

波形匹配小波设计及其在信号数据压缩中的应用

丁爱玲^{①②} 石光明^① 张宁^① 焦李成^①

^①(西安电子科技大学电子工程学院 西安 710071)

^②(长安大学信息工程学院 西安 710064)

摘要: 小波变换被广泛应用于信号数据压缩领域, 如何选择小波基, 达到用稀疏系数最优表示信号是提高压缩比的关键问题之一。该文提出了选用与信号波形最优相似的小波基压缩一维信号, 并提出了构造此类小波基的方法。利用结构化小波滤波器组以及新的波形相似准则, 给出了构造最优匹配小波基函数的算法。将此小波应用于一维信号数据压缩, 结果表明, 与其它的小波相比, 所构造的最优匹配小波对信号具有更好的压缩性能, 说明文中提出的方法是有效可行的。

关键词: 小波构造; 匹配小波; 滤波器组; 数据压缩

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)04-0804-04

Signal Compression and Design of Wavelet Based on Waveform Matching

Ding Ai-ling^{①②} Shi Guang-ming^① Zhang Ning^① Jiao Li-cheng^①

^①(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

^②(School of Information Engineering, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: Wavelet transform is widely used in data compression. How to choice the best wavelet base is a key point for improving the compression ratio. In this paper, a idea of using wavelet base functions matching to signal which need to be compressed is put forward. A waveform matching criteria for constructing matched wavelets, which it used to compress the one-dimension signal, is given. The wavelet filter is constructed with an structuring filter banks and the criteria, and an example of compressing a one-dimension signal is presented. Compared with other wavelet filters, the matched wavelet filter is able to improve the performance of signal compression.

Key words: Construction of wavelet; Matched wavelet; Filter banks; Data compression

1 引言

小波变换在信号压缩方面的应用日益增多, 但不同小波对不同类型的信号压缩性能有很大差异。为提高压缩比, 期望用很少的稀疏系数来表示信号。为此, 需要选择最佳匹配小波基来分解信号。Mallat^[1], Donoho^[2]等利用已存在的小波作为基库, 以减小一类代价函数为目标, 建立了非正交小波基, 但这些已有的小波基库不一定满足某些信号的特征需求。Chapa^[3]利用尺度函数的频谱逼近期望信号的频谱原则, 给出了直接设计母小波的算法。Anubha^[4]提出使信号在尺度子空间上的投影最大, 以得到与信号最匹配的小波。Alexandru与Andrei^[5]通过将光滑信号进行分段并对各段信号用多项式近似逼近, 对其使用不同消失矩的由同一母小波产生的小波, 以此来选择匹配小波基。Aleksandra^[6]探讨了建立特殊应用领域的选择小波基的准则。如何克服传统小波变换的不足, 以匹配信号特征为目标, 使小波函数适应信号的变化趋势, 从而能够用很少的稀疏系数来表示信号, 以提

高压压缩比是信号压缩的首要任务。

2 小波压缩原理

从数学的观点来看, 用小波对信号进行压缩的实质是用尽可能少的小波基函数加权求和项来逼近原信号。基函数与原信号越相似, 求和项就少, 信号压缩比就越高。设原信号为连续信号 $s(t)$, 则可用连续可导函数 $s'(t)$ 来逼近 $s(t)$:

$$s(t) = s'(t) + r(t) \quad (1)$$

且 $s'(t)$ 在每一点上可展开成 Taylor 多项式^[5], 如下式:

$$s'(t) = \sum_{k=0}^P \frac{1}{k!} s^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k + R_{p+1}(t) \quad (2)$$

其中右侧第 1 项是一个 P 阶多项式。如果母小波 $\psi_{r_0}(t)$ 具有 K 阶消失矩, 即:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r \psi_{r_0}(t) dt = 0, \quad r = 0, 1, \dots, K-1 \quad (3)$$

经过小波变换:

$$\text{WT}_s(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s'(\tilde{t}) \cdot \psi_{r_0}^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt, \quad a > 0 \quad (4)$$

可知式(1)右侧多项式中的第一项经变换后得到 0, 其余

是信号逼近的剩余项 $r(t)$ 和 Taylor 级数展开的剩余项 $R_{p+1}(t)$ 经变换后得到的变换系数。需要小波的尺度基函数与信号匹配最大。由于尺度函数与小波函数是正交的, 所以一个信号在尺度函数基投影最大, 则在小波函数基上投影达最小。

总之, 采用具有一定阶数消失矩匹配小波变换后, 变换后的系数能量很集中, 接近零的系数增多, 设定阈值去掉大量绝对值小的系数, 只保留少数绝对值大的系数, 这样仍然可以在误差范围内重构出原始信号从而达到压缩数据的目的。所以用小波变换压缩信号的关键之一是选择最佳小波基。

3 小波滤波器的构造

小波可以通过满足正则条件的完全重构滤波器组来构造^[7]。由文献[7]得到满足正则条件的消失矩 $K = 4$ 的双正交“9/7”分析低通滤波器 h_0 和重构低通滤波器 f_0 为

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= [1, 2(A+1), 4(A+B+1), 6A+8B+8C+6, \\ &\quad 8A+8B+16C+6, 6A+8B+8C+6, \\ &\quad 4(A+B+1), 2(A+1), 1] \\ f_0 &= [1, 2(\alpha+2), 8\alpha+7, 12\alpha+8, 8\alpha+7, 2(\alpha+2), 1] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

且

$$H_1(z) = -F_0(-z), \quad F_1(z) = H_0(-z) \quad (6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= -(3+\alpha) \\ B &= \frac{9\alpha^3 + 35\alpha^2 + 48\alpha + 24}{3\alpha^2 + 9\alpha + 8} \\ C &= -\frac{8(1+\alpha)^3}{3\alpha^2 + 9\alpha + 8} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

α 是可变参数, 小波基的波形随它而变。小波尺度函数 ϕ 和小波函数 ψ 的求解式为^[6]:

$$\phi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} H_0(2^{-k}\omega), \quad \psi(\omega) = H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{k=2}^{\infty} H_0(2^{-k}\omega) \quad (8)$$

一般只需要迭代几次就可得到很好的小波尺度和小波函数, 本文采用 3 次迭代。

4 匹配小波的选择准则及其算法

小波与信号的匹配可分为两种^[7]: 一种是统计意义上的能量匹配, 即对小波滤波器进行优化, 使其具有更好的能量紧支性和时频分辨率。另一种是波形匹配, 也就是尺度(或小波)函数与信号的相似程度, 相似程度越高, 则用来逼近原信号的求和项越少, 对信号进行压缩时得到的压缩比就越高。本文使用第 2 种匹配准则, 使尺度函数和原信号的相似。如果相似程度最好, 则尺度函数与各段截取信号的相关系数绝对值之和最大。

4.1 波形匹配小波优化准则

在雷达或超声探测中, 多数使用有源探测, 发射波形是预先设计好的。假设发射波是单脉冲, 则接收到的信号是由一串类似发射波的脉冲序列构成, 每个脉冲的幅度和相位有所差异, 所以回波的主要特征应该是已知的。波形匹配的目标是设计尺度函数 $\phi(t)$, 使其与发射信号 $s(t)$ 相似, 波形的相似程度可以用相关系数来计算, 如式(9)定义,

$$\rho_{s'\psi}(k) = \frac{\text{Cov}(s'(k), \phi(k))}{\sqrt{D(s'(k))D(\phi(k))}} \quad (9)$$

式中 $s'(k)$ 为 $s(t)$ 的信号采样点, $D(\bullet)$ 是方差, $\text{Cov}(\bullet)$ 为协方差。(注: $\phi(n)$ 的长度随式(14)的迭代次数增加而增加, 在计算式(9)时, 需要在时间轴上归一化, 对 $\phi(n)$ 再抽取得到 $\phi(k)$), 其协方差可用式(10)计算。

$$\text{Cov}(s', \psi) = E\{[s' - E(s')] \cdot [\phi - E(\phi)]\} \quad (10)$$

式中 $E(s')$ 和 $E(\phi)$ 分别为截取信号 $s'(k)$ 和小波尺度函数 $\phi(k)$ 的数学期望值, 依次求得截取信号 $s'(k)$ 和小波尺度函数 $\phi(k)$ 的相关系数, 则优化准则为使相关系数绝对值之和 R 最大:

$$R = \text{Max} \left\{ \sum_k |\rho_{s'\psi}(k)| \right\} \quad (11)$$

4.2 波形匹配小波算法设计

设原信号 $s(t)$ 的采样离散信号为 $s'(k)$, 以 α 为变量, 根据式(5), 式(6)和式(7)设计相应的分析滤波器 h_0 和 h_1 , 由 $h_0(n)$ 和 $h_1(k)$ 得到相应的小波尺度函数 $\phi(n)$ 。改变 α 将导致 $h_0(k)$ 和 $h_1(k)$ 特性的改变, 对其进行优化使式(11)的值最大。为了保证 $h_0(k)$ 和 $h_1(k)$ 具有良好的频率特性, 对式(11)进行改进成为式(12), 另一个目的是使得求解最大值问题转换成寻找最小值问题, 以便于优化计算。

$$E = [N - R] + [w_1 \int_0^{\omega_p} (1 - H_0(e^{j\omega}))^2 d\omega + w_2 \int_{\omega_s}^{\pi} H_0(e^{j\omega})^2 d\omega] \quad (12)$$

其中 N 为信号采样长度, ω_p, ω_s 分别为 $h_0(k)$ 的通带和阻带的截止频率, w_1, w_2 为加权系数, 应满足 $w_1 + w_2 = 1$ 。所以, 匹配小波的构造问题转变成以式(12)为目标函数, α 为变量的单变量优化问题。

其优化算法总结如下:

- (1) 给定待分析的信号离散值 $s(k)$;
- (2) 随机给定 α 的初值;
- (3) 根据式(5), 式(6)和式(7)计算相应的低通分解滤波器 $h_0(k)$ 和高通分解滤波器 $h_1(k)$;
- (4) 由式(8)计算相应的小波尺度函数 $\phi(k)$;
- (5) 对 $s(k)$ 从起始点依次进行截取, 分别得到与 $\phi(k)$ 相同长度的截取信号 $s'_i(k)$, $i=1, 2, \dots$;
- (6) 由式(9)分别计算 $\phi(k)$ 与各段截取信号 $s'_i(k)$ 的相关

系数 $\rho_{s'\psi}$;

(7)计算所有相关系数绝对值之和 $\sum |\rho_{s'\psi}|$ 和目标函数

式(12);

(8)根据单变量优化算法(在Matlab的优化工具箱含有多种优化函数), 调整 α 的系数, 使得式(12)的值达到最小。

注: 为满足性质 $\sum_k h_{0k} = \sqrt{2}$, 可将 h_0 和 f_0 进行归一化后再乘以相应系数。

5 小波构造实例与仿真结果

选择典型的超声脉冲信号匹配为例, 它是受指数调制的余弦信号, 可用式(13)描述,

$$s_0(t) = e^{-(t-k)^2/(2q^2)} \cdot \cos(2\pi f(t-k)) \quad (13)$$

其中 f 为中心频率(一般在 3~5Mhz), q 为控制脉冲宽度, k 为常数。本实验中脉冲波的幅度为 1, $q = 0.05$ 。为说明通用性, 再使用长度为 9 的 FIR 滤波器对其进行滤波, 以仿真任意信号的压缩问题。波形如图 1 中的实线所示。

优化得到的 9/7 匹配小波滤波器组的 $h_0(n)$ 和 $f_0(n)$ 的系数分别为 $H_0=[0.0524, -0.0439, -0.0833, 0.3974, 0.7688, 0.3974, -0.0833, -0.0439, 0.0524]$, $F_0=[-0.0760, -0.0635, 0.4295, 0.8342, 0.4295, -0.0635, -0.0760]$, 相应的 $\alpha = -1.5817$, 其分析滤波器组的频率特性曲线如图 1 所示。图 2 是按式(14)迭代 3 次得到的小波尺度函数曲线。图 3 是将小波空间的系数置零百分比设为 80%条件下, 分别采用 Daubechies 小波, Symlets 小波, Coiflets 小波和 Bior 双正交小波与所设计的 9/7 匹配小波得到的重构信号, 可见 9/7 匹配小波得到的重构信号与原信号非常相似。表 1 显示的是在设置 6 种不同的小波域空间系数置零百分比下, 匹配小波

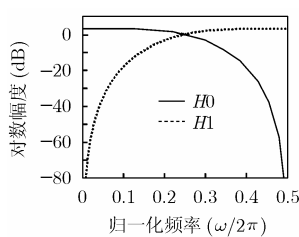


图 1 匹配滤波器组 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 的频率响应($\alpha=-1.5817$)

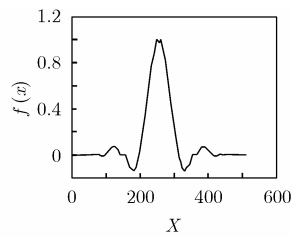


图 2 匹配小波尺度函数 ($\alpha=-1.5817$)

表 1 匹配小波($\alpha=-1.5817$)与其它小波在系数置零百分比下重构信号的均方误差

小波系数置零百分比(%)	80	60	50	40	30	0(保留所有系数)
9/7匹配小波	2.37×10^{-3}	1.06×10^{-5}	2.52×10^{-8}	8.11×10^{-11}	3.43×10^{-14}	2.53×10^{-29}
Db3	1.11×10^{-2}	5.53×10^{-5}	4.72×10^{-7}	4.06×10^{-9}	3.57×10^{-13}	1.50×10^{-22}
Sym3	1.11×10^{-2}	5.53×10^{-5}	4.72×10^{-7}	4.06×10^{-9}	3.57×10^{-13}	1.50×10^{-22}
Coif1	1.04×10^{-2}	9.83×10^{-6}	1.09×10^{-7}	4.87×10^{-10}	1.20×10^{-13}	3.79×10^{-24}
Bior2.2	1.32×10^{-2}	4.39×10^{-4}	1.47×10^{-6}	7.04×10^{-9}	1.08×10^{-11}	1.05×10^{-31}

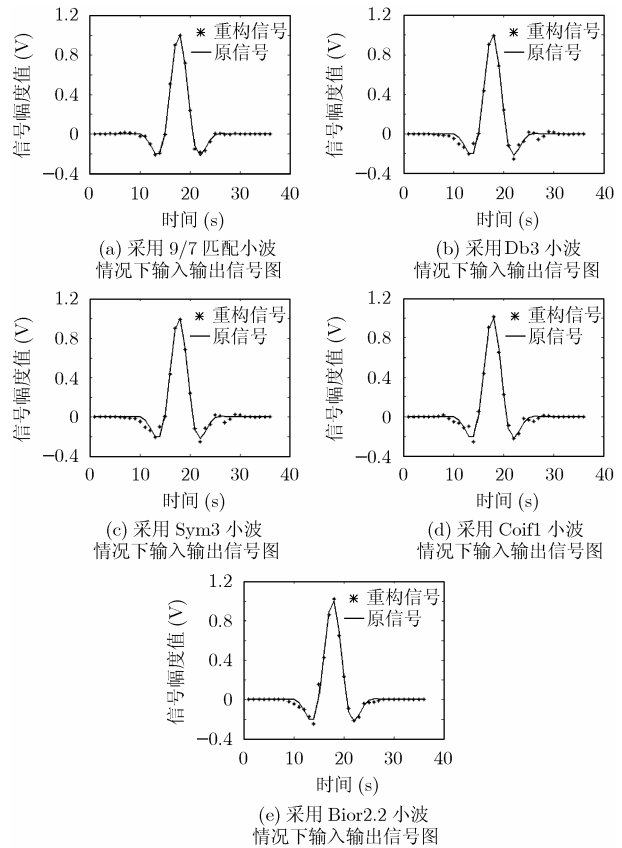


图 3 80%小波系数置零情况下采用不同小波所对应的输入输出信号图

和其它 4 种小波所产生的均方误差。计算结果表明, 匹配小波的其压缩性能优于作为比较的 4 种小波。

6 结束语

本文针对小波分析在信号压缩中的局限性,研究了基于匹配小波滤波器的一维信号压缩。提出了波形匹配设计匹配小波的准则, 利用匹配小波, 可使得信号的小波变换系数在小波变换域尽可能稀疏, 从而在不降低压缩信号的质量情况下,进一步提高信号压缩比。其次给出了一种设计与需要处理的信号波形匹配的小波滤波器组的算法, 依据该方法构造出最优 9/7 匹配小波滤波器及其小波基, 仿真结果表明构造的匹配小波, 对给定的一维信号的压缩性能明显优于其它常见的正交和双正交小波。

参 考 文 献

- [1] Mallat S G, *et al.* Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [2] Krim H, *et al.* On denoising and best signal representation. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1999, 45(7): 2225-2238.
- [3] Chapa O, *et al.* Algorithm for designing wavelets to match a specified signal. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2000, 48(12): 3395-3406.
- [4] Gupta A, Joshi S D, and Prasad S. On a new approach for estimating wavelet matched to signal. In: *Proceeding eighth national conference on communications*, Bombay, India. 2002: 180-184.
- [5] Isar A, and Cubi A, *et al.* A new wavelet basis searching method for the compression of smooth signals. In: *IEEE international conference on telecommunications*, Bucharest, Romania. 2001: 152-158.
- [6] Cohen A, Daubechies I, and Feauveau J. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure APPL.* 1992, 45(3): 485-560.
- [7] David B H, *et al.* Rationalizing the coefficients of popular biorthogonal wavelet filters. *IEEE Trans. on Circuits and System for Video Technology*, 2000, 10(6): 998-1005.
- 丁爱玲: 女, 1967年生, 副教授, 在职博士生, 研究方向为模式识别、小波与滤波器组应用.
- 石光明: 男, 1965年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能信号处理、小波与滤波器组应用、数据压缩.
- 张 宁: 男, 1973年生, 硕士生, 研究方向为小波在信号压缩中的应用.
- 焦李成: 男, 1959年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为智能信号处理.