

正弦信号参数估计中的采样率选择研究

李辉^{①②} 王岩飞^① 李炯^{①②}

^①(中国科学院电子学研究所 北京 100080)

^②(中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要: 该文从带通采样定理出发, 分析了欠采样后利用 FFT 估得的正弦信号参数(频率和初相)与真实值之间的关系, 并对欠采样下基于相位差分法的参数估计的误差进行了严格的推导。研究表明频率估计的误差在采样点数确定时正比于采样率, 而初相估计的误差则不受采样率的影响。计算机仿真的结果证明了理论推导的正确性。

关键词: 信号处理; 带通采样定理; 相位差分法; 参数估计

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)11-2653-04

On the Parameter Estimation of Sinusoidal Signal

Li Hui^{①②} Wang Yan-fei^① Li Jiong^{①②}

^①(Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

^②(Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: This paper utilizes FFT after undersampling to analyze the relationship between the estimation of sinusoidal parameters and corresponding actual values on the basis of bandpass sampling theorem. In addition, the errors of parameter estimation using phase difference are deduced strictly. Investigation indicates that the error of frequency estimation is proportional to the sampling rate, while that of initial phase independent of it. The results of computer simulation show the validity of academic conclusions.

Key words: Signal processing; Bandpass sample theorem; Phase difference; Parameter estimate

1 引言

正弦信号的参数(频率或初相)估计在雷达、声纳以及电子对抗等领域都有着极其广泛的应用。例如在雷达测距中, 回波的频率和初相估计精度直接决定了被测物体的径向速度和距离测量精度。基于DFT的谱分析方法尽管频率分辨率受到采样孔径的限制无法达到很高, 但是可以采用成熟的FFT, 运算速度快, 能够满足较高的实时性要求, 因此在分辨率要求不高的场合中得到了广泛的应用, 例如常用的插值估计法和相位差分法都是在FFT粗测结果基础上的进一步校正^[1,2]。尤其是相位差分法, 无需在频谱的最大和次大谱线间进行信号频率的搜索, 只需两次FFT就可以在不高的信噪比下获得精度相当高的频率和初相估值, 简便快捷, 十分有利于工程的实现。目前现有的文献大多致力于研究估计的精度和信噪比、采样点数等因素的关系, 而关于采样率的选取对估计的影响却很少涉及。本文就是从带通采样原理出发, 推导了采样对信号参数估计的影响, 并对相位差分法的高频窄带信号参数估计问题进行了详细的分析, 得出了采样率和估计精度之间严格的数学解析关系, 为具体电路实现时合理地选择采样速度提供了理论依据。利用MATLAB进行的计算

机仿真分析证明了理论推导的正确性。

2 采样对信号频率和初相的影响

下面利用带通采样定理来推导采样率对正弦信号初相的影响。

设采样率 f_s 满足欠抽样的约束, 即

$$\frac{2(f_c + B)}{2n + 1} \leq f_s \leq \frac{f_c - B}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

其中 f_c 和 B 为高频窄带信号的中心频率和带宽。采样后信号频谱在频域以 f_s 为间隔展开且不会混叠^[3]。

设窄带信号的任一频率成分为

$$s(t) = \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (2)$$

由文献[4]可得 $s(t)$ 采样后的频谱函数 $S'(\omega)$ 满足

$$\begin{aligned} S'(\omega) &= [e^{-j\theta} \pi \delta(\omega + \omega_0) + e^{j\theta} \pi \delta(\omega - \omega_0)] \\ &\quad * f_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n \cdot 2\pi f_s) \\ &= e^{-j\theta} \pi \delta(\omega + \omega_0 - n \cdot 2\pi f_s) f_s \\ &\quad + e^{j\theta} \pi \delta(\omega - \omega_0 - n \cdot 2\pi f_s) f_s \end{aligned} \quad (3)$$

对 $S'(\omega)$ 进行傅里叶逆变换, 得

$$\begin{aligned} s'(t) &= F^{-1}[S'(\omega)] \\ &= \frac{1}{2} e^{-j[(\omega_0 - n \cdot 2\pi f_s)t + \theta]} + \frac{1}{2} e^{j[(\omega_0 + n \cdot 2\pi f_s)t + \theta]} \end{aligned} \quad (4)$$

由上式可知,在满足频谱不发生混叠的前提下,合理选择采样率 f_s ,使得正谱线经过移位 $\omega_0 + n2\pi f_s$ 以后落在第一奈奎斯特区间 $[0, 0.5f_s]$ 内,这样估计所得的频率和初相为

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}_0 &= f_0 + n2\pi f \\ \hat{\theta} &= \theta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

因此有如下结论:带通采样以后基于 FFT 的参数估计可以得到原信号频率经过平移后落在第一奈奎斯特区间内的镜像,初相仍为原值不变。

3 欠采样下相位差分法估计性能

设待观测信号为只具有正频率的复正弦信号

$$s(t) = \exp[j(2\pi f_0 t + \theta)] \quad (6)$$

对信号的记录时间为 T ,总采样点数为 N ,将得到的序列分为前后两个等长的子序列 $s_1(n)$ 和 $s_2(n)$,做 $N/2$ 点的 FFT,得

$$\left. \begin{aligned} S_1(k) &= A_k \exp(j\varphi_k) \\ S_2(k) &= S_1(k) \exp(j\pi f_0 T) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 A_k 和 φ_k 分别为幅度项和相位项,有如下形式^[5]:

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{\sin[\pi(k - f_0 T/2)]}{\sin[2\pi(k - f_0 T/2)/N]} \\ \varphi_k &= \theta + (1 - 2/N)(f_0 T/2 - k)\pi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由式(8)可知幅度最大值处对应的离散频率为 $k_0 = [f_0 T/2]$,所以粗测频率为 $\hat{f}_k = k_0 \Delta f = k_0(2f_s/N)$,用 φ_1 和 φ_2 表示 $S_1(k)$ 和 $S_2(k)$ 在最大谱线处的相位,由文献[6]可知,利用 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 可以对粗测频率进行校准,偏差的估计为

$$\hat{f}_\delta = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Delta f \quad (9)$$

从而信号频率 f_0 的估值

$$\hat{f}_0 = \hat{f}_k + \hat{f}_\delta \quad (10)$$

同时得到初相 θ 的估值

$$\hat{\theta} = \frac{3N-2}{2N} \varphi_1 - \frac{N-2}{2N} \varphi_2 \quad (11)$$

在加性白噪声背景下,观测信号变为

$$r(t) = s(t) + z(t) \quad (12)$$

$z(t)$ 为零均值,双边功率谱密度 $N_0/2$ 的高斯白噪声,当系统的前端具有良好的滤波特性时,可认为带外噪声已被抑制到可以忽略不计的程度,这样实际起干扰作用的是白噪声落在滤波器通带内的部分,为一窄带平稳随机过程,均值仍为 0,方差 σ_z^2 即为功率,满足^[7]

$$\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} \times 2\text{BW} = N_0 \text{BW} \quad (13)$$

其中 BW 为滤波器的带宽,定义信噪比(默认信号幅度为 1)

$$\text{SNR} = 1/2\sigma_z^2 \quad (14)$$

带通采样以后,原本中心频率 $\pm f_0$,功率谱密度 $N_0/2$ 的窄带噪声也被延拓到整个频域 $(-\infty, +\infty)$ 上,落在第一奈奎斯特区间的信号噪声功率比 SNR' 为

$$\text{SNR}' = \frac{(\frac{1}{2}f_s)^2}{\frac{N_0}{2}f_s^2 \text{BW}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{N_0}{2} \text{BW}} = \frac{1}{2\sigma_z^2} \quad (15)$$

由式(15)可见,真正进行分析的第一奈奎斯特区间内的信噪比与采样前的模拟信号信噪比相等。

设采样后得到长度为 N 的序列

$$r(n) = s(n) + z(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (16)$$

$r(n)$ 的前 $N/2$ 点 DFT 可表示为

$$\begin{aligned} R_k &= A_k e^{j\varphi_k} + b e^{j\varphi_z} \\ &= |R_k| \exp[j\varphi_R(k)], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \end{aligned} \quad (17)$$

对于较大的 DFT 输出信噪比,由文献[5]可知在峰值谱线处的 $\varphi_R(k)$ 可近似表示为

$$\varphi_R(k)|_{k=k_0} = \varphi_{k_0} - \frac{b}{A_{k_0}} \sin(\varphi_z - \varphi_{k_0}) \quad (18)$$

且 $b e^{j\varphi_z}$ 为复高斯白噪声序列,有

$$E[b e^{j\varphi_z}] = 0, \quad \text{var}[b e^{j\varphi_z}] = N\sigma_z^2/2 \quad (19)$$

所以可以推出

$$\text{var}[b \sin(\varphi_z - \varphi_k)] = \text{var}[b \cos(\varphi_z - \varphi_k)] = N\sigma_z^2/4 \quad (20)$$

因此

$$\text{var}[\varphi_R(k_0)] = \text{var}\left[\varphi_{k_0} - \frac{b}{A_{k_0}} \sin(\varphi_z - \varphi_{k_0})\right] = \frac{N\sigma_z^2}{4A_k^2} \quad (21)$$

将式(8)代入式(21),有

$$\text{var}[\varphi_R(k_0)] \approx \frac{\sigma_z^2}{N \text{sinc}^2(\pi\delta)} = \frac{1}{2N \cdot \text{sinc}^2(\pi\delta) \cdot \text{SNR}} \quad (22)$$

δ 等于 $k_0 - f_0 T/2$,表示实际信号频率与最大谱线对应频率之间的相对偏差,因此 $\delta \in (-0.5, 0.5)$ 。

利用式(9),可得频率估计的方差:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{f}_0) &= \frac{\text{var}(\varphi_2 - \varphi_1)}{(2\pi)^2} (\Delta f)^2 \\ &= \frac{1}{4N\pi^2 \cdot \text{sinc}^2(\pi\delta) \cdot \text{SNR}} (\Delta f)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

初相估计的方差

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{5}{2 \cdot 2N \cdot \text{sinc}^2(\pi\delta) \cdot \text{SNR}} \quad (24)$$

由式(23),式(24)可知,当 $\delta = \pm 0.5$ 时,估计的误差达到最大,分别为

$$\left. \begin{aligned} \text{RMS}(\hat{f}_0)|_{\text{max}} &= \frac{0.25}{\sqrt{N \cdot \text{SNR}}} \Delta f \\ \text{RMS}(\hat{\theta})|_{\text{max}} &= \frac{1.7553}{\sqrt{N \cdot \text{SNR}}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

因此当采样点数 N 一定时,采用比低通采样速度低得多的带通采样可以大大减小 Δf ,所以相应地缩小了频率估计的绝对误差。值得一提的是,虽然估得的频率为原信号频率经过平移后落在第一奈奎斯特区间的镜像,但在许多应用场合,往往有一些先验条件可以确定真实频率所在的奈奎斯特区间,如雷达的回波频率就等于其发射信号频率和多普勒频移的叠加,这样只需将估计所得的 \hat{f}_0 平移到真实频率所在的奈

奈奎斯特区间，即可得到真实频率的估值。

4 仿真实证

设某双频测距仪接收到的回波信号为

$$r(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) + z(t)$$

其中 $f_1 = 81.6\text{MHz}$ ， $f_2 = 84\text{MHz}$ ； $z(t)$ 为零均值，方差等于 1 的高斯白噪声。为了验证不同采样率对信号参数估计的影响，现利用 MATLAB 强大的信号处理功能来加以研究^[8]。

首先进行奈奎斯特采样，采样率 f_s 选为 200MHz ，采样点数 $N = 1024$ ，两个正弦信号的信噪比 SNR 依次定为 6dB 和 10dB，为了能够方便地进行计算机数值处理，不妨设 $\phi_1 = 0$ ， $\phi_2 = 1\text{rad}$ ，这样分别对 f_1 ， f_2 ， ϕ_1 ， ϕ_2 进行 100 次估值后就可以求出每个待估参数的均方差，将仿真与理论计算的结果加以对比，如表 1 所示。而带通采样时采样率 f_s 满足式(1)，将 $f_c = 82.8\text{MHz}$ ， $B = 2.4\text{MHz}$ 代入，令 $n = 2$ ，得

$$34.08\text{MHz} \leq f_s \leq 40.2\text{MHz}$$

因此 f_s 可以取为中间值，即

$$f_s = (34.08 + 40.2) / 2 = 37.14\text{MHz}$$

重复上述的仿真过程，得到表 2。

表 1 奈奎斯特采样下的估值性能

| 待估频点 | 理论频率 | 仿真频率 | 理论初相 | 仿真初相 |
|----------------------------------|--------------|--------------|-------------|-------------|
| | 估计误差 (Hz) | 估计结果 (Hz) | 估计误差 (°) | 估计结果 (°) |
| $f_1=81.6\text{MHz}$ SNR=6dB | 765 | 758 | 1.58 | 1.45 |
| $f_2=84.0\text{MHz}$ SNR=10dB | 483 | 469 | 0.99 | 0.86 |

表 2 带通采样下的估值性能

| 待估频点 | 理论频率 | 仿真频率 | 理论初相 | 仿真初相 |
|----------------------------------|--------------|---------------|-------------|-------------|
| | 估计误差 (Hz) | 率估计结 果(Hz) | 估计误差 (°) | 估计结果 (°) |
| $f_1=81.6\text{MHz}$ SNR=6dB | 142 | 126 | 1.58 | 1.41 |
| $f_2=84.0\text{MHz}$ SNR=10dB | 90 | 75 | 0.99 | 0.84 |

从表 1，表 2 可以看出，计算机数值计算的频率和初相误差略小于理论值；在采样点数一定的情况下，采样率 f_s 的选取不影响初相的估计；而频率估计的误差随着 f_s 的降低显著减少，带通采样下 f_1 和 f_2 的估值误差与奈奎斯特采样时相比，依次为

$$\begin{aligned} \frac{\text{RMS}(\hat{f}_1)_{\text{带通}}}{\text{RMS}(\hat{f}_1)_{\text{奈奎斯特}}} &\approx 6 \\ \frac{\text{RMS}(\hat{f}_2)_{\text{带通}}}{\text{RMS}(\hat{f}_2)_{\text{奈奎斯特}}} &\approx 6.25 \end{aligned}$$

略大于理论值 $200 / 37.14 = 5.4$ ，这是因为理论值计算的为不同采样率下的最大估值误差，而计算机仿真的结果更接近于不同采样率下的平均估值误差。

为了验证在不同的信噪比下理论推导的正确性，现分别仿真出 f_1 和 f_2 的频率估计误差随信噪比变化的曲线 (SNR $\in [6\text{dB}, 20\text{dB}]$ ，以 1dB 为步进)，如图 1 所示。其中曲线 1 和曲线 2 分别表示 $f_s = 200\text{MHz}$ 时的频率估计误差理论曲线和仿真曲线；而曲线 3 和曲线 4 分别表示 $f_s = 37.14\text{MHz}$ 时的频率估计误差理论曲线和仿真曲线。从图 1 可以得出如下的结论：随着信噪比的上升，频率估值的误差逐渐减小且仿真值略小于理论值；较低的采样率可以带来较小的估值误差。

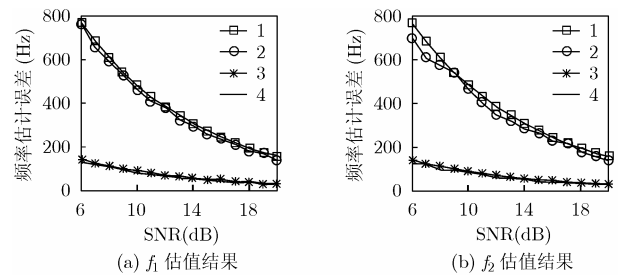


图 1 频率估计误差随信噪比变化的曲线

类似地，分别仿真出 ϕ_1 和 ϕ_2 的初相估计误差随信噪比变化的曲线，如图 2 所示。其中曲线 1 表示初相估计误差的理论曲线，曲线 2 和曲线 3 分别表示 $f_s = 200\text{MHz}$ 和 $f_s = 37.14\text{MHz}$ 时的初相估计仿真曲线。

从图 2 可以看出，初相估值的误差亦随信噪比的增大而减小并且与采样率的选取无关；估值误差的仿真值同样也是略小于理论值。

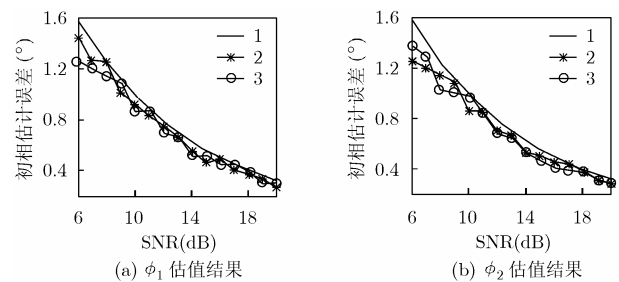


图 2 初相估计误差随信噪比变化的曲线

5 结束语

本文首先从带通采样定理出发，研究了单频正弦信号经过带通采样以后频谱的分布情况，得出了基于 FFT 的参数估计可以对信号的初相和落在第一奈奎斯特区间内的频率镜像进行估值的结论。接着文章分析了待检测信号被高斯白噪声污染时相位差分法的估计性能，并且推导出频率和初相估值误差与采样率、记录点数以及信噪比之间严格的数学解

析关系。该关系表明频率和初相估计的误差都随着信噪比的上升而减小,同时频率估计误差在采样点数确定时正比于采样率而初相估计误差则不受采样率的影响,所以采用欠采样可以大大减小频率估计的误差。运用 MATLAB 进行的计算机仿真的结果验证了理论研究的正确性。

参 考 文 献

- [1] Jain V K and Davis D C. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT[J]. *IEEE Trans. on IM*, 1979, 28(2): 113-122.
 - [2] Kay S. A fast and accurate single frequency estimator[J]. *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, ASSP-37(12): 1987-1990.
 - [3] 杨小牛, 楼才义. 软件无线电原理与应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004, 第二章.
 - [4] 郑君理. 信号与系统[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000, 第三章.
 - [5] 齐国清. 利用 FFT 相位差校正信号频率和初相估计的误差分析[J]. *数据采集与处理*, 2003, 18(1): 7-11.
 - [6] 齐国清, 贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精度估计方法[J]. *电子学报*, 2001, 29(9): 1164-1167.
 - [7] 盛骤, 谢式千. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001, 第十二章.
 - [8] 王沫然. MATLAB 与科学计算[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003, 第九章.
- 李 辉: 男, 1978 年生, 博士生, 研究方向为雷达测距技术和高频电路设计.
- 王岩飞: 男, 1963 年生, 研究员, 博士生导师, 现从事微波成像与数字信号处理技术的研究.
- 李 炯: 男, 1978 年生, 博士生, 研究方向为雷达测距技术和雷达信号处理.