

一种空间色噪声环境下的鲁棒自适应波束

林静然 彭启琮 邵怀宗 居太亮
(电子科技大学通信与信息工程学院 成都 610054)

摘要: 该文提出了一种基于对角加载的鲁棒自适应波束形成算法, 以提高空间色噪声环境中自适应波束对方向矢量误差的鲁棒性。该算法首先利用噪声协方差矩阵对阵列相关矩阵进行预白化, 同时定义了一个与噪声矩阵相对应的椭圆方向矢量模糊集, 然后, 通过在该模糊集内进行最坏情况性能优化来确定对角加载因子。和现有的通过迭代求解加载因子的方法不同, 该文给出了最优加载因子的近似解析表达式, 降低了运算量, 揭示了哪些因素可以影响最优加载因子, 以及如何影响。仿真结果表明, 在空间色噪声环境中, 该算法具有很好的鲁棒性, 并且, 给出的加载因子表达式是其真实最优解的一个准确近似。

关键词: 信号处理; 鲁棒自适应波束; 空间色噪声; 方向矢量误差; 对角加载

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)12-2822-05

Robust Adaptive Beamforming In Spatially Colored Noise Fields

Lin Jing-ran Peng Qi-cong Shao Huai-zong Ju Tai-liang
(School of Communication and Information Engineering,
University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: A novel robust adaptive beamforming based on diagonal loading is proposed in this paper, aiming at robustness against steering vector mismatches in spatially colored noise fields. The received data is prewhitened first according to the noise covariance, with a corresponding ellipsoidal steering vector uncertainty set defined at the same time. Then the loading level is determined based on worst-case performance optimization. Other than searching for the optimal loading by iteration, a simple closed-form solution is suggested after some approximations. Besides its low computational cost, the closed-form solution reveals how different factors affect the optimal loading. Numerical examples confirm the excellent performance of the proposed approach as well as the accurate approximation of the closed-form solution to the actual optimal loading.

Key words: Signal processing; Robust Adaptive Beamforming (RABF); Spatially colored noise; Steering vector mismatches; Diagonal loading

1 引言

自适应波束形成是常用的阵列信号处理方法, 广泛应用于智能天线、雷达、通信等领域^[1]。如何提高自适应波束对方向矢量误差(steering vector mismatches)的鲁棒性是其中一个重要的研究内容。常规的鲁棒自适应波束算法(Robust Adaptive Beamforming, RABF)都假设阵元噪声是空间白高斯噪声^[1-7]。然而, 更为复杂的噪声环境在实际应用中却经常出现, 复杂噪声环境下的RABF研究已经受到广泛的重视。

在实际应用中, 通常各通道的噪声互不相关, 但噪声特性难以完全一致, 功率可能不同^[8]。本文研究了这种空间色噪声^[8]下的RABF算法, 它通过对角加载(diagonal loading)提高波束的鲁棒性。该类算法的难点在于如何合理的选择对角加载因子。针对空间噪声场的特点, 首先利用噪声协方差

矩阵对阵列空间相关矩阵进行预白化, 并定义了一个与噪声矩阵对应的椭圆方向矢量模糊集。然后, 通过优化该模糊集内最坏情况下(worst-case)的波束性能来确定加载因子。和现有的迭代求解最优加载因子的方法^[2-5]不同, 本文给出了它的近似解析表达式, 不但降低了求解运算量, 还揭示了哪些因素可以影响最优加载因子, 以及如何影响。

2 空间色噪声下的鲁棒自适应波束

2.1 信号模型

对于一个 M 元的阵列, 其接收信号的空间相关矩阵可以表示为

$$\mathbf{R} = \sigma_s^2 \mathbf{a} \mathbf{a}^H + \sum_{k=1}^K \sigma_{Jk}^2 \mathbf{a}_{Jk} \mathbf{a}_{Jk}^H + \mathbf{Q} = \sigma_s^2 \mathbf{a} \mathbf{a}^H + \mathbf{J} \quad (1)$$

其中 \mathbf{a} 和 $\mathbf{a}_{Jk} \in \mathbf{C}^{M \times 1}$, $k = 1, 2, \dots, K$ 分别表示目标信号和 K 个干扰源的方向矢量; σ_s^2 和 σ_{Jk}^2 , $k = 1, 2, \dots, K$ 分别表示目标信号和 K 个干扰源的功率; \mathbf{Q} 为噪声协方差矩阵; \mathbf{J} 为干扰噪声矩阵, 由干扰和噪声分量组成; $(\cdot)^H$ 表示复共轭转置。

2006-04-21 收到, 2006-09-26 改回

四川省科技基金(04GG21-020-02)资助课题

鲁棒自适应波束形成算法通常表示为^[1]:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}, \quad \text{s.t. } |\mathbf{w}^H \mathbf{c}| \geq 1, \quad \mathbf{c} \in \mathbf{A}(\mathbf{h}) \quad (2)$$

其中 $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ 为权向量, $\mathbf{h} \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ 为目标方向矢量 \mathbf{a} 的估计值, $\mathbf{A}(\mathbf{h})$ 为方向矢量模糊集。

2.2 预白化处理

对于空间白噪声, $\mathbf{Q} = \sigma^2 \mathbf{I}$, 其中, σ^2 为噪声功率。如果各阵元噪声互不相关、功率不同, 那么, $\mathbf{Q} = \text{diag}\{\sigma_{n1}^2, \sigma_{n2}^2, \dots, \sigma_{nM}^2\}$, 其中, σ_{nm}^2 , $m=1, 2, \dots, M$ 分别为各阵元噪声的功率。

假设噪声矩阵 \mathbf{Q} 已知 (\mathbf{Q} 的估计方法参见文献[8, 9])。不失一般性, 令 $\mathbf{Q} = \sigma_n^2 \mathbf{Q}_0$, 其中, $\mathbf{Q}_0 = \text{diag}\{d_1^2, d_2^2, \dots, d_M^2\}$, 且 $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_M^2 = M$, 即 σ_n^2 是各阵元噪声功率的平均值。设矩阵 \mathbf{D} 满足

$$\mathbf{D} \mathbf{Q}_0 \mathbf{D}^H = \mathbf{I} \quad \text{或} \quad \mathbf{D} = \mathbf{Q}_0^{-1/2} \quad (3)$$

那么, 白化后的阵列相关矩阵 $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{D}^H$ 为

$$\hat{\mathbf{R}} = \sigma_s^2 \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^H + \sum_{k=1}^K \sigma_{jk}^2 \hat{\mathbf{a}}_{jk} \hat{\mathbf{a}}_{jk}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} = \sigma_s^2 \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^H + \hat{\mathbf{J}} \quad (4)$$

其中 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{D} \mathbf{a}$, $\hat{\mathbf{a}}_{jk} = \mathbf{D} \mathbf{a}_{jk}$, $k=1, 2, \dots, K$, $\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{D} \mathbf{J} \mathbf{D}^H$ 为白化后的干扰噪声矩阵。

定义椭圆方向矢量模糊集为

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}_0, \mathbf{h}, \varepsilon) = \{\mathbf{c} \mid (\mathbf{c} - \mathbf{h})^H \mathbf{Q}_0^{-1} (\mathbf{c} - \mathbf{h}) \leq \varepsilon^2\} \quad (5)$$

即该模糊集以 \mathbf{h} 为中心, 形状由 \mathbf{Q}_0^{-1} 决定, 大小由 ε 决定。由 \mathbf{Q}_0^{-1} 决定模糊集的形状可以这样理解: 造成各通道噪声功率不同的一个重要原因是各通道增益不同(这种差异反映在 \mathbf{Q}_0 中)。一个通道的增益越大, 该通道的阵列响应误差也被相应放大。为了抵消这种差异, 对该通道的响应误差应该有更严格的限制, 从而得到与 \mathbf{Q}_0^{-1} 对应的模糊集。

通过简单的代换 $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{D} \mathbf{c}$ 和 $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{D} \mathbf{h}$, 可将椭圆模糊集转换成球形模糊集, 即

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}_0, \mathbf{h}, \varepsilon) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{h}}, \varepsilon) = \{\hat{\mathbf{c}} \mid \|\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{h}}\|^2 \leq \varepsilon^2\} \quad (6)$$

其中 $\hat{\mathbf{h}}$ 为中心, ε 为半径, 通常满足 $\varepsilon^2 \leq \|\hat{\mathbf{h}}\|^2$ 。

在此基础上, 式(2)可以写成

$$\min_{\hat{\mathbf{w}}} \hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{w}}, \quad \text{s.t. } |\hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{c}}| \geq 1, \quad \|\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{h}}\|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (7)$$

式中 $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{D}^H \mathbf{w}$ 。

通过以上变换, 空间色噪声下, 椭圆方向矢量模糊集内的 RABF 问题, 就被转换到了空间白噪声下, 球形模糊集内进行处理。

2.3 最坏情况性能优化

由于式(7)具有无穷多个限制条件, 因此求解困难。通过优化最坏情况下的波束性能^[2-5], 可以简化该问题。所谓最坏情况性能优化, 就是保证在最坏的情况下, 目标信号仍不会受到抑制, 即

$$\min_{\hat{\mathbf{w}}} \hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{w}}, \quad \text{s.t. } \min_{\|\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{h}}\| \leq \varepsilon} |\hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{c}}| \geq 1 \quad (8)$$

可以证明^[3], 当 $\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{h}} - \varepsilon \cdot \hat{\mathbf{w}} \cdot \|\hat{\mathbf{w}}\|^{-1} \cdot e^{j\phi}$ 时, 其中, $\phi = \text{angle}(\hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{h}})$, 有 $\min\{|\hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{c}}|\} = |\hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{h}}| - \varepsilon \|\hat{\mathbf{w}}\|$, $\|\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{h}}\| \leq \varepsilon$ 。

所以, 式(8)等价于

$$\min_{\hat{\mathbf{w}}} \hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{w}}, \quad \text{s.t. } \hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{h}} = \varepsilon \|\hat{\mathbf{w}}\| + 1, \quad \text{Im}\{\hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{h}}\} = 0 \quad (9)$$

解得最优权向量为

$$\hat{\mathbf{w}}_o = \frac{\xi}{\xi \hat{\mathbf{h}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \xi \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{h}} - \varepsilon^2} (\hat{\mathbf{R}} + \xi \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{h}} \quad (10)$$

其中 ξ 为对角加载因子。

相应地, 在空间色噪声下, 椭圆方向矢量模糊集内的 RABF 的最优权向量为

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{D}^H \hat{\mathbf{w}}_o = \frac{\xi}{\xi \hat{\mathbf{h}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \xi \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{h}} - \varepsilon^2} \mathbf{D}^H (\hat{\mathbf{R}} + \xi \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{h}} \quad (11)$$

在式(11)中, 只有对角加载因子 ξ 未知, 下一节将给出它的一个近似解析解。

3 最优对角加载因子的近似解析解

对角加载因子 ξ 满足方程

$$(\hat{\mathbf{w}}_o^H \hat{\mathbf{h}} - 1)^2 = \varepsilon^2 \|\hat{\mathbf{w}}_o\|^2 \quad (12)$$

但是, 式(12)是关于 ξ 的复杂方程, 很难直接求解, 现有的方法大多通过迭代搜索最优解, 如基于 Second-Order Cone Program (SOCP) 的方法^[2, 3] 和牛顿迭代法^[4, 5]。这些迭代的方法有很多不足。首先是收敛速度的问题。如果不仔细选择初始点, 可能收敛很慢, 收敛到局部最优, 甚至可能不收敛。其次, 迭代得到的结果并不能揭示最优解与各种因素(如 \mathbf{Q} , ε 等)之间的关系。本文给出了最优加载因子的一个近似封闭解, 既降低了运算量, 又揭示了不同因素如何影响最优解。

3.1 近似最优解

根据式(4), 对 $(\hat{\mathbf{R}} + \xi \mathbf{I})^{-1}$ 使用矩阵求逆引理, 得到

$$(\hat{\mathbf{R}} + \xi \mathbf{I})^{-1} = (\hat{\mathbf{J}} + \xi \mathbf{I})^{-1} \left[\mathbf{I} - \frac{\sigma_s^2 \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{J}} + \xi \mathbf{I})^{-1}}{1 + \sigma_s^2 \hat{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{J}} + \xi \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{a}}} \right] \quad (13)$$

对矩阵 $\hat{\mathbf{J}}$ 进行特征值分解, 有

$$\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{V} \mathbf{\Gamma} \mathbf{V}^H = \mathbf{V}_J \mathbf{\Gamma}_J \mathbf{V}_J^H + \sigma_n^2 \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \quad (14)$$

其中 $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M)$ 是 $\hat{\mathbf{J}}$ 的特征值矩阵, 且特征值按降序排列, 即 $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_K > \gamma_{(K+1)} = \gamma_{(K+2)} = \dots = \gamma_M = \sigma_n^2$; 特征向量矩阵 $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M]$, $\mathbf{v}_m \in \mathbf{C}^{M \times 1}$ 是对应 γ_m 的特征向量, $m=1, 2, \dots, M$; $\mathbf{\Gamma}_J = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K)$, $\mathbf{V}_J = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_K]$, $\mathbf{V}_n = [\mathbf{v}_{(K+1)}, \mathbf{v}_{(K+2)}, \dots, \mathbf{v}_M]$ 。

假设干扰远远强于各通道的噪声, 即 $\sigma_{jk}^2 \gg \sigma_n^2$, $\gamma_k \gg \sigma_n^2$, $k=1, 2, \dots, K$ 。同时假设干扰都位于阵列对目标信号的主瓣之外, 即目标方向矢量 \mathbf{a} 或 \mathbf{h} 在 \mathbf{J} 的干扰子空间上的投影很小。那么, 通常 $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{D} \mathbf{a}$ 或 $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{D} \mathbf{h}$ 在 $\hat{\mathbf{J}}$ 的干扰子空间 \mathbf{V}_n 上的投影也很小。需要注意的是, 如果 d_m^2 , $m=1, 2, \dots, M$, 中的一个或几个远远大于其他元素, $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{D} \mathbf{a}$ 和 $\hat{\mathbf{a}}_{jk} = \mathbf{D} \mathbf{a}_{jk}$, $k=1, 2, \dots, K$, 趋于落入同一空间, 以上假设不再成立。但是, 这种情况并不常见, 通常各通道的噪声功率相差一般不超过一个量级, 即可以认为 d_m^2 , $m=1, 2, \dots, M$, 在同一数量级内。在此基础上, 对于 $k=1, 2, \dots, K$ 和 $t=(K+1), (K+$

2), ..., M, 有^[6]

$$\frac{|\mathbf{v}_k^H \hat{\mathbf{a}}|^2}{\gamma_k} \ll \frac{|\mathbf{v}_t^H \hat{\mathbf{a}}|^2}{\gamma_t}, \quad \frac{|\mathbf{v}_k^H \hat{\mathbf{h}}|^2}{\gamma_k} \ll \frac{|\mathbf{v}_t^H \hat{\mathbf{h}}|^2}{\gamma_t} \quad (15)$$

进一步有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}^H (\hat{\mathbf{J}} + \xi \mathbf{I})^{-p} \hat{\mathbf{a}} &= \sum_{m=1}^M \frac{|\mathbf{v}_m^H \hat{\mathbf{a}}|^2}{(\gamma_m + \xi)^p} \approx \sum_{m=K+1}^M \frac{|\mathbf{v}_m^H \hat{\mathbf{a}}|^2}{(\gamma_m + \xi)^p} \\ &= \frac{\|\hat{\mathbf{a}}\|^2}{(\sigma_n^2 + \xi)^p} \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\hat{\mathbf{a}}_n = [\mathbf{v}_{(K+1)}, \dots, \mathbf{v}_M]^H \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{V}_n^H \hat{\mathbf{a}}$, $\|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2 = \hat{\mathbf{a}}_n^H \hat{\mathbf{a}}_n$, $p = 1, 2$ 。同理可得

$$\hat{\mathbf{a}}^H (\mathbf{J} + \xi \mathbf{I}_M)^{-p} \hat{\mathbf{h}} \approx \frac{\hat{\mathbf{a}}_n^H \hat{\mathbf{h}}_n}{(\sigma_n^2 + \xi)^p} \quad (17)$$

其中 $\hat{\mathbf{h}}_n = [\mathbf{v}_{(K+1)}, \dots, \mathbf{v}_M]^H \hat{\mathbf{h}}$ 。

将式(13)、式(16)和式(17)代入式(12), 经过简单的推导后, 得到

$$\|\hat{\mathbf{h}}_n\|^2 - 2L \|\hat{\mathbf{a}}_n^H \hat{\mathbf{h}}_n\|^2 + L^2 \|\hat{\mathbf{a}}_n^H \hat{\mathbf{h}}_n\|^2 \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2 = \left(\frac{\xi + \sigma_n^2}{\varepsilon^{-1} \xi} \right)^2 \quad (18)$$

其中系数 $L = (\xi + \sigma_n^2 + \sigma_s^2 \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2)^{-1} \sigma_s^2$ 。

令 $\hat{\mathbf{a}}_n = \hat{\mathbf{h}}_n + \Delta_n$ 。当 ε 很小时, 有 $\|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2 \approx \|\hat{\mathbf{h}}_n\|^2$,

$\|\Delta_n\|^2 \ll \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2$, $\|\Delta_n\|^2 \ll \|\hat{\mathbf{h}}_n\|^2$ 。此时,

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{a}}_n^H \hat{\mathbf{h}}_n|^2 &= \hat{\mathbf{h}}_n^H \hat{\mathbf{a}}_n \hat{\mathbf{a}}_n^H \hat{\mathbf{h}}_n = \hat{\mathbf{h}}_n^H (\hat{\mathbf{h}}_n + \Delta_n) \hat{\mathbf{a}}_n^H (\hat{\mathbf{a}}_n - \Delta_n) \\ &= \|\hat{\mathbf{h}}_n\|^2 \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2 + \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2 \hat{\mathbf{h}}_n^H \Delta_n - \|\hat{\mathbf{h}}_n\|^2 \Delta_n^H \hat{\mathbf{a}}_n - \hat{\mathbf{h}}_n^H \Delta_n \hat{\mathbf{a}}_n^H \Delta_n \\ &\approx \|\hat{\mathbf{h}}_n\|^2 \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2 - \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2 \Delta_n^H \Delta_n - \hat{\mathbf{h}}_n^H \Delta_n \hat{\mathbf{a}}_n^H \Delta_n \end{aligned} \quad (19)$$

忽略式(19)中 Δ_n 的二次项, 有

$$|\hat{\mathbf{a}}_n^H \hat{\mathbf{h}}_n|^2 \approx \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2 \|\hat{\mathbf{h}}_n\|^2 \quad (20)$$

该近似在实际中是成立的, 因为: 首先, 当 ε 超过一定的界限后, 基于对角加载的方法就不能弥补方向矢量误差引起的波束性能下降了^[7]; 其次, ε 过大将导致波束自适应抑制干扰的能力下降, 此时RABF更像一个与数据无关(data-independent)的波束。因此, 只有在 ε 较小的场合, 基于对角加载的RABF才能发挥最佳的效果。

将式(20)代入式(18), 得到

$$\left(\frac{\|\hat{\mathbf{h}}_n\|^2}{\xi + \sigma_n^2 + \sigma_s^2 \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\xi} \right)^2 \quad (21)$$

从式(21)可求得 ξ 的一正一负两个解, 其中负解不满足限制条件 $\hat{\mathbf{w}}_o^H \hat{\mathbf{h}}_o > 1$ 。因此, 最优加载因子近似为

$$\xi_o \approx \frac{\varepsilon(\sigma_n^2 + \sigma_s^2 \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2)}{\|\hat{\mathbf{h}}_n\| - \varepsilon} \quad (22)$$

求得 ξ_o 之后, 空间色噪声下, 椭圆方向矢量模糊集内的 RABF 的最优权向量就完全确定了, 即

$$\mathbf{w}_o = \frac{\xi_o}{\xi_o \hat{\mathbf{h}}_n^H (\hat{\mathbf{R}} + \xi_o \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{h}}_n - \varepsilon^2} \mathbf{D}^H (\hat{\mathbf{R}} + \xi_o \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{h}} \quad (23)$$

3.2 关于最优加载因子的讨论

观察式(22), 可以得到很多有用信息。首先, 式(22)揭示了哪些因素可以影响最优加载因子, 以及如何影响。具体来说, 最优加载因子与下列因素有关: 各通道噪声功率的平均值 σ_n^2 , 目标信号功率 σ_s^2 , 方向矢量模糊集的大小 ε 以及 $\hat{\mathbf{a}}$ 和 $\hat{\mathbf{h}}$ 在 $\hat{\mathbf{J}}$ 的噪声子空间上的投影的模 $\|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2$ 和 $\|\hat{\mathbf{h}}_n\|^2$ 。由于 $\hat{\mathbf{a}}$ 和 $\hat{\mathbf{h}}$ 受到 \mathbf{D} 的影响, 所以最优加载因子还和各通道噪声功率的具体分布有关。另外, ε 和 σ_s^2 越大, 加载因子也越大。当 ε 趋近 $\|\hat{\mathbf{h}}_n\|$ 时, ξ_o 趋近无穷大, 该算法变成与数据无关的波束形成算法, 不再具有自适应抑制干扰的能力。当 ε 趋近 0 时, ξ_o 也趋近 0, 该算法变成标准自适应波束形成算法 (Standard Adaptive Beamforming, SABF)。

其次, 由于最优加载因子可直接计算, 该算法运算量与 SABF 大致相同, 为 $O(M^3)$ flops, 低于迭代求解的方法。例如, 基于 SOCP 的方法^[3]每轮迭代都需要 $O(M^3)$ flops。

4 性能分析

本文使用信号干扰噪声比 (Signal to Interference plus Noise Ratio, SINR) 来衡量算法的性能, 其计算式为:

$$\text{SINR} \triangleq \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{w}_o^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{w}_o^H \mathbf{J} \mathbf{w}_o} \quad (24)$$

代入 \mathbf{w}_o 的表达式(23), 得到,

$$\text{SINR} = \frac{\sigma_s^2 |\hat{\mathbf{h}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \xi_o \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{a}}|^2}{\hat{\mathbf{h}}^H (\hat{\mathbf{R}} + \xi_o \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{J}} (\hat{\mathbf{R}} + \xi_o \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{h}}} \quad (25)$$

在 ε 较小的假设下, 使用式(13)、式(16)、式(17)和式(20)的结果, 经过简单的推导后, 有

$$\text{SINR} \approx \frac{\sigma_s^2 \|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2}{\sigma_n^2} \quad (26)$$

即空间色噪声下, 椭圆方向矢量模糊集内的 RABF 的 SINR 和各通道噪声功率的平均值 σ_n^2 , 噪声功率的分布 \mathbf{D} , 目标信号功率 σ_s^2 以及 $\|\hat{\mathbf{a}}_n\|^2$ 有关。另外, 当 ε 较小时, 算法的 SINR 保持恒定, 与 ε 无关。换句话说, 当 ε 较小时, 本文提出的算法能有效弥补方向矢量模糊引起的波束性能下降。

5 计算机仿真

为了便于比较, 本节对以下几种算法进行仿真: (1) SABF; (2) 白化的 SABF (Prewhitened SABF, P-SABF); (3) 固定加载 (Fixed Loading) 的 RABF 算法 (FL-RABF), 加载因子高于各通道噪声功率平均值 10dB; (4) 未经白化处理的最坏情况 RABF 算法, 求解加载因子和权向量时假设 $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, 即直接的最坏情况 RABF 算法 (Direct Worst-case RABF, DW-RABF); (5) 白化后的最坏情况 RABF 算法, 牛顿迭代求解最优加载因子 (Prewhitened Iterative Worst-case RABF, PIW-RABF); (6) 白化后的最坏情况 RABF 算法, 使用式(22)确定最优加载因子 (Prewhitened Closed-form Worst-

case RABF, PCW-RABF), 即本文提出的方法。

使用一个由 $M=10$ 个阵元组成的均匀线阵, 阵元间距为二分之一信号波长。空间有 3 个信源(一个目标信号和两个干扰): 目标信号预设的到达角度(Direction Of Arrival, DOA)为 0° , 两个干扰的到达角度分别为 -20° 和 30° 。各通道噪声功率的平均值为 0dB , 即 $\sigma_n^2 = 1$, 噪声协方差矩阵为 $\mathbf{Q} = \text{diag}\{0.7860, 1.5411, 0.9857, 0.3341, 1.0557, 0.4728, 1.4541, 0.8299, 1.1743, 1.3663\}$ 。另外, 目标信号的功率 $\sigma_s^2 = 10\text{dB}$, 两个干扰的功率均为 30dB 。目标信号的方向矢量模糊主要由 DOA 的估计误差造成, 估计误差 $\Delta = +2^\circ$, 即目标实际 DOA 为 $+2^\circ$, 相应的 $\varepsilon = 1.8466$ 。

6 种算法在不同快拍数 N 下的性能对比如图 1 所示。图中结果由 100 次蒙特卡罗(Monte Carlo)实验平均而得。图 1(a)为 6 种算法的 SINR 比较, 图 1(b)为对角加载因子的比较。可以看出, 方向矢量存在误差时, SABF 的性能很差, 因为它把目标信号当作干扰进行抑制。P-SABF 的性能略好于 SABF, 但仍然很差, 说明存在方向矢量误差时, 对 SABF 白化的效果并不明显。和 SABF 相比, FL-RABF 的性能有所提高, 具有一定的鲁棒性。但是, 由于设定的 10dB 加载因子不一定是最佳的, 所以, 其性能并不令人满意。比较而言, 3 种最坏情况下的 RABF 算法性能更好。进一步观测图 1(a), 经过白化处理的 RABF 算法, 即 PIW-RABF 和 PCW-RABF, 其性能优于未经白化的 DW-RABF 算法。并且, PIW-RABF 和 PCW-RABF 的性能曲线几乎吻合, 表明式(22)非常逼近最优加载因子的真实值。同时, 当 $N > 1000$ 后, PIW-RABF 和 PCW-RABF 的性能非常接近式(26), 表明式(26)能够准确预测该算法的性能。图 1(a)的结论在图 1(b)中得到了验证, 即式(22)求得的最优加载因子和迭代求解的结果大致相同。注意到, 尽管未经白化处理的算法求得的加载因子与白化后的结果很接近, 但由于权向量中没有考虑 \mathbf{D} 的作用, 其性能仍然不理想。

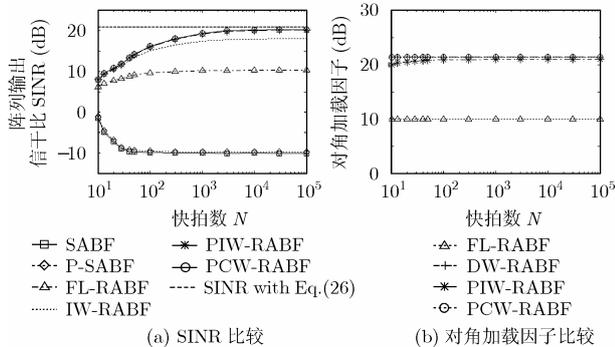


图 1 在不同快拍数下的性能比较, $\Delta = 2^\circ$, $\varepsilon = 1.8466$

改变 DOA 的估计误差 Δ , 在不同的方向矢量模糊度下的算法性能比较如图 2 所示。图中快拍数固定为 $N = 1000$ 。

本文中方向矢量模糊度定义为 $Un(\text{dB}) = 20 \times \lg(\|\mathbf{a}\|^{-1} \varepsilon)$ 。观察图 2, 可得如下结论。第(1), 即使在方向矢量模糊度很低的情况下, SABF 和 P-SABF 的性能也很差。第(2), FL-RABF 具有一定的鲁棒性, 但在方向矢量模糊度较高时, 其性能仍然很差。第(3), 在较高模糊度下, 3 种最坏情况 RABF 算法性能更好。并且, PIW-RABF 和 PCW-RABF 的性能非常接近, 优于 DW-RABF。第(4), 使用式(22)求得的最优加载因子和迭代的结果大致相同, 并且随着模糊度(或 ε)的增加而增大, 这与 3.2 节的分析一致。同样, 尽管 DW-RABF 的加载因子和 PIW-RABF、PCW-RABF 的很接近, 由于没有进行白化处理, 其性能不如下两种算法。第(5), 当模糊度小于 -5dB 时, PIW-RABF 和 PCW-RABF 的 SINR 大致恒定, 与 ε 无关, 并且非常接近式(26)的结果, 再次验证了前面的分析。

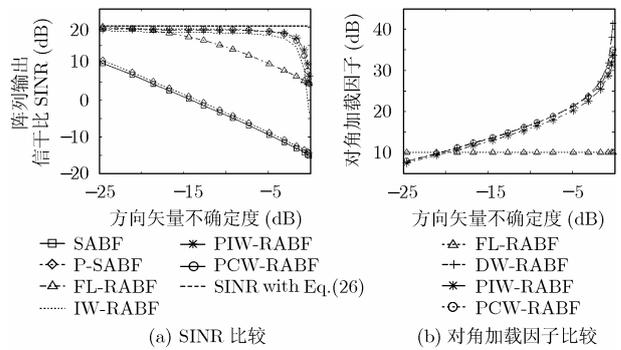


图 2 在方向矢量模糊度下的性能比较, $N=1000$

改变目标信号的功率 σ_s^2 , 在不同输入信噪比 SNR 下的算法性能比较如图 3 所示。图中快拍数固定为 $N=1000$, 其他参数和第一个仿真实验相同。同样, 这几种算法中, SABF 和 P-SABF 的性能最差, FL-RABF 的性能改善有限, 3 种最坏情况 RABF 算法性能更好。在这 3 种算法中, PIW-RABF 和 PCW-RABF 的性能大致相同, 接近(26)式的结果, 并且优于 DW-RABF。在图 3(b)中, 式(22)求得的最优加载因子和迭代的结果很接近, 并且随着 σ_s^2 的增大而增大, 即式(22)是真实最优加载因子的准确近似。

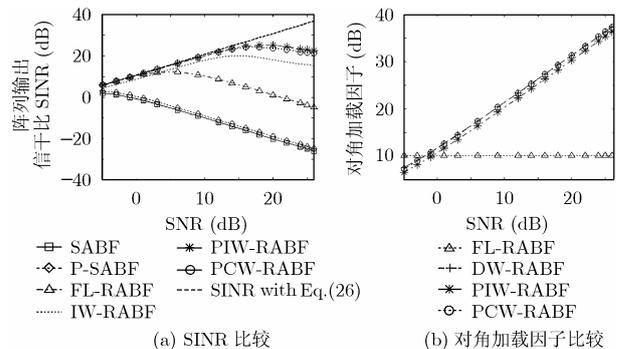


图 3 在不同 SNR 下的性能比较, $\Delta = 2^\circ$, $\varepsilon = 1.8466$, $N=1000$

6 结束语

本文研究了空间色噪声下, 自适应波束对方向矢量误差的鲁棒性问题, 提出了一种基于对角加载的鲁棒自适应波束形成算法, 并利用最坏情况性能优化求得其最优对角加载因子的一个近似封闭解。

该算法首先利用噪声协方差矩阵对阵列相关矩阵进行预白化, 同时定义了一个形状与噪声矩阵对应的椭圆方向矢量模糊集。通过在该模糊集内进行最坏情况性能优化来确定对角加载因子。与现有的迭代求解的方法不同, 本文给出了最优加载因子的一个近似封闭解, 不但降低了运算量, 同时揭示了哪些因素可以影响最优加载因子, 以及如何影响。在此基础上, 对该算法进行了性能分析, 给出了 SINR 的近似表达式。计算机仿真结果表明, 和该领域的相关算法相比, 本文提出的算法具有更好的性能, 并且最优加载因子的近似封闭解是其真实值的一个准确近似。

参 考 文 献

- [1] Van Trees H L. Detection, Estimation and Modulation Theory, Part IV, Optimum Array Processing [M]. New York: Wiley, 2002, Chap.8-9, 917-1285.
- [2] Gershman A B. Robust adaptive beamforming: an overview of recent trends and advances in the field [C]. in Proc. Int. Conf. Antenna Theory and Techniques, Sevastopol, 2003: 30-35.
- [3] Vorobyov S A, Gershman A B, and Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 51(2): 313-324.
- [4] Lorenz R G and Boyd S P. Robust minimum variance beamforming [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(5): 1684-1696.
- [5] Li J, Stoica P, and Whang Z S. On robust Capon beamforming and diagonal loading [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 51(7): 1702-1715.
- [6] Vincent F and Besson O. Steering vector errors and diagonal loading [J]. *IEE Proc. -Radar Sonar Navig.*, 2004, 151(6): 337-343.
- [7] Besson O and Vincent F. Performance analysis of beamformers using generalized loading of covariance matrix in the presence of random steering vector errors [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(2): 452-459.
- [8] 吴云韬, 廖桂生, 陈建峰. 一种色噪声环境下的 DOA 估计新算法. *电子学报*, 2001, 29(12): 1605-1607.
- Wu Y T, Liao G S, and Chen J F. A novel method for estimating DOA in the presence of unknown colored noise fields [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(12): 1605-1607.
- [9] Sinath H and Reddy V U. Analysis of MUSIC algorithm with sensor gain and phase perturbations [J]. *Signal Processing*, 1991, 23(3): 245-256.

- 林静然: 男, 1978 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、自适应信号处理。
- 彭启琮: 男, 1946 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为现代通信系统中的信号处理、实时信号处理。
- 邵怀宗: 男, 1969 年生, 副教授, 研究方向为通信中的信号处理、实时信号处理等。
- 居太亮: 男, 1974 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、语音信号处理、自适应信号处理。