

修正的最大散度差鉴别分析及人脸识别

刘永俊^{①②} 陈才扣^{①③} 王正群^①

^①(扬州大学计算机科学与工程系 扬州 225009)

^②(常熟理工学院软件工程系 常熟 215500)

^③(南京理工大学计算机科学与工程系 南京 210094)

摘要: 针对传统的 Fisher 线性鉴别分析在人脸这样的多类高维小样本模式的分类中存在的“小样本问题”和“次优性问题”，该文提出了一种基于修正的最大散度差鉴别准则的线性鉴别分析方法。该方法对最大散度差鉴别准则中散布矩阵的构造加以修正，采用新的修正的最大散度差鉴别准则函数。该方法从理论上为有效地解决传统的 Fisher 线性鉴别分析在人脸识别中存在的这两大难题提供了有效的途径。最后，在 ORL, AR 标准人脸库上的实验结果验证了该算法的有效性。

关键词: 人脸识别; Fisher 线性鉴别分析; 最大散度差鉴别分析

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)01-0190-04

Modified Maximum Scatter-difference Discriminant Analysis and Face Recognition

Liu Yong-jun^{①②} Chen Cai-kou^{①③} Wang Zheng-qun^①

^①(Department of Computer Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China)

^②(Department of Software Engineering, Changshu Institute of Technology, Changshu 215500, China)

^③(Department of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Considering the so-called “Small Sample Size”(SSS) problem in nature and the “inferior” problem in traditional Fisher linear discriminant analysis, a new method of feature extraction based on modified maximum scatter-difference criterion is developed in this paper. The method gives an effective way to resolve two difficulties of the traditional Fisher linear discriminant analysis theoretically in face recognition. Finally, extensive experiments performed on ORL and AR face database verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: Face recognition; Fisher linear discriminant analysis; Maximum scatter-difference discriminant analysis

1 引言

基于 Fisher 准则函数的线性鉴别分析(LDA)^[1]所抽取的特征具有良好的可分性，目前已被公认为模式识别中最好的代数特征抽取方法之一。近年来，Fisher 线性鉴别分析在模式识别领域得到了广泛的应用和扩展^[2-4]，但是对于处理诸如人脸识别这种典型的多类高维小样本问题时却存在两个公认的缺点：首当其冲的是“小样本问题”，特别是在人脸识别这样的高维小样本问题中，往往会造成 Fisher 线性鉴别准则由于类内散布矩阵奇异而无法直接求解最优投影轴，即此时的 Fisher 鉴别准则是“病态的”。目前，“小样本问题”已成为 LDA 中公认的难题之一，引起了人们广泛的研究兴趣，近年来对其做了一系列地研究和改进^[5-7]。但这些方法大都是在原始的 Fisher 鉴别准则下所作的改进，由于该准则本身存在的缺陷，所以并没有从根本上解决这一困难。最近，

宋枫溪等^[8]，刘永俊等^[9,10]提出了一种散度差鉴别准则，与 Fisher 鉴别准则不同的是，它是利用类间散度与类内散度之差作为分类器准则和线性鉴别分析准则，这样，从理论上根本地消除了 Fisher 鉴别准则中存在的因类内散布矩阵奇异而无法求解的问题。

在人脸识别这样的多类模式识别问题中，线性鉴别分析存在的另一大缺陷就是“次优性问题”^[11]。不论传统的 Fisher 准则还是散度差鉴别准则所寻找的最优投影方向(最优投影轴)，对于分类错误率或风险而言都不是最优的^[11]。为此，Loog 等^[11]提出了一种近似加权的 LDA 算法，但是由于其计算的复杂性以及小样本问题的存在，该方法并不适合直接应用于人脸识别这样的高维小样本问题中。

本文针对传统的线性鉴别分析中存在的“小样本问题”和“次优性问题”两大缺陷，通过在构造散布矩阵时引入简单的自动加权函数，对最大散度差鉴别准则做进一步地修正，提出了一种基于修正的最大散度差鉴别准则的线性鉴别分析方法。该方法集中了最大散度差鉴别分析与近似加权方

2006-06-12 收到，2007-04-02 改回

江苏省高校自然科学基金(05KJB520152)和江苏省博士后科研资助计划项目资助课题

法的优越性, 有效地解决了人脸识别这样的多类高维小样本模式识别问题中的两大困难。在 ORL 和 AR 人脸数据库上的实验证明了本文方法不但是有效的, 而且适应性更强。

2 最大散度差线性鉴别分析

设 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_c$ 为 c 个模式类, 模式样本 $\mathbf{X}_i (i = 1, \dots, N)$ 为 n 维实向量, 第 i 类样本的平均向量为 $\bar{\mathbf{m}}_i = E(\mathbf{x}/\omega_i)$, 所有样本的平均向量为 $\bar{\mathbf{m}} = E(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^c p(\omega_i) \bar{\mathbf{m}}_i$ 。用 S_b, S_w 分别表示模式样本的类间散布矩阵、类内散布矩阵:

$$S_b = \sum_{i=1}^c p(\omega_i) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}})^T \quad (1)$$

$$S_w = \sum_{i=1}^c p(\omega_i) E[(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i) (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i)^T] \quad (2)$$

其中 $p(\omega_i)$ 为第 i 类模式的先验概率, 一般每类设为相同 $p(\omega_i) = 1/c, i = 1, \dots, c$ 。

假设由一组最优投影轴构成的投影矩阵 \mathbf{W} , 模式样本向量在这个投影矩阵上投影后的类间、类内散布矩阵为 \tilde{S}_b, \tilde{S}_w , 则:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_b &= \sum_{i=1}^c p(\omega_i) (\mathbf{W}^T \bar{\mathbf{m}}_i - \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{m}}) (\mathbf{W}^T \bar{\mathbf{m}}_i - \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{m}})^T \\ &= \mathbf{W}^T \sum_{i=1}^c p(\omega_i) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}})^T \mathbf{W} = \mathbf{W}^T S_b \mathbf{W} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_w &= \sum_{i=1}^c p(\omega_i) E[(\mathbf{W}^T \mathbf{X}_j - \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{m}}_i) (\mathbf{W}^T \mathbf{X}_j - \mathbf{W}^T \bar{\mathbf{m}}_i)^T] \\ &= \mathbf{W}^T \sum_{i=1}^c p(\omega_i) E[(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i) (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i)^T] \mathbf{W} \\ &= \mathbf{W}^T S_w \mathbf{W} \quad (4) \end{aligned}$$

定义最大散度差鉴别准则函数如下:

$$\left. \begin{aligned} J_s(\varphi) &= \text{tr}(\tilde{S}_b) - \text{tr}(\tilde{S}_w) = \text{tr}(\varphi^T S_b \varphi - \varphi^T S_w \varphi) \\ &= \text{tr}(\varphi^T (S_b - S_w) \varphi) \\ \varphi^T \varphi &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

同 Fisher 线性鉴别分析一样, 最大散度差线性鉴别分析的目标也是找到一组有效的最优投影轴, 使得所有的模式样本在这组投影轴上投影后的类间散度最大、类内散度最小。最大化散度差准则函数 $J_s(\varphi)$ 的一组最优投影轴 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d$ 一般取为特征方程 $(S_b - S_w)\varphi = \lambda\varphi$ 的 d 个最大的特征值所对应的特征向量。与 Fisher 鉴别准则的特征分解相比, 把对 S_w 这样一个庞大矩阵的求逆过程变为了求一个散度差矩阵 $(S_b - S_w)$, 从而使得计算的复杂度大大降低。更重要的是, 由于避免了对 S_w 的求逆, 再也不用担心由于小样本问题带来的困扰了^[9]。

3 修正的最大散度差线性鉴别分析

虽然最大散度差线性鉴别分析成功地避免了传统的 Fisher 线性鉴别分析中存在的“小样本问题”, 但是最大散度差鉴别分析在理论上并不是十全十美的, 同 Fisher 线性鉴别分析一样仍然存在另一大缺陷——“次优性问题”。具体

分析如下:

为分析方便, 式(1)定义的类间散布矩阵 S_b 亦可改写为如下形式^[10]:

$$S_b = \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^c p(\omega_i) p(\omega_j) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}_j) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}_j)^T \quad (6)$$

根据式(3), 相应地:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_b &= \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^c p(\omega_i) p(\omega_j) (\varphi^T \bar{\mathbf{m}}_i - \varphi^T \bar{\mathbf{m}}_j) \\ &\quad \cdot (\varphi^T \bar{\mathbf{m}}_i - \varphi^T \bar{\mathbf{m}}_j)^T \quad (7) \end{aligned}$$

由最大散度差鉴别分析的物理意义, 式(5)的准则函数可分解为如下两部分:

$$\max \text{tr}(\tilde{S}_b) \quad (8)$$

$$\min \text{tr}(\tilde{S}_w) \quad (9)$$

由式(7)可得, 式(8)中 $\text{tr}(\tilde{S}_b) = \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^c p(\omega_i) p(\omega_j) (\varphi^T \bar{\mathbf{m}}_i$

$-\varphi^T \bar{\mathbf{m}}_j)^T (\varphi^T \bar{\mathbf{m}}_i - \varphi^T \bar{\mathbf{m}}_j)$ 表示的是第 i 类和第 j 类样本在低维空间中的平均平方距离。假设一个 n 维的样本投影到二维空间, 如果其中有一类样本远离其它所有类的样本, 这样寻找的最佳鉴别投影方向会将该类样本与其它类别尽可能地分开。由此如图 1 所示, 在最大化低维空间中每两类之间的平均平方距离时, 距离较大的类间距离在特征值分解过程中起了主导作用。这相当于夸大了类间距离较大的、可分性很好的类的作用, 而使那些类间距离本来较小的类部分重叠, 从而影响了分类准确率。

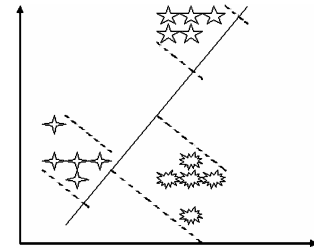


图 1 修正之前的投影方向

因此, 求解最优投影轴时最大化 $\text{tr}(\tilde{S}_b)$, 并不同于最小化分类错误率, 最大散度差鉴别分析仍然存在“次优性问题”。

能不能找到一种简单有效的方法改善这种“次优性问题”, 而又不至于使算法的复杂度大幅度提高呢? 为此, 引入如下简单加权的策略对类间散布矩阵、类内散布矩阵的构造加以修正。修正后的散布矩阵 \hat{S}_b, \hat{S}_w 定义如下:

$$\begin{aligned} \hat{S}_b &= \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^c p(\omega_i) p(\omega_j) \omega_b(d_{ij}) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}_j) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}_j)^T \\ &= \omega_b(d_{ij}) \sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^c p(\omega_i) p(\omega_j) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}_j) (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}_j)^T \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_w &= \sum_{i=1}^c p(\omega_i) E[\omega_w(d_j^i) (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i) (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i)^T] \\ &= \omega_w(d_j^i) \sum_{i=1}^c p(\omega_i) E[(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i) (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i)^T] \quad (11) \end{aligned}$$

其中 $d_{ij} = \sqrt{(\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}_j)^T (\bar{\mathbf{m}}_i - \bar{\mathbf{m}}_j)}$, 表示第 i 类和第 j 类模式样本之间的欧氏距离, 反映了两类样本的类间离散度。
 $d_j^i = \sqrt{(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i)^T (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{m}}_i)}$, 表示第 i 类中第 j 个样本偏离中心的欧氏距离, 反映了第 i 类样本的分散程度。
 $\omega_b(d_{ij})$ 为类间加权函数, 与文献[11]不同的是, 为降低类间离散度较大的类对准则函数中寻找最优投影轴的主导作用, 本文采用的是关于 d_{ij} 递减, 且下降速度大于平方距离 d_{ij}^2 的简单加权函数 $\omega_b(d_{ij}) = d_{ij}^{-q} / \left(\sum_{i=1}^{c-1} \sum_{j=i+1}^c d_{ij}^{-q} \right)$, q 取为大于 2 的整数。同时, 为了使修正后的鉴别准则使投影后同类的样本分布更加集中, 引入类内加权函数 $\omega_w(d_j^i) = (d_j^i)^q / \sum_{j=1}^{N_i} (d_j^i)^q$ 。另外, 为了进一步改进最大散度差准则, 引入整体加权系数 α 用来调整类间散度和类内散度所起的作用。

定义修正后的最大散度差鉴别准则函数如下:

$$\left. \begin{aligned} J_s(\hat{\varphi}) &= \text{tr}(\hat{\varphi}^T \hat{S}_b \hat{\varphi}) - \alpha \cdot \text{tr}(\hat{\varphi}^T \hat{S}_w \hat{\varphi}) \\ &= \text{tr}(\hat{\varphi}^T (\hat{S}_b - \alpha \cdot \hat{S}_w) \hat{\varphi}) \\ \hat{\varphi}^T \hat{\varphi} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

显然, 在多元模式识别问题中, 经过修正后的最大散度差鉴别准则函数的物理意义是突出那些类间离散度较小、类内离散度较大的模式样本对于寻找最优投影轴所作的贡献。如图 2 所示, 修正后所得的最优投影轴更有利于分类。

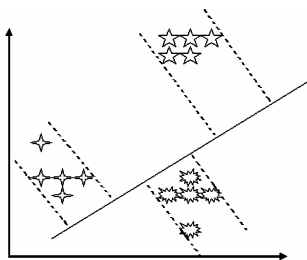


图 2 修正之后的投影方向

4 实验结果与分析

ORL 标准人脸库由 40 人, 每人 10 幅 112×92 图像组成, 其中有些图像是拍摄于不同时期的; 人的脸部表情和脸部细节有着不同程度的变化。图 3 是其中 3 人的 30 幅图像。



图 3 ORL 人脸图像数据库中的图像

本实验中, 分别以每人的前 2, 3 幅图像作为训练样本, 剩余图像作为测试样本。本文在做线性鉴别分析时, 由于样

本向量的维数太高(达 10304!), 在现有的机器上构造相应的 10304×10304 的类内散布矩阵和类间散布矩阵都是不现实的。因此, 本文先用 PCA 降维, 再用线性鉴别分析的方法来验证修正后的最大散度差鉴别分析(MMSLDA)的有效性。图 4 为库中图 3 所示的 3 类人脸图像分别采用原始的最大散度差线性鉴别分析(a)以及本文修正后的方法(b), 投影到二维空间后的分布情况。图 5, 图 6 为在取不同的训练样本数时, 本文方法(经过试验选取效果较好时, 即 $q = 4, \alpha = 0.5$)和最大散度差鉴别分析(MSLDA)以及经典的 Fisher 线性鉴别分析(FLDA)、统计不相关的 Fisher 线性鉴别分析(UFLDA)方法, 在最近邻分类器(1NN)下的识别结果。

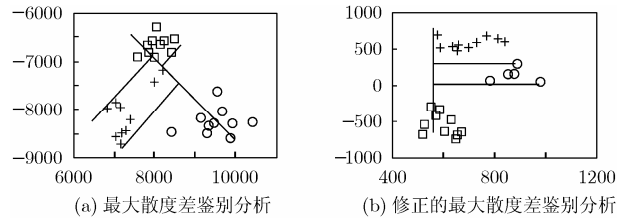


图 4 修正前后两种方法投影到二维空间中人脸图像的分布

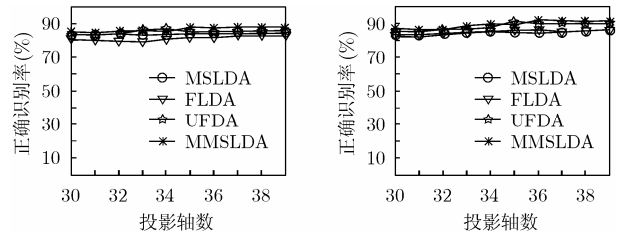


图 5 训练样本数为 2 时识别率 图 6 训练样本数为 3 时识别率

表 1 4 种方法在最近邻分类器下最优识别率时特征抽取与时间对照表

识别方法	特征抽取时间(s)	分类时间(s)	总时间(s)	
FLDA	(35)	24.500	0.228	24.728
UFLDA	(35)	24.500	0.228	24.728
MSLDA	(33)	22.859	0.144	23.003
MMSLDA	(42)	22.078	0.175	22.235

注: 括号内为所取的投影轴数。

此外, 本实验还在一个规模较大的 AR 人脸图像数据库上进行。它由 120 人, 每人 26 张在不同时期、光照、姿态、表情、遮挡等条件下拍摄的人脸图像组成。本实验仅考察无遮挡的情况, 采用 1-7 张作为训练样本, 14-20 张作为测试样本。图 7 为其中某人经过规范化的图像。表 2 为 FLDA, UFLDA, MSLDA 以及修正的 MSLDA 方法在最近邻分类器下取不同投影轴数时的最优识别结果比较。



图 7 AR 人脸库中某人经过灰度均衡化处理后的 14 幅规范化人脸图像

以上实验数据验证了本文提出的算法以及修正方案的有效性。从图 4 中投影后样本的分布来看,显然图 4(b)所示的修正的最大散度差鉴别分析比修正之前所抽取的鉴别特征更加有利于分类。从图 5 中的数据可以发现,此时由于每类训练样本数较少(为 2),传统的基于 Fisher 鉴别准则的线性鉴别分析方法存在“类内散布矩阵奇异”的问题,使得正确识别率低于 MSLDA 方法。而图 6 中显示,由于训练样本数相对增加,在类内散布矩阵非奇异的情况下,FLDA 和 UFLDA 方法正确识别率优于 MSLDA 方法。但是从图 5,图 6 均可以发现,修正后的 MMSLDA 方法的总体识别效果均优于其他几种方法。这一方面因为采用加权策略后使原始样本类间距离较小的类在投影后更加分散。另一方面,也使得类内散布较大的类投影以后更加集中。这在表 2 中都得到了很好的验证。另外从表 1 和表 2 所示的时间开销来看,本文方法与 MSLDA 方法相当,好于基于 Fisher 鉴别准则的线性鉴别分析方法。

表 2 两种方法在最近邻分类器下最优识别率(%)
时特征抽取与时间(s)对照表

识别方法	最优识别率 (投影轴数)	特征抽取时间	分类时间	总时间
FLDA	63.98 (38)	76.96	3.40	80.36
UFLDA	68.74 (39)	115.32	3.50	118.82
MSLDA	62.86 (48)	63.19	4.08	67.27
MMSLDA	74.52 (43)	66.23	3.81	70.04

注:括号内为所取的投影轴数。

5 结束语

最大散度差线性鉴别分析从根本上成功地避免了人脸识别中存在的典型“小样本问题”,本文通过对准则函数的进一步修正,针对其存在的“次优性”问题做了有效的改进,提出了一种新的修正的最大散度差鉴别分析方法。实验结果表明,该方法更加充分地利用了训练样本的类别信息,使新的鉴别准则所确定的最优投影轴,在物理意义上更加有利于正确分类。最后在 ORL、AR 标准人脸库上的实验结果验证了本文算法的有效性。

参 考 文 献

- [1] Fisher R A. The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics*, 1936, 22(2): 178-188.
- [2] Foley D H and Sammon J W. An optimal set of discriminant vectors. *IEEE Trans. on Computer*. 1975, 24(3): 281-289.
- [3] Liu C J and Wechsler H, Robust coding schemes for indexing

- and retrieval from large face databases. *IEEE Trans. Image Processing*, 2000, 9(1): 132-137.
- [4] 金忠, 杨静宇, 陆建峰. 一种具有统计不相关性的最优鉴别向量集. *计算机学报*, 1999, 22(10): 1105-1108.
Jin Z, Yang J Y, and Lu J F. An optimal set of uncorrelated discriminant features. *Chinese Journal of Computers*, 1999, 22(10): 1105-1108.
 - [5] Hong Z Q and Yang J Y, et al. Optimal discriminant plane for a small number of samples and design method of classifier on the plane. *Pattern Recognition*, 1991, 24(4): 317-324.
 - [6] Liu K and Yang J Y, et al. An efficient algorithm for Foley-sammon optimal set of discriminant vectors by algebraic method. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 1992, 6(5): 817-829.
 - [7] Chen L F and Mark-Liao, et al. A new LDA-based face recognition system which can solve the small sample size problem [J]. *Pattern Recognition*, 2000, 32(3): 1713-1726.
 - [8] 宋枫溪, 程科, 杨静宇. 最大散度差和大间距线性投影与支持向量. *自动化学报*, 2004, 30(6): 890-896.
Song F X, Cheng K, and Yang J Y. Maximum scatter difference, large margin linear projection and support vector machines. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(6): 890-896.
 - [9] 刘永俊, 陈才扣. 最大散度差鉴别分析及人脸识别. *计算机工程与应用*, 2006, 42(34): 208-210.
Liu Y J and Chen C K. Maximum scatter difference discriminant analysis and face recognition. *Computer Engineering and Applications*, 2006, 42(34): 208-210.
 - [10] 刘永俊, 陈才扣. 基于差空间的最大散度差鉴别分析及人脸识别. *计算机应用*, 2006, 26(10): 2460-2462.
Liu Y J and Chen C K. Maximum scatter difference discriminant analysis in residual space and face recognition. *Journal of Computer Applications*, 2006, 26(10): 2460-2462.
 - [11] Loog M, Duin R P W, and Haeb-Umbach R. Multiclass linear dimension reduction by weighted pairwise Fisher criteria [J]. *IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.*, 2001, 23(7): 762-766.

- 刘永俊: 男, 1981 年生, 硕士生, 研究方向为模式识别、人脸识别。
陈才扣: 男, 1967 年生, 博士后, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为模式识别理论与应用、生物特征识别。
王正群: 男, 1965 年生, 副教授, 主要研究方向为神经网络、手写体字符识别。