

基于均匀圆阵的模式空间矩阵重构算法

高书彦^① 陈辉^① 王永良^① 张洋^②

^①(空军雷达学院雷达兵器运用工程重点实验室 武汉 430019)

^②(武警北京指挥学院 北京 100012)

摘要: 该文提出了一种新的均匀圆阵解相干方法, 这里称为模式空间矩阵重构算法(MODE-TOEP)。该算法对均匀圆形阵列(UCA)的输出信号进行模式激励, 使其成为模式空间内的虚拟阵列(VULA); 在此基础上重构一个 Toeplitz 矩阵, 成功地估计出相干源的来波方向。MODE-TOEP 算法不需要进行平滑计算, 从而减少了计算量。计算机仿真实验表明 MODE-TOEP 算法比传统的模式空间平滑类算法(MODE-FSS, MODE-FBSS)有更好的估计性能。

关键词: 均匀圆阵; DOA 估计; 模式激励; 相干信源

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)12-2832-04

The MODE-TOEP Algorithm Based on Uniform Circular Array

Gao Shu-yan^① Chen Hui^① Wang Yong-liang^① Zhang Yang^②

^①(The Key Research Lab of Air Force Radar Academy, Wuhan 430019, China)

^②(Police Army Beijing Command Academy, Beijing 100012, China)

Abstract: The MODE-TOEP algorithm is proposed to estimate DOA of coherent signals on a Uniform Circular Array (UCA). Firstly, the mode excitation method is used to transform the UCA in element space into a virtual ULA (VULA) in mode space. Then a Toeplitz matrix can be reconstructed to estimate DOA of coherent signals successfully. MODE-TOEP algorithm has less computational burden due to non-spatial smoothing. Simulation results show that MODE-TOEP algorithm is effective and has a better performance compared with conventional MODE-SS algorithm.

Key words: Uniform Circular Array (UCA); DOA estimation; Mode excitation method; Coherent signals

1 引言

智能天线利用移动用户之间的空间差异来实现通信容量倍增, 各用户的DOA作为反映用户空间位置的重要参量在智能天线系统中扮演着重要角色。在实际移动环境中, 同一移动用户信号经过各种反射体形成的多径信号, 通常被认为是相干的; 由于相干多径的存在, 采用传统的MUSIC算法^[1]和ESPRIT算法^[2]都无法正确地估计各多径的DOA。对于均匀线阵, 虽然有空间平滑法^[3-5]、子空间平滑法^[6]等可以估计相关信号源的DOA, 但是这些解相关方法却不能直接用于均匀圆阵中。针对这个问题, 文献[7-9]中提出把均匀圆阵转换为虚拟均匀线阵的方法, 由此得到的虚拟均匀线阵与普通均匀线阵一样, 具有平移不变性, 从而可以运用空间平滑去相关, 但是进行空间平滑的同时也增加了计算量。再者, 由于在智能天线系统中, 事先并不知道信号源的相关情况, 因此无法确定平滑次数。

文中提出一种新的均匀圆阵相干源DOA估计算法—MODE-TOEP算法, 该算法在模式空间变换和改进的

MUSIC算法^[10]的基础上, 成功地估计出来波的方向。不同的是改进的MUSIC算法是基于对称的均匀线阵(ULA)提出的, 而MODE-TOEP算法成功地将其用于均匀圆阵, 很好地解决了均匀圆阵中相干信源的DOA估计问题。与模式空间平滑类算法相比该算法不但解相干能力强、分辨力高、信噪比门限低、可以估计更多的相干源, 而且由于不需要进行平滑计算, 减少了计算量。

2 数据模型及阵列预处理

假设天线阵是在 xy 平面上的一个半径为 r 的圆阵, 圆周上均匀地分布着各向同性的 M 个阵元, 并选取圆阵天线的圆心为参考点, 采用球面坐标表示入射平面波的波达方向。如图 1 所示。

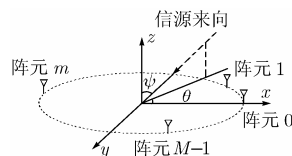


图 1 均匀圆阵模型

信源俯角 $\psi \in [0, \pi/2]$ 是原点到信源的连线与 z 轴之间的夹角, 方位角 $\theta \in [0, 2\pi]$ 则是原点到信源的连线在 xy 平面上的投影与 x 轴在逆时针方向上的夹角。这样, 阵列的第 m 个阵元与 x 轴的角度就可以表示为 $\gamma_m = 2\pi m/M$, 该处的位置向量为 $\mathbf{p}_m = (r \cos \gamma_m, r \sin \gamma_m, 0)$ 。考虑一波数为 $k_0 = 2\pi/\lambda$ (λ 为波长) 的窄带平面波, 在方向 $-\hat{\mathbf{r}}$ (其仰角和方位角分别为 ψ 和 θ) 上的传播。 $\hat{\mathbf{r}}$ 为单位向量, 其笛卡儿坐标 $\hat{\mathbf{r}} = (\sin \psi \cos \theta, \sin \psi \sin \theta, \cos \psi)$ 。某个时间, 在原点与在第 m 个阵元接收到的信号复包络之间的相位差为 $\varphi_m = e^{jk_0 \mathbf{p}_m} = e^{j\xi \cos(\theta - \gamma_m)}$, 其中 $\xi = k_0 r \sin \psi$ 。所以, 均匀圆阵的方向向量为

$$\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{a}(\xi, \theta) = [e^{j\xi \cos(\theta - \gamma_0)}, e^{j\xi \cos(\theta - \gamma_1)}, \dots, e^{j\xi \cos(\theta - \gamma_{M-1})}]^T \quad (1)$$

这里, 只讨论所有信源都与阵列共面的情形, 即 $\psi = \pi/2$ 。假设有 N 个窄带平面波入射, 在第 t 次快拍, 第 m 个阵元的接收数据为

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}(\theta_i) s_i(t) + n_m(t), \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2)$$

式中 $s_i(t)$ 为阵列接收的第 i 个信号; $\mathbf{a}(\theta_i)$ 为某一方向的导向矢量; $n_m(t)$ 为背景噪声, 则在第 t 次快拍总的接收数据为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{M-1}(t)]^T \quad (3)$$

式中 $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_N)]$ 为 $M \times N$ 维的阵列流形矩阵; $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)]^T$ 为接收天线参考点的接收信号; $\mathbf{N}(t) = [n_0(t), n_1(t), \dots, n_{M-1}(t)]^T$ 为均值为零的复高斯白噪声; 其协方差矩阵为 $\sigma^2 \mathbf{I}$, σ^2 为噪声的方差, \mathbf{I} 为单位矩阵。

由上面知识可知, 均匀圆阵的阵列流形矩阵 $\mathbf{A}(\theta)$ 不符合 Vandermonde 结构, 这使得许多适用于均匀线性阵列的估计方法不能直接用于均匀圆形阵列。为了解决这一问题, 类似文献[7-9], 这里运用模式激励法将阵列的输出进行变换使得

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{T} \mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(\theta) \mathbf{S}(t) + \tilde{\mathbf{N}}(t) \quad (4)$$

式中

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F} / M \quad (5)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{w}_{-k}, \mathbf{w}_{-k+1}, \dots, \mathbf{w}_k]^H \quad k = -h, \dots, 0, \dots, h \quad (6)$$

$$\mathbf{w}_k = [1, e^{j2\pi k/M}, \dots, e^{j2\pi k(M-1)/M}]^H \quad (7)$$

$$\mathbf{J} = \text{diag}\{1/j^k J_k(\beta)\} \quad (8)$$

其中 $h \approx 2\pi r/\lambda$ 为模式激励的最大模式数; $J_k(\beta)$ 为 k 阶第一类贝塞尔函数。

当满足阵元数 $M > 2h + 1$ 时, 变换后的阵列流形具有下面的近似形式:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-jh\theta_1} & \dots & e^{-jh\theta_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{jh\theta_1} & \dots & e^{jh\theta_N} \end{bmatrix} \quad (9)$$

可以看出: 均匀圆阵经模式空间转换成的虚拟均匀线阵与普通均匀线阵相似, 具有平移不变性, 从而可以运用解相关算法进行相干源的 DOA 估计。

3 MODE-TOEP 算法

改进的 MUSIC 算法是一种有效的去相干方法, 它适用于对称的均匀线阵中, 所幸的是由第二部分讨论可知, 均匀圆阵经模式空间变换可以得到一个具有 $K = 2h + 1$ 个模式元素的对称虚拟均匀线阵, 阵元间距为 d , 如图 2 所示。以虚拟均匀线阵的中央阵元为参考阵元, 并以这个阵元为对称点, 两边各有 h 个阵元。假设有 N 个相干信号入射, 则第 k 个阵元上的接收数据为

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) e^{jk\theta_i} + n_k(t) = s_1(t) \sum_{i=1}^N b_i e^{jk\theta_i} + n_k(t), \quad k = -h, \dots, 0, \dots, h \quad (10)$$

式中 $b_i = \rho_i e^{j\Delta\theta_i}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $\rho_1 = 1$, $\Delta\theta_1 = 0$, $\rho_i, \Delta\theta_i$ 分别为各信源相对 $s_1(t)$ 的幅度衰落因子和相位差。

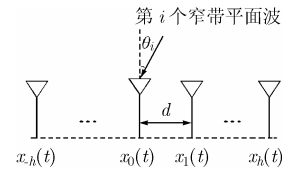


图 2 虚拟均匀线阵阵列模型

根据式(10)可得参考阵元的接收数据为

$$x_0(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) + n_0(t) = s_1(t) \eta + n_0(t) \quad (11)$$

其中 $\eta = \sum_{i=1}^N b_i$ 。

对于以上的阵列接收信号, 定义以下相关运算:

$$r(k) = E[x_0(t)x_k^*(t)] = \sum_{i=1}^N c_i e^{-jk\theta_i} + \sigma^2 \delta_{0k} \quad (12)$$

式中 $c_i = \left(\sum_{i=1}^N b_i \right) P_1 b_i^* = \eta P_1 b_i^*$; $[\ast]$ 为共轭运算; $P_1 = E[s_1(t) \cdot s_1^*(t)]$; $\sigma^2 = E[n_0(t)n_0^*(t)]$ 为中央阵元的噪声协方差,

$\delta_{0k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$ 。需要注意的是由于经过模式变换, 式(12)中噪声功率发生了变化。

从而可构成包含各信号波达方向信息的 Toeplitz 矩阵 \mathbf{R}_C :

$$\mathbf{R}_C = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(h) \\ r(-1) & r(0) & \dots & r(h-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-h) & r(-h+1) & \dots & r(0) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}_t(\theta) \mathbf{C} \tilde{\mathbf{A}}_t^H(\theta) + \sigma^2 \mathbf{I}_{h+1} \quad (13)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{A}}_t(\theta) = [\tilde{\mathbf{a}}_t(\theta_1), \tilde{\mathbf{a}}_t(\theta_2), \dots, \tilde{\mathbf{a}}_t(\theta_N)] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-jh\theta_1} & \dots & e^{-jh\theta_N} \end{bmatrix} \quad (14)$$

由(14)式可知, $\tilde{\mathbf{A}}_t(\theta)$ 符合 Vandermonde 结构, 只要

$\theta_i \neq \theta_j (i \neq j)$, 它们的各列线性无关, $\text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}_i(\theta)) = N$ 。又因为 $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_N)$, 只要各信号均不为 0, 即 $c_i \neq 0$, 则 \mathbf{C} 满秩, 这样 \mathbf{C} 的秩与信号相关性无关, 则 $\text{rank}(\mathbf{R}_C) = \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}_i(\theta)) = N$, 因此达到了去相干的目的。对 \mathbf{R}_C 进行特征值分解, 它将有 N 个大特征值, $h+1-N$ 个小特征值(对应为 σ^2)。如果令他们对应的特征向量分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, \mathbf{v}_{N+1}, \dots, \mathbf{v}_{h+1}$, $\Phi_s = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N\}$ 构成信号子空间, $\Phi_n = \text{span}\{\mathbf{v}_{N+1}, \dots, \mathbf{v}_{h+1}\}$ 构成噪声子空间, 则可类似于 MUSIC 算法构成空间谱:

$$P_{\text{MODE-TOEP}} = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{a}}_i^H(\theta)\mathbf{E}_n\|^2} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{E}_n = [\mathbf{v}_{N+1}, \dots, \mathbf{v}_{h+1}]$, 于是, $P_{\text{MODE-TOEP}}$ 的 N 个峰值对应于入射信号的 DOA 值 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。

由以上推导中可以看出, MODE-TOEP 算法是改进 MUSIC 算法的一种特殊情况, 不同的是这里的对称均匀线阵是由均匀圆阵通过模式变换得到的虚拟均匀线阵。MODE-TOEP 算法成功地将改进 MUSIC 算法用于均匀圆阵, 很好地解决了均匀圆阵相干源的 DOA 估计问题。

通过上述的讨论, 可以将该算法总结如下:

- (1) 通过模式激励法对均匀圆阵的接收数据加以变换, 即根据式(4)~式(8)得到变换后的数据 $\tilde{\mathbf{X}}(t)$;
- (2) 选择虚拟均匀线阵的中央阵元为参考阵元, 根据式(12)、式(13)构造矩阵 \mathbf{R}_C ;
- (3) 对重构的 Toeplitz 矩阵 \mathbf{R}_C 进行特征值分解, 得到数据的信号子空间与噪声子空间;
- (4) 根据式(15)进行 DOA 估计。

对于 MODE-TOEP 算法需要注意的是:

- (1) 在构造矩阵 \mathbf{R}_C 时, 此时的阵列的导向矢量变成 $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i) = [e^{-jh\theta_i}, \dots, 1, \dots, e^{jh\theta_i}]^T$;
- (2) 进行谱搜索过程中, 阵列流形已经变为式(14)的形式, 此时的阵列流形维数变为 $(h+1) \times N$ 。

由以上分析可以得出, 经过模式空间变换后, 模式空间平滑算法需要 K^2 次乘法(矩阵自相关运算), L_1 次(L_1 为平滑次数)加法以及 1 次除法才可得到需要的前后向平滑协方差矩阵; 而运用 MODE-TOEP 算法只需要 K 次乘法(如式(12)的相关运算)即可得到 \mathbf{R}_C , 运算量明显减少。再者, 模式空间平滑过程中, 噪声协方差阵已发生变化, 不再是空间白噪声, 因此需要进行广义特征值分解得到噪声子空间^[9]; 而由式(13)可以看出, 采用 MODE-TOEP 算法过程中, 噪声协方差阵为 $\sigma^2 \mathbf{I}_{h+1}$, 仍然是空间白噪声只是其功率有所变化, 因此只需常规特征值分解即可得到噪声子空间, 运算复杂度相比模式空间平滑算法进一步降低, 更利于工程实现。

4 算法仿真与分析

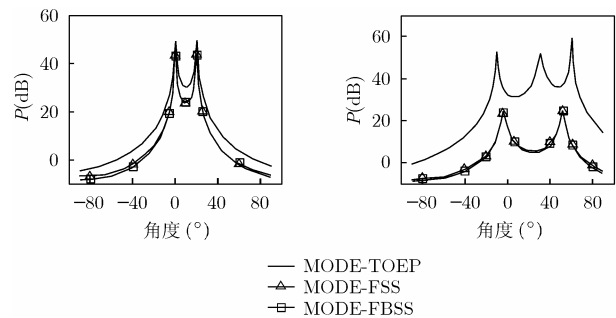
为了验证 MODE-TOEP 算法的有效性, 这里进行了仿真实验。实验中所使用的阵列天线为 10 阵元的均匀圆阵天

线, 系统的中心频率为 0.3GHz, 半径为 $1.5\lambda/\pi$, 最大相位模式 $h=3$, 该阵元可激发 7 个相位模式, 即可以形成阵元数为 7 的虚拟均匀线阵。快拍数均取 200。运用模式平滑算法时均进行了 3 次平滑。

实验 1 MODE-TOEP, MODE-FSS, MODE-FBSS 3 种算法的空间谱。

图 3 为不同条件下 MODE-TOEP 算法, MODE-FBSS 算法和 MODE-FSS 算法的空间谱与 DOA 的关系。图 3(a)为两个等功率的相干源, 入射角分别为 $0^\circ, 20^\circ$, 信噪比(SNR)为 20dB。图 3(b)为 3 个等功率的相干源, 入射角分别为 $-10^\circ, 30^\circ, 60^\circ$, 信噪比为 20dB。

由实验 1 的仿真中可以得出如下结论: 由图 3(a)可以看出, MODE-TOEP 算法可以成功地估计出相干源的 DOA, 说明了该算法的有效性; 从图 3(b)中可知, MODE-TOEP 算法能够成功估计 3 个相干源而模式空间平滑算法不能正确分辨来波方向, 说明该算法可以估计的相干源数目比模式空间平滑算法多, 解相干能力较强。



(a) 两个等功率的相干源 (b) 三个等功率的相干源
图 3 不同条件下 3 种算法的空间谱与 DOA 的关系

实验 2 3 种算法的统计性能比较。

仿真中进行了 200 次 Monte-Carlo 实验。图 4(a)为 3 种算法的 DOA 估计成功概率与信噪比的关系曲线。其中两相干源间隔为 20° 。当最大估计偏差低于两相干源间隔的 0.2 倍时, 认为成功。图 4(b) 为信噪比为 20dB 时, 3 种算法的 DOA 估计成功概率与信源角度间隔的关系曲线。图 4(c) 为 3 种算法的均方误差根与信噪比的关系曲线。

由实验 2 的仿真中可以得出如下结论: 由图 4(a)中曲线可以看出, 随着信噪比的增加 3 种算法的成功概率越来越大, 相对而言, MODE-TOEP 算法的成功估计概率最高, 而 MODE-FSS 算法的成功概率最低, 说明 MODE-TOEP 算法比模式平滑算法有相对较低的信噪比门限。由图 4(b)中曲线可以看出, 随着信源角度间隔的增大, 3 种算法的成功概率越来越大。相比之下, MODE-TOEP 算法在 17° 就可达到很好的性能, 而模式空间平滑类算法在 20° 才达到相同的效果, 说明相同条件下该算法的分辨力相对较高。由图 4(c)中曲线可以看出, 当信噪比低于 14dB 时, MODE-TOEP 算法的均

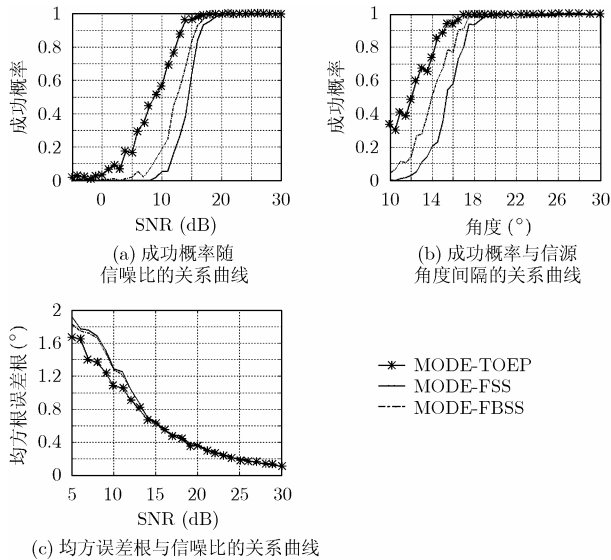


图 4 不同条件下 3 种算法的统计性能比较

方误差根小于模式空间平滑类算法, 说明其精度比较高; 当信噪比大于 14dB 时三者趋于一致, 但是并不能达到 0, 这是由于对于阵元数一定的均匀圆阵来说, 模式变换本身是一个近似的过程, 因此会带来近似误差, 该误差对精度有所影响。为减少该误差的影响, 可以增加均匀圆阵阵元数或保证分辨率的基础上减少模式空间的模式数。

综合以上两个实验可以得出, MODE-TOEP 算法相对模式空间平滑算法不但有较高的精度和分辨力, 而且有更低的信噪比门限和更强的解相干能力。估计性能明显优于模式空间平滑算法。

5 结束语

本文提出了一种新的圆阵相干信号的 DOA 估计方法。该算法运用模式激励法, 将均匀圆形阵列的阵列流形转化为模式空间内的 VULA, 在此基础上重构一个 Toeplitz 矩阵, 使其秩只与信号的波达方向有关, 而不受信号相关性的影响, 从而达到去相关的目的。虽然也降低阵列的有效孔径, 但是 MODE-TOEP 算法不需要平滑, 运算量小, 计算机仿真结果验证了该方法的有效性, 与模式空间平滑类算法相比该算法不但精度高、分辨力高, 而且有更低的信噪比门限和更强的解相干能力。

参 考 文 献

[1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter

estimation [J]. *IEEE Trans. on AP*, 1986, 34(2): 276-280.

- [2] Roy R and Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance technique [J]. *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, 37(7): 984-995.
- [3] Lai W K and Ching P C. A new approach for coherent direction of arrival estimation [J]. *ISCAS' 98 Proceedings of the 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Hong Kong, 1998*, 5: 9-12.
- [4] Haber F and Zoltowski M. Spatial spectrum estimation in a coherent signal environment using an array in motion [J]. *IEEE Trans. on AP*, 1986, 3(3): 301-310.
- [5] Krim H and Viberg M. Two Decades of Array Signal Processing [J]. *IEEE Trans. on SP*, 1996, 13(4): 67-94.
- [6] Jeng S S, Lin H P, and Okamoto G, *et al.* Multipath direction finding with subspace smoothing [A]. *IEEE ICASSP [C]. Munich: IEEE, 1997*, 5: 3485-3488.
- [7] Wax M and Sheinvald J. Direction finding of coherent signals via spatial smoothing for uniform circular arrays [J]. *IEEE Trans. on AP*, 1994, 42(5): 613-619.
- [8] Eiges R and Griffiths H D. Mode space spatial spectral estimation for circular arrays [J]. *IEE Proceedings F Radar, Sonar and Navigation, London, 1994*, 14: 300-306.
- [9] 马常霖, 彭应宁, 田立生等. 均匀圆阵相干信源 DOA 估计的模式平滑算法[J]. *电子科学学刊*, 1998, 20 (1): 14-19.
- Ma Cang-Lin, Peng Ying-ning, and Tian Li-sheng, *et al.* Mode space smoothing algorithm for DOA estimation of coherent source with Uniform Circular Array [J]. *Journal of Electronics*, 1998, 20 (1): 14-19.
- [10] 韩芳明, 张守宏. 用改进的 MUSIC 算法实现相干多径信号分离[J]. *系统工程与电子技术*, 2004, 26(6): 721-723.
- Han Fan-ming, and Zhang Shou-hang. Separation of coherent multi-path signals with improved MUSIC algorithm [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(6): 721-723.

高书彦: 女, 1980 年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理与智能天线。

陈 辉: 男, 1974 年生, 副教授, 主要研究领域为空间谱估计、阵列信号处理等。

王永良: 男, 1965 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为雷达技术、阵列信号处理。

张 洋: 男, 1980 年生, 助教。