*\Big(f-f_0-\frac{\alpha}{2}\Big)\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f-f_0)\Big\}\end{aligned}\tag{17}$$

$\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f)$取值同BPSK信号。显见对于QPSK信号而言，只有在$\alpha=m/T_c$时存在非零的谱相关密度函数。

3.2.3 8PSK信号的谱相关特性 幅度归一化的8PSK信号表达式可以改写为

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{8PSK}}(t)=&1/\sqrt{2}\,c_1(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+c_3(t)\cdot\pi/4)\\&+1/\sqrt{2}\,c_2(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+\pi/2+c_3(t)\cdot\pi/4)\end{aligned}\tag{18}$$

其中

$$c_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{1n}q(t-nT_c)$$

$$c_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{2n}q\ (t-nT_c)$$

$$c_3(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{3n}q(t-nT_c)$$

$\{c_{1n}\}$，$\{c_{2n}\}$，$\{c_{3n}\}$都是平稳等概率二元序列，且$c_{1n}\in[-1,1]$，$c_{2n}\in[-1,1]$，$c_{3n}\in[0,1]$。对比式(11)与式(18)，应用和差化积公式，易得$\theta_n\in[0,\pi/4,\pi/2,3\pi/4\ \pi,5\pi/4,3\pi/2,7\pi/4]$。将上式展开为

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{8PSK}}(t)=&1/\sqrt{2}\,c_1(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0)\cos(c_3(t)\cdot\pi/4)\\&-1/\sqrt{2}\,c_1(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+\pi/2)\cos(c_3(t)\cdot\pi/4+\pi/2)\\&+1/\sqrt{2}\,c_2(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+\pi/2)\cos(c_3(t)\cdot\pi/4)\\&-1/\sqrt{2}\,c_2(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+\pi)\cos(c_3(t)\cdot\pi/4+\pi/2)\end{aligned}\tag{19}$$

记$a_1(t)=c_1(t)\cos(c_3(t)\cdot\pi/4)$，$a_2(t)=-c_1(t)\cos(c_3(t)\cdot\pi/4+\pi/2)$，$a_3(t)=c_2(t)\cos(c_3(t)\cdot\pi/4)$，$a_4(t)=-c_2(t)\cdot\cos(c_3(t)\cdot\pi/4+\pi/2)$，式(19)简化为

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{8PSK}}(t)=&1/\sqrt{2}a_1(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0)\\&+1/\sqrt{2}a_2(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+\pi/2)\\&+1/\sqrt{2}a_3(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+\pi/2)\\&+1/\sqrt{2}a_4(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+\pi)\\=&x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)\end{aligned}\tag{20}$$

若序列$\{c_{1n}\}$，$\{c_{2n}\}$是平稳的，且不相关的，并且$\{c_{1n}\}$和$\{c_{2n}\}$二者是平衡的，即有$\widetilde{S}_{c_1}^{\alpha}(f)-\widetilde{S}_{c_2}^{\alpha}(f)\equiv0$。那么也有$\widetilde{S}_{a_1}^{\alpha}(f)-\widetilde{S}_{a_3}^{\alpha}(f)\equiv0$，$\widetilde{S}_{a_2}^{\alpha}(f)-\widetilde{S}_{a_4}^{\alpha}(f)\equiv0$。应用QPSK结论，做变量替换，则有

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{x_{\mathrm{8PSK}}}^{\alpha}(f)=\frac{1}{2\sqrt{2}T_c}\{&Q(f+f_0+\frac{\alpha}{2})Q^*(f+f_0-\frac{\alpha}{2})\widetilde{S}_{a_1}^{\alpha}(f+f_0)\\&+Q(f-f_0+\frac{\alpha}{2})Q^*(f-f_0-\frac{\alpha}{2})\widetilde{S}_{a_1}^{\alpha}(f-f_0)\\&+Q(f+f_0+\frac{\alpha}{2})Q^*(f+f_0-\frac{\alpha}{2})\widetilde{S}_{a_2}^{\alpha}(f+f_0)\\&+Q(f-f_0+\frac{\alpha}{2})Q^*(f-f_0-\frac{\alpha}{2})\widetilde{S}_{a_2}^{\alpha}(f-f_0)\}\end{aligned}\tag{21}$$

其中

$$\widetilde{R}_{a_1}(0)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}{a_{1n}}^2\cong3/4$$

$$\widetilde{R}_{a_2}(0)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}a_{2n}^2\cong1/4$$

即有$\widetilde{S}_{a_1}^{\alpha}(f)=\begin{cases}3/4,\alpha=m/T_c\\0,\ \ \alpha\neq m/T_c\end{cases}$，$\widetilde{S}_{a_2}^{\alpha}(f)=\begin{cases}1/4,\alpha=m/T_c\\0,\ \ \alpha\neq m/T_c\end{cases}$

m为整数。显见对于8PSK信号而言，只有在$\alpha=m/T_c$时存在非零的谱相关密度函数$\widetilde{S}_x^{\alpha}(f)$。

3.2.4 16PSK信号的谱相关特性 幅度归一化的16PSK信号表达式可以改写为

$$\begin{aligned}x_{\mathrm{16PSK}}(t)=&1/\sqrt{2}\,c_1(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0+c_3(t)\cdot\pi/4+c_4(t)\cdot\pi/8)\\&+1/\sqrt{2}\,c_2(t)\cos(2\pi f_0t+\phi_0\\&+\pi/2+c_3(t)\cdot\pi/4+c_4(t)\cdot\pi/8)\end{aligned}\tag{22}$$

其中

$$c_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{1n}q(t-nT_c),\quad c_2(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{2n}q\quad(t-nT_c)$$

$$c_3(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{3n}q(t-nT_c),\quad c_4(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{4n}q\quad(t-nT_c)$$

$\{c_{1n}\}$，$\{c_{2n}\}$，$\{c_{3n}\}$，$\{c_{4n}\}$都是平稳等概率二元序列，且$c_{1n}\in[-1,1]$，$c_{2n}\in[-1,1]$，$c_{3n}\in[0,1]$，$c_{4n}\in[0,1]$。对比式(11)与式(22)，应用和差化积公式，易得

$$\begin{aligned}\theta_n\in[&0,\pi/8,\pi/4,3\pi/8,\pi/2,5\pi/8,3\pi/4,7\pi/8,\pi,9\pi/8,\\&5\pi/4,11\pi/8,3\pi/2,13\pi/8,]\ 7\pi/4,15\pi/8]\end{aligned}$$

将上式展开为

$$
\begin{aligned}
x_{16\mathrm{PSK}}(t) &= 1/\sqrt{2}c_1(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi_0)\cos(c_3(t)\\
&\cdot\pi/4+c_4(t)\cdot\pi/8)+1/\sqrt{2}c_1(t)\\
&\cdot\cos(2\pi f_0 t+\phi_0+\pi/2)\sin(c_3(t)\cdot\pi/4+c_4(t)\\
&\cdot\pi/8)+1/\sqrt{2}c_2(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi_0+\pi/2)\\
&\cdot\cos(c_3(t)\cdot\pi/4+c_4(t)\cdot\pi/8)+1/\sqrt{2}c_2(t)\\
&\cdot\cos(2\pi f_0 t+\phi_0+\pi)\sin(c_3(t)\cdot\pi/4+c_4(t)\cdot\pi/8)
\end{aligned}
\tag{23}
$$

记

$$
\begin{aligned}
a_5(t) &= c_1(t)\cos(c_3(t)\cdot\pi/4+c_4(t)\cdot\pi/8)\\
a_6(t) &= c_1(t)\sin(c_3(t)\cdot\pi/4+c_4(t)\cdot\pi/8)\\
a_7(t) &= c_2(t)\cos(c_3(t)\cdot\pi/4+c_4(t)\cdot\pi/8)\\
a_8(t) &= c_2(t)\sin(c_3(t)\cdot\pi/4+c_4(t)\cdot\pi/8)
\end{aligned}
$$

上式简化为

$$
\begin{aligned}
x_{16\mathrm{PSK}}(t) &= 1/\sqrt{2}\,a_5(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi_0)\\
&\quad+1/\sqrt{2}\,a_6(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi_0+\pi/2)\\
&\quad+1/\sqrt{2}\,a_7(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi_0+\pi/2)\\
&\quad+1/\sqrt{2}\,a_8(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi_0+\pi)\\
&= x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

若序列 $\{c_{1n}\}$，$\{c_{2n}\}$ 是平稳的，且不相关的，并且 $\{c_{1n}\}$ 和 $\{c_{2n}\}$ 二者是平衡的，即有 $\tilde{S}^{\alpha}_{c_1}(f)-\tilde{S}^{\alpha}_{c_2}(f)\equiv 0$ 。那么也有 $\tilde{S}^{\alpha}_{a_5}(f)-\tilde{S}^{\alpha}_{a_7}(f)\equiv 0$，$\tilde{S}^{\alpha}_{a_6}(f)-\tilde{S}^{\alpha}_{a_8}(f)\equiv 0$ 。应用 8PSK 结论，做变量替换，则有

$$
\begin{aligned}
\widehat{S}^{\alpha}_{x_{16\mathrm{PSK}}}(f) &= \frac{1}{2\sqrt{2}T_c}\{Q(f+f_0+\frac{\alpha}{2})Q^*(f+f_0-\frac{\alpha}{2})\widetilde{S}^{\alpha}_{a_5}(f+f_0)\\
&+Q(f-f_0+\frac{\alpha}{2})Q^*(f-f_0-\frac{\alpha}{2})\widetilde{S}^{\alpha}_{a_5}(f-f_0)\\
&+Q(f+f_0+\frac{\alpha}{2})Q^*(f+f_0-\frac{\alpha}{2})\widetilde{S}^{\alpha}_{a_6}(f+f_0)\\
&+Q(f-f_0+\frac{\alpha}{2})Q^*(f-f_0-\frac{\alpha}{2})\widetilde{S}^{\alpha}_{a_6}(f-f_0)\}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

其中

$$\tilde{R}_{a_5}(0)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}a_{1n}^2\cong 0.625$$

$$\tilde{R}_{a_6}(0)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}{a_{2n}}^2\cong 0.375$$

即有

$$\tilde{S}^{\alpha}_{a_5}(f)=\begin{cases}0.625, & \alpha=m/T_c\\ 0, & \alpha\neq m/T_c\end{cases}$$

$$\tilde{S}^{\alpha}_{a_6}(f)=\begin{cases}0.375, & \alpha=m/T_c\\ 0, & \alpha\neq m/T_c\end{cases}$$

m为整数。显见对于 16PSK 信号而言，只有在 $\alpha=m/T_c$ 时存在非零的谱相关密度函数。

3.3 MPSK 调制信号的谱相关密度函数仿真

依据式(13)，式(17)，式(21)和式(25)的结论，只有 BPSK 信号在 $\alpha=2f_0$ 时有非零值，而其它 MPSK 信号则没有此性质。对于 $M\geq 4$ 的 MPSK 信号，对比前面的结论可知，它们的谱相关密度函数仅有系数上的差异，且非常相近。图 1，图 2 显示了应用工程计算公式得到的 MPSK 信号的谱相关密度函数的 $f-\alpha$ 幅值三维图和 $\hat{S}^{\alpha}_x(0)$ 的平面图，这一仿真结果印证了前面的结论。仿真参数为：码速率 $f_c=100\mathrm{Hz}$；载波频率 $f_0=300\mathrm{Hz}$；采样频率 $f_s=12800\mathrm{Hz}$；参与判决的码元个数 $L=64$；参与判决的数据个数 $N=8192$；信噪比参数 $E/N_0=30\mathrm{dB}$（E：平均信号功率，N_0：加性高斯白噪声功率谱密度）；谱相关工程计算的参数 $M=128$，且有 $F_s=f_s/N$。

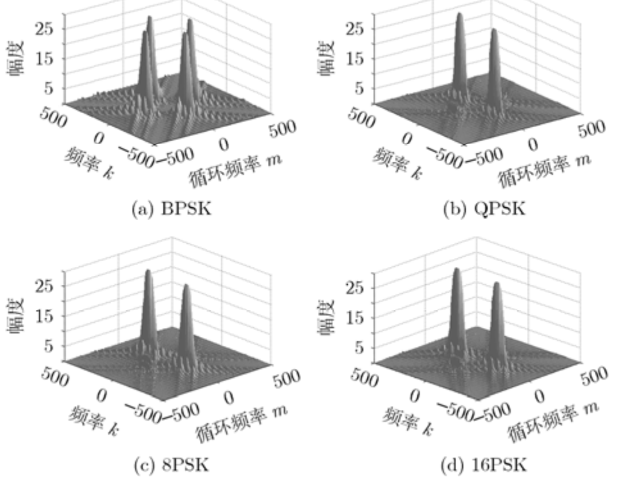

图 1　MPSK 信号谱相关密度函数 $S^{\alpha}_x(f)$
（频率 $k=f/F_s$，循环频率 $m=\alpha/2F_s$）

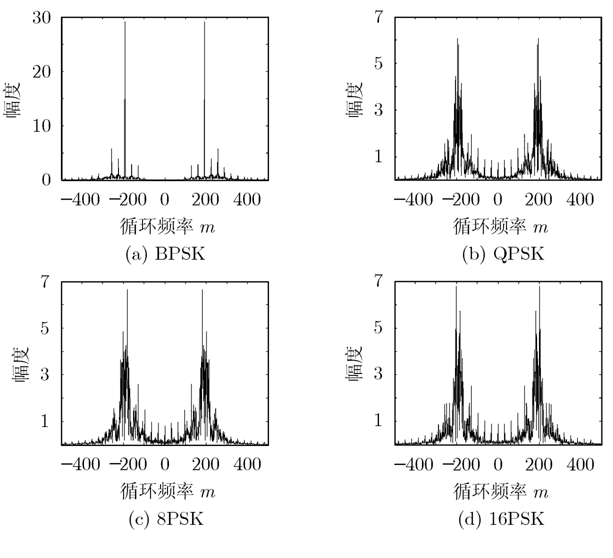

图 2　MPSK 信号 $f=0$ 时的谱相关密度函数 $S^{\alpha}_x(0)$
（循环频率 $m=\alpha/2F_s$）

4　结束语

本文依据提出的新的MPSK信号表达式，得到了 BPSK, QPSK, 8PSK, 16PSK 信号的谱相关密度函数。这一结果对

于研究 MPSK 信号的性质非常有用。例如 MPSK 信号的功率谱密度是非常接近的，不易区分，而依据前面的结论，可以看出就 MPSK 信号的谱相关密度函数而言，是很容易区分出 BPSK 信号（依据 $\hat{S}_x^{2f_0}(0)$ 的取值）。通信信号谱相关特性已逐步应用于通信对抗，检测，识别等多个领域，其深入研究将有广阔的前景。

参 考 文 献

[1] Gardner W A, Brown W A, and Chen C K. Spectral correlation of modulated signals, Part II: Digital modulation. *IEEE Trans on Communication*, 1987, 35(6): 595–601.

[2] Gardner W A, Brown W A, and Chen C K. Spectral correlation of modulated signals, Part Ⅰ: Analog modulation. *IEEE Trans on Communication* ,1987,35(6): 584–594.

[3] Gardner W A. Measurement of spectral correlation. *IEEE Trans. on ASSP*, 1986 , 34(5): 1111–1123.

[4] Gardner W A. The spectral correlation theory of cyclostationary time-series. *Signal Processing*, 1986, 11(4): 13–36.

[5] 张贤达, 保铮. 非平稳信号分析与处理. 北京: 国防工业出版社. 1998, 第 10 章

张 炜： 女，1972 年生，副教授，博士生，中国通信学会会员，从事通信与信息处理、软件无线电、通信信号处理、雷达信号仿真等方面的研究.

杨 虎： 男，1973 年生，副教授，博士生，从事电磁场与微波技术、天线、数值计算方法等方面的研究.

张尔扬： 男，1941 年生，教授，博士生导师，中国通信学会会士，中国电子学会高级会员，主要研究方向为军用无线通信与网络技术、扩频自适应抗干扰技术、空间通信与组网等.