

## 修正 Gram-Schmidt 正交化构建电源分配网络时域宏模型

胡 晋<sup>①②</sup> 王华力<sup>①</sup> 金利峰<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(解放军理工大学通信工程学院 南京 210007)

<sup>②</sup>(江南计算技术研究所 无锡 214083)

**摘 要:** 有理函数逼近法方程组病态条件数为构建电源分配网络时域宏模型带来了数值问题。该文提出利用修正 Gram-Schmidt 正交化处理对超定方程组系数矩阵进行正交三角分解, 结合 Bernoulli 多项式求根方法及稳定、无源性准则可以精确构建无源时域宏模型。计算实例精确构建了自 DC 至 1GHz 频带内的宽带无源时域宏模型, 从而验证了该方法的有效性。

**关键词:** 电源分配网络; 时域宏模型; 修正 Gram-Schmidt 正交化

中图分类号: TN86

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)11-2758-04

## Construction of Macromodel in Time Domain for Power Distribution Network Using Modified Gram-Schmidt Orthogonal

Hu Jin<sup>①②</sup> Wang Hua-li<sup>①</sup> Jin Li-feng<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(Institute of Communications Engineering, PLAUST, Nanjing 210007, China)

<sup>②</sup>(JiangNan Research Institute of Computing Technology, Wuxi 214083, China)

**Abstract:** The ill-conditioned normal equations bring numerical problems in construction of macromodel in time domain for power distribution networking using rational function approximation. This paper presents the superdefinite equations coefficient matrix can be decomposed in QR form using modified Gram-Schmidt orthogonal and the accurate passive macromodel in time domain can be constructed based on Bernoulli polynomial root finding method and the formulae for stability and passivity. Finally, a broadband passive macromodel constructed from DC to 1GHz is given to demonstrate the validity and accuracy of the method.

**Key words:** Power distribution network; Macromodel in time domain; Modified Gram-Schmidt orthogonal

### 1 引言

现代高速数字集成电路系统时钟频率已达到上吉赫兹, 同时随着晶体管制造工艺的不断提高, 芯片驱动信号上升沿时间已缩短至纳秒量级, 由此而引发的高速电路系统和封装结构的寄生分布特性会导致电源/地反弹或同步开关噪声等一系列电源完整性问题, 严重影响了电源分配网络的正常工作, 成为制约整个系统性能的主要因素<sup>[1]</sup>。目前已提出的电源完整性分析方法主要为基于电磁场建模的电路网络分析法, 如部分元等效电路法。这一类方法随着系统规模的不断增大, 需要解决模型降阶这一技术难题。虽然以 Krylov 子空间变换为代表的缩减技术, 可以有效降低改进节点法方程组阶数, 并保持一定精度, 但降阶后的电路分析仍然较为复杂, 同时该方法难以分析非线性电路系统。近来, 文献[1]提出了一种时频域混合分析方法。该方法在频域基于传输矩阵方法计算电源分配网络频率响应, 在时域利用频率响应构建无源宏模型以表征电源分配网络特定端口处的输入/输出特性, 随后经网络综合得到 SPICE 兼容等效电路模型, 易于结合非线性器件模型嵌入至 HSPICE 等通用电路仿真软件进行瞬态

分析, 为分析电源分配网络提供了新的思路。

时频域分析的核心在于如何精确地构建无源时域宏模型。文献[2]利用契比雪夫多项式展开方法得到稳定、精确的时域宏模型, 但该方法并不能保证无源特性。文献[3]基于特征值和 Quadratic Programming 方法来构建无源、稳定的时域宏模型。文献[4]利用 Householder 旋转变换实现矩阵正交三角分解来得到时域宏模型的最小二乘逼近。文献[5]则通过子带划分、极点置换等方法来构建宽带无源宏模型。

本文首先基于传输矩阵方法来获得电源分配网络离散阻抗频率响应; 为了解决有理函数逼近中存在的病态矩阵问题, 提出利用 MGS(Modified Gram-Schmidt)正交化实现矩阵正交三角分解, 得到极点-留数表示式的时域宏模型; 其次讨论时域宏模型的无源、稳定性准则; 最后通过计算实例验证了该方法的有效性及其精确性。

### 2 传输矩阵方法

传输矩阵方法将电源/地平面导体板均匀分割为  $(M-1) \times (N-1)$  个正方形网格单元, 其等效电路如图 1 所示, 网格单元利用 RLGC 等效电路进行建模, 单元等效电路参数定义为

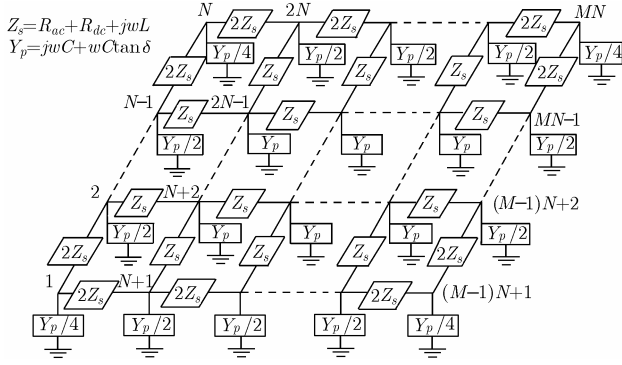


图 1 电源/地层电源分配网络等效电路

$$\left. \begin{aligned} C &= \varepsilon_0 \varepsilon_r w^2 / d \\ L &= \mu_0 d \\ R_{dc} &= 2 / (\sigma_c t) \\ R_{ac} &= 2 \sqrt{\pi f \mu_0 / \sigma_c} \\ G_d &= w C \tan \delta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $\varepsilon$  为介电常数,  $\tan \delta$  为介质损耗正切,  $\sigma_c$  为金属层电导率,  $\mu_0$  为自由空间磁导率,  $w$  为网格宽度,  $d$  为电源/地层间距,  $t$  为导体板层厚。

图 1 中自 1 至  $MN$  为输入端口, 自  $MN + 1$  至  $2MN$  为输出端口, 由此可以得到  $2MN$  端口平面对电路传输矩阵

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ \mathbf{C}_p & \mathbf{D}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_p & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中  $[\mathbf{I}]$  为单位矩阵,  $[\mathbf{0}]$  为零矩阵,  $[\mathbf{C}_p]$  为  $(M \times N) \times (M \times N)$  矩阵, 具体形式为

$$[\mathbf{C}_p] = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ -Y_{12} & Y_{22} & -Y_{23} & 0 & \cdots \\ 0 & -Y_{23} & Y_{33} & -Y_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{MM} \end{bmatrix} \quad (3)$$

由传输矩阵与阻抗矩阵的转换关系可以得到电源分配网络特定端口处的阻抗频率响应, 具体计算方法参见文献[6]。

### 3 时域宏模型

#### 3.1 有理函数逼近

电源分配网络阻抗频率响应  $H(s)$  可以通过有理多项式函数逼近得到:

$$H(s) = \frac{\sum_{ns=0}^{NS} a_{ns} s^{ns}}{\sum_{ds=0}^{DS} b_{ds} s^{ds}} \quad (4)$$

其中  $s = jw$ ,  $w$  为离散采样角频率, NS, DS 为分子、分母多项式阶数,  $a_{ns}$ ,  $b_{ds}$  为多项式系数。式(4)用矩阵表

示为

$$\begin{bmatrix} 1 & \text{real}(s_1^1) & \cdots & \text{real}(s_1^{NS}) & -\text{real}(H(s_1)s_1^1) & \cdots \\ 0 & \text{imag}(s_1^1) & \cdots & \text{imag}(s_1^{NS}) & -\text{imag}(H(s_1)s_1^1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \text{real}(s_k^1) & \cdots & \text{real}(s_k^{NS}) & -\text{real}(H(s_k)s_k^1) & \cdots \\ 0 & \text{imag}(s_k^1) & \cdots & \text{imag}(s_k^{NS}) & -\text{imag}(H(s_k)s_k^1) & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{NS} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{DS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{real}(H(s_1)) \\ \text{imag}(H(s_1)) \\ \vdots \\ \text{real}(H(s_k)) \\ \text{imag}(H(s_k)) \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中  $b_0$  已归一化为 1, 多项式阶数 NS, DS 可以通过搜寻矩阵  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  的最小特征值来确定[7]。

#### 3.2 MGS 正交化处理

由于采样频率点个数通常大于多项式系数个数, 故式(5)实质上为一线性超定方程组, 通常是由求解系数方程组来获得其最小二乘解。实际应用中, 当电源分配网络工作在较宽的频带内及多项式阶数较高时, 矩阵  $\mathbf{A}$  具有很大的动态范围, 病态矩阵  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  导致难以对系数方程组进行准确地数值计算。正交化处理是解决病态条件数问题的常用方法, 这里利用修正 Gram-Schmidt 正交化对  $\mathbf{A}$  进行正交三角分解。

设  $m \times n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  的列线性无关, 则  $\mathbf{A}$  能分解为

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \quad (6)$$

分别记为  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ ,  $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_n)$ ,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ & & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & r_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

MGS正交化过程按列逐步进行计算, 步骤如下[8]:

$$\left. \begin{aligned} r_{ii} &= \|\mathbf{a}_i^{(i)}\|_2, \quad \mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{a}_i^{(i)}}{r_{ii}} \\ r_{ij} &= \mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_j^{(i)}, \quad \mathbf{a}_j^{(i+1)} = \mathbf{a}_j^{(i)} - r_{ij} \mathbf{q}_i, \\ & j = i + 1, i + 2, \cdots, n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

已经证明 MGS 克服了 GS 中的舍入误差问题, 可以解得稳定的最小二乘解。此时超定方程组(5)可改写为

$$\mathbf{R} \mathbf{X} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Y} = \mathbf{C} \quad (9)$$

由这个三角形方程组可以求得最小二乘解  $\mathbf{X}$ 。利用 Bernoulli 多项式求根方法[8]分解分母多项式, 选择位于复平面左半平面的极点, 构建阻抗频率响应的部分分式展开

$$H(s) = r_\infty + \sum_l \frac{r_l}{s - p_l} + \sum_{l'} \left( \frac{\alpha_{l'} + j\beta_{l'}}{s - p_{l'} - j\beta_{l'}} + \frac{\alpha_{l'} - j\beta_{l'}}{s - p_{l'} + j\beta_{l'}} \right) \quad (10)$$

式中  $p_l$  和  $p_{l'} \pm j\beta_{l'}$  分别为实极点和共轭复极点,  $r_l$  和

$\alpha_{l_r} \pm j\beta_{l_i}$  为它们所分别对应的留数,  $r_\infty$  代表输入/输出间的直接耦合。式(10)即为电源分配网络时域宏模型, 它表征了电源分配网络端口处的输入/输出特性, 其实质上为全通、

低通、带通 3 种滤波器子网络的叠加。下面来确定系数  $r_\infty$ ,  $r_i$  和  $\alpha_{l_r} \pm j\beta_{l_i}$ 。

和式(5)类似, 点匹配阻抗频率响应得到线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-p_l}{w_1^2 + p_l^2} & \text{real}\left(\frac{2(jw_1 - p_{l_r})}{(jw_1 - p_{l_r})^2 + p_{l_i}^2}\right) & \text{real}\left(\frac{-2p_{l_i}}{(jw_1 - p_{l_r})^2 + p_{l_i}^2}\right) \\ 0 & \frac{-w_1}{w_1^2 + p_l^2} & \text{imag}\left(\frac{2(jw_1 - p_{l_r})}{(jw_1 - p_{l_r})^2 + p_{l_i}^2}\right) & \text{imag}\left(\frac{-2p_{l_i}}{(jw_1 - p_{l_r})^2 + p_{l_i}^2}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{-p_l}{w_k^2 + p_l^2} & \text{real}\left(\frac{2(jw_k - p_{l_r})}{(jw_k - p_{l_r})^2 + p_{l_i}^2}\right) & \text{real}\left(\frac{-2p_{l_i}}{(jw_k - p_{l_r})^2 + p_{l_i}^2}\right) \\ 0 & \frac{-w_k}{w_k^2 + p_l^2} & \text{imag}\left(\frac{2(jw_k - p_{l_r})}{(jw_k - p_{l_r})^2 + p_{l_i}^2}\right) & \text{imag}\left(\frac{-2p_{l_i}}{(jw_k - p_{l_r})^2 + p_{l_i}^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_\infty \\ r_i \\ \alpha_{l_r} \\ \beta_{l_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{real}(H(s_1)) \\ \text{imag}(H(s_1)) \\ \vdots \\ \text{real}(H(s_k)) \\ \text{imag}(H(s_k)) \end{bmatrix} \quad (11)$$

同样利用 MGS 方法求解, 可以得到时域宏模型部分分式中各项系数。

#### 4 无源及稳定性

对于线性时不变系统, 由有理函数逼近所构建的电源分配网络时域宏模型需要满足无源及稳定条件。稳定性要求有界激励输入稳定系统产生有界输出, 为此有理函数必须满足以下约束条件: (1)所有极点位于复平面左半平面及虚轴上; (2)复平面虚轴上仅包含单个极点; (3)有理函数分子分母多项式阶数之差不大于 1, 即  $|\text{NS} - \text{DS}| \leq 1$ 。以上 3 点约束均可以在构建时域宏模型中强制满足。

无源性要求无源电路不会发生自激, 由于有源宏模型结合稳定电路进行电路仿真时会激发不稳定的时域响应, 为此无源性是构建电源分配网络时域宏模型时必须考虑的因素。文献[5]指出无源网络必须满足条件:

$$\text{Re}[H(s = jw)] \geq 0, \forall w \quad (12)$$

构建电源分配网络无源时域宏模型的基本思想是多个无源子网络的叠加必然满足无源条件, 为此只需对式(10)中各分式分别约束该条件即可。展开式(10), 得到实部为

$$H_R(jw) = r_\infty + \sum_l \frac{-r_l p_l}{w^2 + p_l^2} + \sum_{l'} \left[ \frac{2w^2(-\alpha_{l_r} p_{l_r} + \beta_{l_i} p_{l_i}) + 2(p_{l_r}^2 + p_{l_i}^2)(-\alpha_{l_r} p_{l_r} - \beta_{l_i} p_{l_i})}{(p_{l_r}^2 + p_{l_i}^2 - w^2)^2 + (2p_{l_r} w)^2} \right] \quad (13)$$

不难得出时域宏模型无源约束准则:

$$\left. \begin{array}{l} r_\infty \geq 0 \\ r_i \geq 0 \\ -\alpha_{l_r} p_{l_r} \pm \beta_{l_i} p_{l_i} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (14)$$

对由式(11)求得的各项系数应用上述约束准则可以确保时域宏模型的无源性。

#### 5 计算实例

作为实例, 分析以下结构的典型电源/地层电源分配网络, 平面层尺寸为长 6cm 宽 4cm, 层间距为 0.1mm, 铜层厚度为 0.035mm,  $\epsilon_r = 4.5$ , 在 1GHz 时, 介质损耗正切为

$\tan \delta = 0.02$ 。传输矩阵方法中网格单元尺寸为  $5\text{mm} \times 5\text{mm}$ , 共分割为  $12 \times 8$  个单元, 单元参数计算如下:  $C = 9.9\text{pF}$ ,  $L = 0.126\text{nH}$ ,  $R_{\text{dc}} = 0.985\text{m}\Omega$ 。利用传输矩阵方法分别计算端口 1 处(3cm, 2cm)和端口 2 处(2.5cm, 1cm)的阻抗频率响应, 频率自 DC 至 1GHz 采样 50 点。

逐次增大 DS 搜寻矩阵  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  最小特征值, 当  $\lambda_{\min}$  降低到  $10^{-14}$  量级时再无显著变化, 此时 DS 为 15, 选择  $\text{NS} = \text{DS} - 1$ 。利用修正 Gram-Schmidt 正交化处理对矩阵  $\mathbf{A}$  进行正交三角分解, 得到分子、分母多项式系数的稳定最小二乘解, 随后利用 Bernoulli 多项式求根方法确定有理函数极点, 其中 MGS 及 Bernoulli 算法均通过 C 程序实现, 为提高计算精度, 使用双精度变量存储数据。舍去实部大于零的不稳定极点(由于利用稳定极点进行点匹配来确定部分分式系数, 所以并不会影响到时域宏模型精度), 保留位于复平面左半平面内的稳定极点, 求得宏模型各项系数, 对数据进行微调以满足约束准则式(14), 最终得到电源分配网络无源时域宏模型。

图 2, 图 3 对利用修正 Gram-Schmidt 正交化与直接最小二乘逼近两种方法得到的时域宏模型与原始频率信息进行了比较。可以看出直接最小二乘逼近由于病态条件数导致与原始频率响应信息之间存在较大误差, 尤其是在低频范围内, 而 MGS 正交化处理有效地克服了这一数值问题, 在全频带范围内达到了很好的逼近。

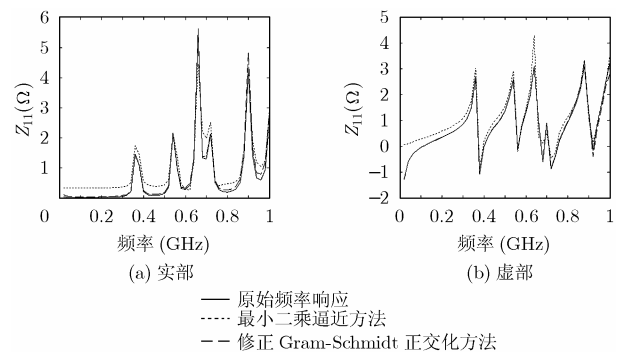


图 2 端口 1 阻抗频率响应

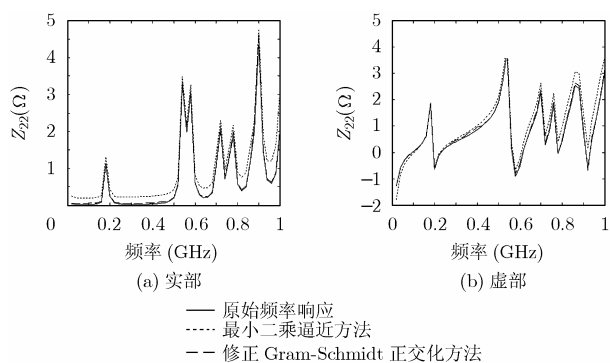


图 3 端口 2 阻抗频率响应

## 6 结束语

本文提出利用修正 Gram-Schmidt 正交化对有理函数逼近法方程组系数矩阵进行正交三角分解, 结合 Bernoulli 多项式求根方法及稳定、无源性准则可以精确构建电源分配网络时域宏模型。该方法可通过高效率的 C 程序实现, 计算精度高, 有效地解决了病态条件矩阵所带来的数值问题。下一步我们将利用电源分配网络时域宏模型结合线性、非线性电路器件研究高速电路系统和封装结构中的同步开关噪声问题。

## 参 考 文 献

- [1] Choi J, Min S H, and Kim J H. Modeling and analysis of power distribution networks for gigabit applications. *IEEE Trans. on Mobile Computing*, 2003, 2(4): 299-313.
- [2] Beyene W T. Improving time-domain measurements with a network analyzer using a robust rational interpolation technique. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 2001, 49(3): 500-508.
- [3] Gustavsen B and Semlyen A. Enforcing passivity for admittance matrices approximated by rational functions. *IEEE Trans. on Power Systems*, 2001, 16(1): 97-104.
- [4] Beyene W T and Schutt-Aine J E. Efficient transient simulation of high-speed interconnects characterized by sampled data. *IEEE Trans. on Components, Packaging and Manufacturing Technology-Part B*, 1998, 21(1): 105-114.
- [5] Min S H and Swaminathan M. Construction of broadband passive macromodels from frequency data for simulation of interconnect networks. Proceedings of the 15th Int'l Zurich Symp and Technical Exhibition on Electromagnetic Compatibility, Zurich, 2003: 299-313.
- [6] Kim J H, Matoglu E, Choi J, and Swaminathan M. Modeling of multi-layered power distribution planes including via effects using transmission matrix method. Proceedings of the 15th International Conference on VLSI Design, Bangalore, 2002: 59-64.
- [7] Choi K L and Swaminathan M. Development of model libraries of embedded passives using network synthesis. *IEEE Trans. on Analog and Digital Signal Processing*, 2000, 47(4): 249-260.
- [8] 蒋长锦. 科学计算和 C 程序集. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998: 198-204.

胡 晋: 男, 1980 年生, 博士生, 研究方向为高速数字集成电路系统中的信号完整性分析。

王华力: 男, 1967 年生, 教授, 研究方向为军事信息系统电磁防护。

金利峰: 男, 1972 年生, 高级工程师, 研究方向为高性能计算机工程设计与实现技术的系统研究。