基于 $z^r\log(z)$期望的 K 分布参数估计

胡文琳[①②] 王永良[②] 王首勇[②]
[①](国防科技大学电子信息与工程学院 长沙 410073)
[②](空军雷达学院雷达兵器运用工程重点实验室 武汉 430019)

摘 要：该文用 $z^r\log(z)$ 期望扩展了基于 $z\log(z)$期望的 K 分布参数估计方法，导出了基于 $z^r\log(z)$ 期望的 K 分布参数估计表达式。分析比较了阶数 r 取不同值时，基于 $z^r\log(z)$期望的参数估计精度。仿真结果表明，在 K 分布雷达尖杂波参数范围内，阶数 r 小于 1 时，基于 $z^r\log(z)$期望的参数估计精度高于 $z\log(z)$期望法和正规化对数估计法。

关键词：K 分布；雷达杂波；矩方法；参数估计
中图分类号：TN957.51 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2008)01-0203-03

Estimation of the Parameters of K-distribution Based on $z^r\log(z)$ Expectation

Hu Wen-lin[①②] Wang Yong-liang[②] Wang Shou-yong[②]
[①](*School of Electronic Science and Engineering*, *NUDT*, *Changsha* 410073, *China*)
[②](*Key Research Lab.*,*Wuhan Radar Institute*, *Wuhan* 430019, *China*)

Abstract: The estimation of the parameters of K-distribution based on the $z\log(z)$ expectation approach is extended to $z^r\log(z)$ expectation. The parameter estimation expression of the based on $z^r\log(z)$ expectation is derived. When r is taken different values, the accuracies of the estimations based on the $z^r\log(z)$ expectation are analyzed and compared with one another. Simulation results show that in the parameters range of K distribution radar spiky clutter, the estimation based on $z^r\log(z)$ expectation is more accurate than $z\log(z)$ expectation and Normalised Log Estimator (NLE) approaches when r is less than unity.

Key words: K distribution; Radar clutter; MOM; Parameter estimation

1 引言

当高分辨力雷达(脉冲宽度和波束宽度较小)在低擦地角下观察海杂波时，海杂波幅度将偏离瑞利分布而出现长的“拖尾”，研究表明此时海杂波服从 K 分布[1,2]。

在 K 分布雷达杂波背景中，准确估计形状参数对恒虚警(CFAR)检测、SAR 图像分割和 SAR 图像杂波分类等具有十分重要的影响。文献[3]研究表明，形状参数的不正确估计会引起 CFAR 检测性能严重下降。近年来，国外一些学者相继提出了许多 K 分布参数估计方法。当观测样本足够大且分布的形式已知时，最大似然(ML)估计是最优估计，其渐近分布是以真值为均值，方差为 Cramer-Rao 下界的正态分布。然而，K 分布参数的 ML 估计解析表达式很难获得，参数估计需要用数值方法在两参数的二维平面内搜索得到，计算十分低效[4,5]。文献[6]用期望最大(EM)迭代算法实现参数的 ML 估计，虽然其运算量较二维平面搜索有所减小，但迭代运算需要很大的数据量才能保证估计精度，额外的计算开销仍比较高。文献[7] 将神经网络用于 K 分布参数估计，虽然估计准确，受噪声影响小，但训练时间长，实现复杂。因此，现有的 K 分布参数估计方法大多用基于运算相对简单的矩量法(MOM)逼近 ML 估计[8−11]。文献[8]用 $z\log(z)$期望法获得了较分数阶矩法[9]稍好的参数估计性能，但仍较正规化对数估计(NLE)[10,11]精度低。本文用 $z^r\log(z)$ 期望扩展了基于 $z\log(z)$期望的参数估计方法。在 K 分布雷达尖杂波参数范围内，当阶数 r 小于 1 时，基于 $z^r\log(z)$期望的参数估计方法获得了比 $z\log(z)$期望法更高的估计精度。

2 基于 $z^r\log(z)$期望的 K 分布参数估计方法

K 分布概率密度函数(PDF)为[5]

$$f(z)=\frac{2}{\Gamma(v)}\frac{v}{\mu}\left(\frac{v}{\mu}z\right)^{(v-1)/2}K_{v-1}\left[2\left(\frac{v}{\mu}z\right)^{1/2}\right],\quad z\ge 0, v>0 \tag{1}$$

式中 μ 为杂波均值，$K_{v-1}(\bullet)$是 $v-1$ 阶第二类修正贝赛尔函数。v 为形状参数，v 越小表示杂波越尖锐，即拖尾性越严重。

K 分布的散斑分量和结构分量的 PDF 分别为

$$p_{Z|X}(z\mid x)=\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{z}{x}\right) \tag{2}$$

2006-06-13 收到，2006-11-20 改回
国家部级基金和全国高校优秀青年教师教学科研奖励计划(TRAPOYT)资助课题

$$p_X(x)=\left(\frac{v}{\mu}\right)^v\frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)}\exp\left(-\frac{v}{\mu}x\right) \tag{3}$$

文献[9]研究结果表明，基于分数阶的矩估计可以提高 K 分布参数估计的精度。基于这一思想，本文将 $z\log(z)$期望法[8]扩展到分数阶(r 取小于 1 的分数)的 $z^r\log(z)$ 期望，以此来改善 $z\log(z)$期望法的参数估计性能。

令 $b=v/\mu$，则 K 分布的 r 阶原点矩($r>0$)可表示为[8]

$$\begin{aligned}<z^r>&=\int_0^\infty p_X(x)\left\{\int_0^\infty z^r p_{Z|X}(z\mid x)\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty b^v\frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)}\exp(-bx)\left\{\int_0^\infty z^r\frac{1}{x}\exp\left|-\frac{z}{x}\right|\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}x\\&=\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(r+v)b^{-r}}{\Gamma(v)}\end{aligned} \tag{4}$$

式中$<\bullet>$表示集合平均。对式(4)求关于 r 的偏导，得[8]

$$\begin{aligned}\frac{\partial<z^r>}{\partial r}&=\frac{\partial\int z^r f(z)\mathrm{d}z}{\partial r}=\int\frac{\partial z^r}{\partial r}f(z)\mathrm{d}z\\&=\int z^r\log(z)f(z)\mathrm{d}z=<z^r\log(z)>\end{aligned} \tag{5}$$

令 $g(r)=\Gamma(r+1)\Gamma(r+v)b^{-r}$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g(r)}{\mathrm{d}r}&=[\psi(r+1)+\psi(r+v)-\log(b)]\\&\quad\cdot\Gamma(r+1)\Gamma(r+v)b^{-r}\end{aligned} \tag{6}$$

式中 $\psi(\cdot)$ 表示 Digamma 函数。

将式(4)，式(6)代入式(5)，得

$$\begin{aligned}<z^r\log(z)>&=\frac{\partial<z^r>}{\partial r}=\frac{\mathrm{d}g(r)/\mathrm{d}r}{\Gamma(v)}\\&=<z^r>[\psi(r+1)+\psi(r+v)-\log(b)]\\&=<z^r>[\psi(r+1)+\psi(r+v)\\&\quad-\log(v)+\log<z>]\end{aligned} \tag{7}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{<z^r\log(z)>}{<z^r>}&=\psi(r+1)+\psi(r+v)\\&\quad-\log(v)+\log<z>\end{aligned} \tag{8}$$

正规化对数估计的参数估计表达式为[10,11]

$$<\log(z)>=\log<z>+\psi(v)-\log(v)+\psi(1) \tag{9}$$

式(8)，式(9)相减，得

$$\begin{aligned}H&=\frac{<z^r\log(z)>}{<z^r>}-<\log(z)>\\&=\psi(r+1)-\psi(1)+\psi(v+r)-\psi(v)\end{aligned} \tag{10}$$

设 $\{Z_i;i=1,\cdots,N\}$ 为具有式(1)PDF 的随机变量，$\{z_i;i=1,\cdots,N\}$ 为其观测样本。式(10)左边用样本矩代替总体矩，得

$$\begin{aligned}\widehat{H}&=\frac{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N z_i^{\,r}\log(z_i)}{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^N z_i^{\,r}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\log(z_i)\\&=\psi(r+1)-\psi(1)+\psi(\hat{v}+r)-\psi(\hat{v})\end{aligned} \tag{11}$$

式(11)为 $z^r\log(z)$ 期望法参数估计表达式。用数值方法解式(11)即可得到形状参数的估计值 $\hat{v}$。

式(10)中令 $r=1$，并利用 Digamma 函数的性质 $\psi(s+1)-\psi(s)=1/s$，得

$$\begin{aligned}&\frac{<z\log(z)>}{<z>}-<\log(z)>=\psi(2)-\psi(1)+\psi(v+1)-\psi(v)\\&=1+\frac{1}{v}\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)称为 $z\log(z)$期望估计法[8]，它是 $z^r\log(z)$期望法阶数 $r=1$ 时的情形。

3 参数估计精度分析

本文用估计量的相对偏差($(\hat{v}-v)/v$)和相对方差($\sigma_{\hat{v}}^2/v^2$)来表示参数估计的精度。文献[11]中 Lombardo 和 Oliver 研究发现，$t\equiv1/v$ 和估计统计量成近似的线性关系，在参数估计过程中，用 t 代替 $1/v$ 可以减小参数估计的偏差和方差，且较好地解决了估计的理论误差和仿真误差之间偏差较大的问题。另外，服从 K 分布的 SAR 图像的形状参数通常在 $v=0.1$(城市)到 $v=10$(开阔的平原)之间变化，海杂波也有相似的参数范围[11]。因此，以下仿真实验中直接估计参数 t，形状参数的范围取 $v\in[0.03,10]$，对应的 $\log(t)\in[-1,1.5]$。

为了分析阶数 r 取不同值时，$z^r\log(z)$期望法的参数估计精度，图 1，图 2 分别画出了 $z^r\log(z)$期望法 t 估计的相对偏差和相对方差(取对数)曲线。阶数 r 取 1/20,1/10,1/2,1,1.5,2,5，仿真次数为 10,000 次，样本长度 N=256。

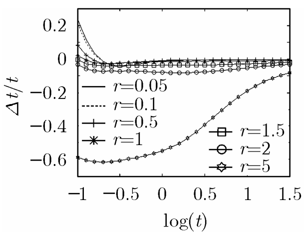

图1 阶数 r=1/20,1/10,1/2,1,1.5,2,5 时，$z^r\log(z)$期望法 t 估计的相对偏差(N=256)

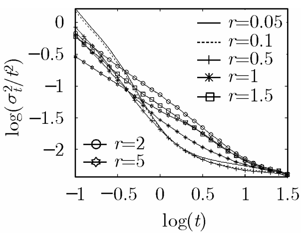

图2 阶数 r=1/20,1/10,1/2,1,1.5,2,5 时，$z^r\log(z)$期望法 t 估计的相对方差(N=256)

由图 1，图 2 可见，$z^r\log(z)$期望法估计的偏差和方差随着形状参数的减小而减小。当形状参数较大($v>2.45$)时，阶数 r=5 的 $z^r\log(z)$期望法估计方差最小，但其估计偏差很大。在 $v\in[0.03,2.45]$(即 $\log(t)\in[-0.39,1.5]$)的参数范围内，当 $0<r<1$ 时，$z^r\log(z)$期望法获得了较 $r\geqslant1$ 时更小的估计偏差和估计方差。然而，由于得不到 $z^r\log(z)$期望法估计方差的表达式，因此，无法求取估计方差最小时对应的 r 值。本实验中 r=0.5 时 $z^r\log(z)$期望法的估计偏差和估计方差最小。

文献[10]提出了 3 种基于矩量法的参数估计：正规化对数估计、二/四阶矩估计和对数方差估计，并分析比较了它们的估计精度。文献[10]研究表明，在通常的 K 分布雷达杂波参数范围内，正规化对数估计具有最小的估计偏差和估计

方差。为了进一步分析 $z^r\log(z)$期望法的估计精度，图 3，图 4 分别画出了 $z^r\log(z)$期望法(r=0.5)，$z\log(z)$期望法，正规化对数估计，二/四阶矩法和对数方差法 t 估计的相对偏差和相对方差(取对数)曲线。仿真次数为 10,000 次，样本长度 N=256。

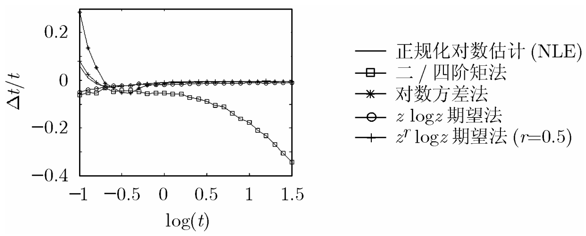

图 3　$z^r\log(z)$期望法(r=0.5)，$z\log(z)$期望法，正规化对数估计，二/四阶矩法和对数方差法的估计偏差曲线(N=256)

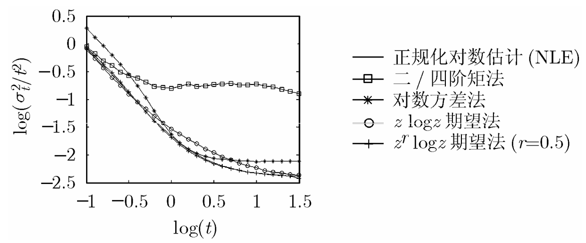

图 4　$z^r\log(z)$期望法(r=0.5)，$z\log(z)$期望法，正规化对数估计，二/四阶矩法和对数方差法的相对估计方差曲线(N=256)

由图 3，图 4 可见，在 $v\in[0.03,10]$的参数范围内，二/四阶矩法的估计偏差和估计方差都很大，而 $z^r\log(z)$期望法(r=0.5)，$z\log(z)$期望法和正规化对数估计同时具有较小的估计偏差和估计方差。另外，由图 3，图 4 还可以看出，在给定的参数范围内，$z^r\log(z)$期望法(r=0.5)和 $z\log(z)$期望法具有几乎相同的估计偏差，但在 $v\in[0.03,2.45]$(即 $\log(t)\in[-0.39,1.5]$)的参数范围内，$z^r\log(z)$期望法(r=0.5)具有比 $z\log(z)$期望法更小的估计方差，其估计方差甚至小于正规化的对数估计。

由于尖杂波对雷达信号处理的影响很大，例如，在尖杂波背景下进行恒虚警处理时，形状参数较大的估计误差会引起虚警概率的急剧抬升或造成较大的信噪比损失[3]。因此，在实际的雷达信号处理中常常更关心 $0<v<2$ 的尖杂波参数范围[12]。从以上分析可以看出，在 $0<v<2$ 的尖杂波参数范围内，当阶数取 $0<r<1$ 时，基于 $z^r\log(z)$期望的参数估计精度较 $z\log(z)$期望法有较大的提高，其估计精度甚至稍高于正规化的对数估计。因此，当雷达信号处理涉及尖杂波背景下的 K 分布参数估计时，基于 $z^r\log(z)$期望的参数估计方法可以使信号处理得到相应的性能改善。

4　结束语

本文用 $z^r\log(z)$期望扩展了基于 $z\log(z)$期望的 K 分布参数估计方法。分析比较了阶数 r 取不同值时，基于 $z^r\log(z)$期望的参数估计精度。当杂波较尖锐(形状参数较小)时，由于阶数 r 可以取分数值($0<r<1$)，基于 $z^r\log(z)$期望的参数估计获得了比 $z\log(z)$期望法更高的估计精度，当 r=0.5 时，其估计精度甚至稍高于正规化的对数估计。

参 考 文 献

[1] Jakeman E and Pusey P N. A model for non-Rayleigh sea echo [J]. *IEEE Trans. on Antennas Propag.*, 1976, 24(6): 806–814.

[2] Ward K D. Compound representation of high resolution sea clutter [J]. *Electron. Lett.*, 1981, 17(16): 561–563.

[3] Armstrong B C and Griffiths H D. CFAR detection of fluctuating targets in spatially correlated K-distributed clutter [J]. *IEE Proc-F*, 1991, 138(2): 139–152.

[4] Joughin I R, Percival D B, and Winebrenner D P. Maximum likelihood estimation of K-distribution parameters for SAR data [J]. *IEEE Trans on Geosciences and Remote Sensing*, 1993, 31(5): 989–999.

[5] Blacknell D. Comparison of parameter estimators for K-distribution [J]. *IEE Proc.-Radar, Sonar, Navig.*, 1994, 141(1): 45–52.

[6] Roberts W J J and Furui S. Maximum likelihood estimation of K-distribution parameters via the expectation-maximization algorithm [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2000, 48(12): 3303–3306.

[7] Wachowiak M P, Smolíková R, Zurada J M, and Elmaghraby A S. Estimation of K distribution parameters using neural networks [J]. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 2002, 49(6): 617–620.

[8] Blacknell D and Tough R J A. Parameter estimation for the K-distribution based on [$z\log(z)$] [J]. *IEE Proc.- Radar, Sonar, Navig.*, 2001, 148(6): 309–312.

[9] Iskander D R and Zoubir A M. Estimation of the parameters of the K-distribution using higher order and fractional moment s[J]. *IEEE Trans. on AES*, 1999, 35(4): 1453–1457.

[10] Oliver C J. Optimum texture estimators for SAR clutter [J]. *J. Phys. D: Phys.* 1994, 26(4): 1824–1835.

[11] Lombardo P and Oliver C J. Estimation of texture parameters in K-distributed clutter [J]. *IEE Proc.-Radar, Sonar, Navig.*, 1994, 141(4): 196–204.

[12] Raghavan R S. A method for estimating parameters of K-distributed clutter [J]. *IEEE Trans. on AES*, 1991, 27(2): 238–246.

胡文琳：　男，1976 年生，博士生，研究方向为统计信号处理、雷达信号检测与恒虚警处理等.

王永良：　男，1965 年生，教授，博士生导师，主要研究领域为雷达技术、阵列信号处理、自适应信号处理等.

王首勇：　男，1956 年生，教授，博士生导师，主要研究方向为雷达信号处理、现代信号处理.