

一种基于余弦函数的相位干涉仪阵列 DOA 估计算法

魏合文 王 军 叶尚福

(西南电子电信技术研究所 成都 610041)

摘 要: 该文针对相位干涉仪阵列估计波达角过程中的相位差模糊问题, 提出一种基于余弦函数的波达角估计算法, 并分析了该算法的估计值唯一性条件, 该条件比相位差解模糊算法的唯一性条件更宽松。不同情况下的仿真结果表明, 只要阵列的基线距离满足估计值唯一性条件, 采用该算法能够有效进行高精度的波达角估计。

关键词: 波达角估计; 相位干涉仪; 余弦函数

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)11-2665-04

An Algorithm of Estimation Direction of Arrival for Phase Interferometer Array Using Cosine Function

Wei He-wen Wang Jun Ye Shang-fu

(Southwest Electronics and Telecommunication Technology Research Institute, Chengdu 610041, China)

Abstract: In the background of phase ambiguity in using phase interferometer to estimate the direction of arrival, a new algorithm is proposed for estimation Direction Of Arrival (DOA) using phase interferometer array with cosine function. The condition on the uniqueness of the estimation direction of arrival is obtained, which is looser than the one of the other algorithms. Simulation results under different condition show that as far as the uniqueness is satisfied, this new algorithm is available for the estimation direction of arrival.

Key words: Estimation Direction of Arrival (DOA); Phase interferometer; Cosine function

1 引言

对辐射源进行波达角(Direction of Arrival, DOA)估计的相位干涉仪阵列在军事和民用领域内都有重要而广泛的应用^[1-4], 它具有精度高, 结构简单, 覆盖频带宽等优点。一般的单基线相位干涉仪存在DOA估计精度和最大不模糊角度之间的矛盾^[5, 6]。通常采用多基线的方法来解决这一矛盾, 其中最短的基线小于半波长, 从而在较大范围内获得一个无模糊的角度^[5, 6]。但是, 宽带测向中, 接收天线要求覆盖较宽的频率范围, 为保证信号的接收效果, 天线阵列的最短基线长度大于最高频率的半波长, 使其在高频段必然出现相位差模糊问题^[6]。

为了解决这一问题, 文献[7, 8]均提出了基于参差距离的相位差解模糊算法, 要求基线满足一定的参差关系; 文献[8]研究了在噪声条件相位干涉仪解模糊中的若干问题; 文献[7]在参差距离的基础上进行多维的整数搜索实现解模糊; 文献[9]放宽了基线距离参差关系的约束, 只要求所有基线距离的最大公因子为 1, 同时将多维搜索将为二维整数搜索, 减少了计算量; 文献[10]提出了基于二次相位差的 DOA 估计算法, 进一步降低了计算量, 提高了正确解模糊的概率。

以上算法都是从相位干涉仪线性阵列的多基线相位差模糊这一问题入手提出的。而在实际中往往需要使用平面阵列, 即使是线性阵列, 阵元位置也会有一定的误差。为此,

本文根据相关干涉仪阵列的测量相位差与信号波达相位差这两者在本质上具有很强的相关性的特点, 提出了基于余弦函数的相位干涉仪阵列波达角估计算法。相位干涉仪阵列的 DOA 最优估计值是使均方误差最小的信号入射角。不过, 观测相位差和信号波达相位差相差若干个 2π , 不能采用平方函数作为“均方”运算。采用余弦函数来代替传统意义上的均方运算, 既体现了均方函数是偶函数的性质, 又体现了角度量 2π 周期性差别。本文在这个思路下提出的一种基于余弦函数的相位干涉仪任意阵列的波达角估计算法, 相对于文献[7-11]中的算法具有两个优点。第一, 本算法不对相位干涉仪阵列的基线比提出任何约束, 只对基线距离提出了更为宽松的约束, 它既适用于线性阵列, 也适用于其他任意平面阵列。第二, 因为该算法采用了基于余弦函数的误差最小准则, 进行波达角估计, 不需要多维周期模糊数的搜索, 因此该算法相对于文献[7-11]中算法, 运算量较小。

本文的第 2 节提出了基于余弦函数的相位干涉仪阵列的波达角估计算法, 第 3 节分析了该算法估计值唯一性条件以及算法的性能, 第 4 节对该算法进行了仿真验证。

2 基于余弦函数的相位干涉仪阵列的 DOA 估计算法

2.1 相位干涉仪阵列

考虑在同一条直线上分布有 $N + 1$ 个阵元的相位干涉仪阵列, 以第 1 个阵元为基准, 构成 N 个基线的相位差, 对应的基线长度分别为 D_1, D_2, \dots, D_N , 考虑辐射源处于远场位

置,接收信号的波长为 λ ,波达角为 θ 的情况,如图1所示。相位干涉仪阵列的观测相位差 φ_n 和信号波达相位差 $\phi_n(\theta)$ 关系^[7-11]如下:

$$\varphi_n + 2M_n\pi = \phi_n(\theta) + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 $\varphi_n \in [-\pi, \pi)$, $\phi_n(\theta) = \frac{2\pi D_n}{\lambda} \sin(\theta)$, M_n 为周期模糊数, v_n 为观测噪声。假设观测噪声是零均值的独立同分布的噪声。

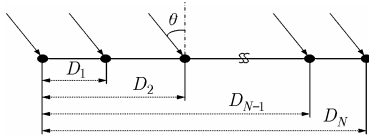


图1 相位干涉仪阵列的几何示意图

在式(1)中,当信号入射方向为 θ 时,信号到达的相位差 $\phi_n(\theta)$ 和观测相位差 φ_n 之间,在本质上具有很强的关联性,而在其他信号入射方向上相关性明显减弱了。

2.2 基于余弦函数的DOA估计算法

对于式(1)变形为

$$v_n = \varphi_n + 2M_n\pi - \phi_n(\theta) \quad (2)$$

在估计问题中,往往选择使均方差最小的准则来体现观测相位差与波达相位差两者之间的相关性。显然,由于无法确定周期模糊数 M_n ,不能使用平方函数使“均方”误差最小;而余弦函数既是偶函数,又具有周期性,可以作为准则函数来体现 $\phi_n(\theta)$ 和 φ_n 之间的相关性,即

$$\cos(v_n) = \cos(\varphi_n + 2M_n\pi - \phi_n(\theta)) = \cos(\varphi_n - \phi_n(\theta)) \quad (3)$$

由式(3)可以看出,当不存在误差时, $\phi_n(\theta)$ 和 φ_n 之间的相关性达到最大。那么有观测误差的情况下,最优的波达角就是在观测范围 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 中,使准则函数达到最大所对应的角度,即对应的波达角最优估计为

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \sum_{n=1}^N \cos \left[\frac{2\pi D_n}{\lambda} \sin(\theta) - \varphi_n \right] \quad (4)$$

3 波达角估计算法分析

3.1 波达角估计值唯一性的条件

在引入余弦函数作为准则函数的同时,也导致了由于余弦函数周期性的特点而使式(4)可能存在多个波达角估计值的问题。下面讨论波达角估计值唯一性的条件。

假设存在 θ' 也满足式(4),其中 $\theta' \in [-\pi/2, \pi/2]$ 且 $\theta' \neq \hat{\theta}$ 。那么

$$\begin{aligned} & \cos \left[\frac{2\pi D_n}{\lambda} \sin(\theta') - \varphi_n \right] - \cos \left[\frac{2\pi D_n}{\lambda} \sin(\hat{\theta}) - \varphi_n \right] \\ & = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5)$$

即对任意噪声 v_n ,式(5)变为

$$\sin \left[\frac{\pi D_n}{\lambda} (\sin \theta' - \sin \hat{\theta}) \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

显然,总存在基线距离 D_n 使

$$\frac{\pi D_n}{\lambda} (\sin \theta' - \sin \hat{\theta}) = k\pi, \quad k \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

成立,从而说明了波达角估计不唯一性。那么需要选择合适的基线距离 D_n , $n = 1, 2, \dots, N$,使式(8)成立,就可以保证波达角估计值的唯一性。

$$\frac{1}{2} [\phi_n(\theta') - \phi_n(\hat{\theta})] \neq k\pi, \quad k \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

注意,该式提出的波达角唯一性条件,不需要对相位干涉仪阵列的基线距离提出要求,它只需要针对不同的孔径波长比情况下,单独调整不同的基线距离,来满足式(8)。显然,在实际中,这一条件比基线比约束更加宽松。

同样,也可以通过余弦函数的相关值来说明波达角估计的唯一性条件。采用任意一个方向的相位差数据和其他所有方向的相位差数据进行余弦函数相关,得到如图2所示的相关图。相关图的对角线为主瓣。其他为旁瓣。主瓣峰值对应的角度为波达角估计方向。旁瓣峰值对应的方向是潜在的可能存在错误估计的方向。当观测相位差数据存在噪声时,会影响主瓣峰值和旁瓣峰值的高度。那么抑制观测噪声的影响实质就是抑制旁瓣峰值的高度。这样就存在观测噪声情况的唯一性条件转化为对理论相位差数据的相关图旁瓣的抑制,式(8)就体现了这一约束。因此,它尽管是不存在相位差观测噪声下的波达角唯一性条件,但它实质是约束相关图旁瓣峰值的高度,保证旁瓣峰值不高于主瓣峰值,从而来体现容纳观测噪声的能力。

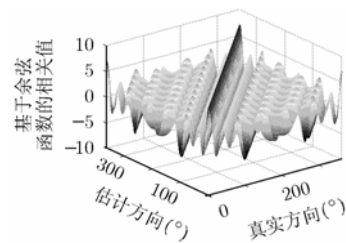


图2 均匀七阵元圆形阵列的基于余弦函数的相关图

值得注意的是,基于余弦函数的相位差数据的相关图,也体现了在整个测角范围内的波达角估计的情况:如图2所示,对于给定的波达角方向,该方向容易受到影响的方向可以通过旁瓣峰值来确定。随着波达角方向的不同,容易受到影响的方向也跟着改变。这说明了在测角范围内,不同的波达角方向对应的模糊方向是不同的,但是抑制相关图旁瓣的高度的约束对于整个测角范围内的方向都是一致的。

3.2 算法性能分析

从算法适用范围来看,基于解相位差模糊的算法^[7-11]针对线形阵列进行了讨论,如果将其扩展到平面阵列,基于搜索相位差模糊数的波达角估计算法将变得更加复杂;而基于余弦函数的波达角估计算法,只体现了观测相位差与信号波达相位差之间本质上的相关性,对阵列形式没有任何要求。

对于任意阵列而言, 波达角估计算法变为

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \sum_{n=1}^N \cos[\phi_n(\theta) - \varphi_n] \quad (9)$$

其中 $\phi_n(\theta)$ 是该任意相位干涉仪阵列的信号波达相位差, φ_n 是该阵列的观测相位差。显然, 只需要该阵列的每一基线距离满足使式(8)成立的估计值唯一性条件, 该算法就可以适用于任意形式的阵列结构, 实现全向的波达角估计。

从计算复杂度来看, 相对于解相位差模糊的算法^[4, 7-11]而言, 该算法仅仅需要 $2N$ 次加法运算, N 次余弦函数运算, 和一维峰值搜索。其中余弦函数运算可以采用高效的CORDIC^[12]算法实现, 它仅仅需要做移位和加法运算。而且它只与相位差数目 N 有关。这使得该算法计算量较小, 而且不会因为阵列形式的变化而增加运算量。

4 仿真与讨论

4.1 验证算法在线性阵列中的估计性能

为了评估以上算法的估计性能, 并与解模糊算法进行性能比较, 采用文献[9]中给定的线性阵列进行仿真: 假设相位干涉仪阵列的各个阵元以第 1 个阵元为基准, 线性分布在 X 方向, 它们的位置关系为 $(0, 41\lambda/2, -42\lambda/2, 45\lambda/2, -54\lambda/2, 81\lambda/2)$ 。目标处于 $\theta = \pi/4$ 的方向。容易验证该阵列位置关系满足估计值唯一性条件式(8)。

首先假设相位差的观测噪声相互独立, 且均匀分布在 $[-q, q]$ 的范围内, 其中 q 为一个正实数。将波达角正确估计定义为偏差实际波达角 1° 以内的估计角度。进行 10000 次 Monte-Carlo 试验, 可以得到正确估计波达角的统计概率和 q 的关系, 如图 3(a)所示。从图中可以看出, 对于解模糊的算法, 统计曲线中 $q = 0.4$ 是个转折点, 当 $q < 0.4$ 时, 正确估计概率的统计值为 1, 当 $q > 0.4$ 时, 会出现错误的估计结果, 而且随着 q 的增加, 正确概率随之减少。而对于本文提出的算法, 统计曲线中 $q = 0.6$ 是个转折点。说明本文提出的算法在更大的观测噪声中, 能够进行有效的波达角估计。

然后讨论相位差观测噪声为高斯白噪声, 其他条件与图 3(a)的仿真试验相同的情况, 假设相位差观测噪声之间独立同分布, 均值为 0, 方差为 σ_v^2 , σ_v^2 在 $[-30\text{dB}, 10\text{dB}]$ 的范围内变化, 进行 10000 次 Monte-Carlo 试验, 波达角正确估计概率和噪声方差的关系, 如图 3(b)所示。从图中可以看出, 随着观测噪声方差的增大, 得到正确波达角估计的概率随之减小。对于本文的算法, 当 $\sigma_v^2 < -10\text{dB}$ 时, 正确估计概率的统计值是 1, 而对于解模糊算法, 要求 $\sigma_v^2 < -15\text{dB}$ 时才能保证正确估计概率的统计值为 1。说明本文提出的算法在更大的观测噪声中, 能够进行有效的波达角估计。

在相位干涉仪阵列中进行波达角估计, 本文提出的算法明显优于基于解相位差模糊的波达角估计算法, 这是因为, 基于相位差解模糊的算法本质上是先将波达角估计过程分成两步: 首先完成相位差模糊数的估计, 然后利用正确的相位差模糊数求解波达角。显然, 该算法第一步的相位差模糊数

的错误估计会直接导致波达角的错误估计。即观测噪声既影响相位差模糊数的估计, 也同时影响信号波达角的估计。

而本文提出的基于余弦函数的波达角估计算法, 是直接体现观测相位差和信号波达相位差的内在本质上的联系, 观测噪声直接影响着波达角的估计。所以, 本文提出的算法能够明显提高波达角估计的抗噪声性能。

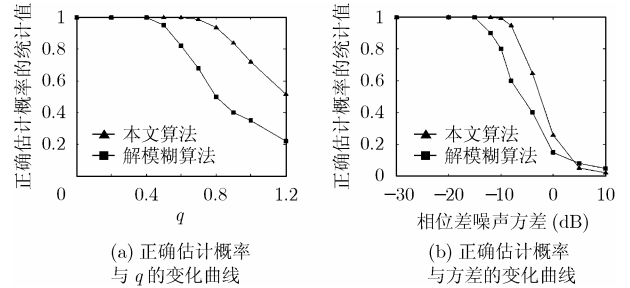


图 3 相位干涉仪线性阵列的正确估计概率随噪声的变化曲线

4.2 验证算法在平面阵列中的估计性能

假设五元均匀圆形阵列的孔径半径为 $r = 10\lambda$, 相邻的阵元之间构成五组相位差。验证它满足式(8)估计值唯一性条件。与线性阵列的情况下类似, 考虑两种噪声情况下, 波达角正确估计的概率随噪声变化的关系, 如图 4 所示。对于观测噪声是均匀分布于 $[-q, q]$ 的噪声, 如图 4(a)所示, 当 $q < 0.4$ 时, 正确估计的概率统计值为 1; 对于观测噪声是零均值, 方差为 σ_v^2 的高斯噪声, 如图 4(b)所示, 当 $\sigma_v^2 < -15\text{dB}$ 时, 正确估计概率统计值为 1。可见, 对于相位干涉仪平面阵列, 该算法仍然可以得到较好的估计效果, 而解模糊算法很难在这样的情况下进行波达角估计。

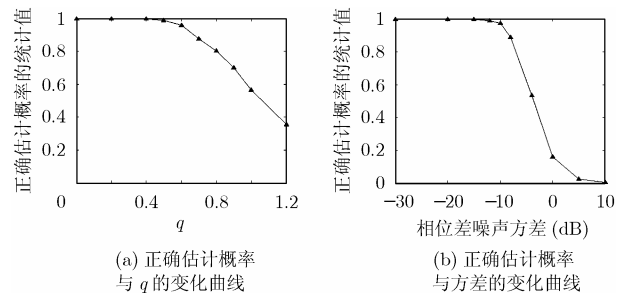


图 4 相位干涉仪平面阵列的正确估计概率随噪声的变化曲线

5 结束语

在相位干涉仪阵列中, 利用相位差进行波达角的估计时, 信号波达相位差存在着以 2π 为周期的模糊性。本文针对这一问题, 利用信号观测相位差与波达相位差在本质上具有相关性这一特点, 回避了相位差模糊数估计这一环节, 提出了基于余弦函数的相位干涉仪阵列波达角估计的算法, 并且分析了估计值唯一性条件, 给出了算法的适用范围和计算量分析, 仿真结果表明只要阵列的每一相位差对应的基线距

离满足算法估计值唯一性条件, 无论对于线性阵列, 还是平面阵列, 都能有效进行高精度的波达角估计, 而且, 估计效果优于基于相位差解模糊的波达角估计算法。

参 考 文 献

- [1] Dybdal R B. Monopulse resolution in interferometer. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System*, 1986, 22 (1): 177-183.
- [2] Messer H and Singal G. On the achievable DF accuracy of two kinds of active interferometers. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System*, 1996, 32(3): 1158-1164.
- [3] Kaufman M G. Radio interference phase channel combiner mod II. *IEEE Trans. on Space Electronics and Telemetry*, 1964, 10(1): 116-123.
- [4] 袁孝康. 相位干涉仪测向定位研究. 上海航天, 1999, (3): 1-7.
Yuan Xiao-kang, Study on direction-finding and position with phase interferometers. *Aerospace Shanghai*, 1999, (3): 1-7.
- [5] Sundaram K R and Ranjan K M. Modulo conversion method for estimation the direction of arrival. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System*, 2000, 36(4): 1391-1396.
- [6] William S C, YJames B, and Vernon L B. A noise in sensitive solution to an ambiguity problem in spectral estimation. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System*, 1989, 25(5): 729-732.
- [7] 龚亨铤, 袁俊泉, 等. 基于参差距离的相位差变化值的解模糊方法研究. 信号处理, 2003, 19(4): 308-311.
Gong X Y, Yuan J Q, and Sun X C. Analysis of the method in solving phase difference variety ambiguity with stagger distance difference. *Signal Processing*, 2003, 19(4): 308-311.
- [8] 周亚强等. 噪扰条件下多基线相位干涉仪解模糊算法. 电子与信息学报, 2005, 27(2): 259-261.
Zhou YQ, Chen Z, Huangfu K, and Sun Z K. Algorithm of solving multi-baseline interferometer phase difference ambiguity in noisy circumstance. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2005, 27(2): 259-261.
- [9] 龚亨铤, 皇甫堪, 袁俊泉. 基于相位干涉仪数组二次相位差的波达角估计算法研究. 电子学报, 2005, 33(3): 444-446.
Gong X Y, HuangFu K., and Yuan J Q. A new algorithm for estimation of direction of arrival based on the second-order difference of phase of interferometer array. *Acta Ectronica Sinica*, 2005, 33(3): 444-446.
- [10] 龚亨铤, 袁俊泉, 等. 基于相位干涉仪数组多组解模糊的波达角估计算法研究. 电子与信息学报. 2006 28(1): 55-59.
Gong X Y, Yuan J Q, and Su L H. A multi-pare unwrap ambiguity of interferometer array for estimation of direction of arrival. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2006, 28(1): 55-59.
- [11] 周亚强, 皇甫堪. 噪扰条件下数字式多基线相位干涉仪解模糊问题. 通信学报, 2005, 26(8): 16-21.
Zhou Y Q and HuangFu K. Solving ambiguity problem of digitized multi-baseline interferometer under noisy circumstance. *Journal on Communications*, 2005, 26(8): 16-21.
- [12] Volder J E. The CORDIC trigonometric computing technique. *IRE Trans. on Electronics Computer*, 1959, 8(3): 330-334.
- 魏合文: 男, 1981 年生, 博士生, 研究方向为信号与信息处理等.
王 军: 男, 1970 年生, 高级工程师, 研究方向为电子对抗技术等.
叶尚福: 男, 1938 年生, 研究员, 博士生导师, 中国工程院院士, 研究方向为电磁场与微波技术、电子对抗技术等.