

## 删余低密度奇偶校验码的分析与设计

王继康 周荷琴

(中国科学技术大学自动化系 合肥 230027)

**摘要:** 通信系统中在不同的信道条件下常采用不同的编码速率, 删余码是实现这种策略的有效方式。该文基于高斯近似思想, 分析了高斯白噪声信道上删余 LDPC 码的消息传递译码算法, 并在推导出消息均值迭代公式的基础上提出了一种优化删余分布的方法。仿真结果表明, 根据此优化方法设计的删余 LDPC 码在消息传递译码算法下, 消息均值增长较快并且消息传递译码算法具有较快的收敛速度。

**关键词:** 低密度奇偶校验码; 高斯近似; 删余

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)09-2149-05

## Analysis and Design of Punctured LDPC

Wang Ji-kang Zhou He-qin

(Department of Automation, USTC, Hefei 230027, China)

**Abstract:** In Communication systems, code rates are usually adapted to different channel environment, while puncturing is an effective solution to this strategy. Based on Gaussian approximation, the message-passing decoding algorithm for punctured Low-Density Parity-Check (LDPC) codes on Additive White Gaussian Noise (AWGN) channel is analyzed, as well as the recursive function for message mean is derived. According to this function, a novel design approach is proposed for optimizing the puncturing distributions. Simulation results demonstrate that not only the message mean of message-passing decoder increases more quickly for punctured LDPC optimized by the proposed approach, but also the convergence rate of message-passing decoder is faster than that by traditional approaches.

**Key words:** Low-Density Parity-Check (LDPC) code; Gaussian approximation; Puncturing

### 1 引言

在时变衰落信道上, 经常使用的差错控制策略是根据不同的信道条件采用不同的编码速率。实现这种策略的有效方式是使用速率兼容的编码, 也就是使用一系列不同速率的码, 此系列中所有码能够采用相同的一对编码器/译码器进行编译码。在构造速率兼容的编码时, 删余是最常用的一种方法, 即首先设计一个低速率码, 然后在传输时通过删除某些特定比特位来获得更高的编码速率。

常用的速率兼容的删余码主要有BCH码<sup>[1]</sup>, 卷积码<sup>[2]</sup>和Turbo码<sup>[3, 4]</sup>。BCH码和卷积码容易实现, 但不能提供接近容量的性能。Turbo码具有良好的性能, 可是其译码复杂度相当高。Gallager提出的低密度奇偶校验 (LDPC) 码的性能达到甚至超过了Turbo码, 并具有非常低的译码复杂度<sup>[5, 6]</sup>。在此基础上, Li和Narayanan提出了速率兼容LDPC码的概念<sup>[7]</sup>, 并且通过删余和扩展相结合从一个规则LDPC码构造了一系列删余LDPC码。Yazdani等<sup>[8]</sup>采用优化得到的不规则LDPC码作为母码, 通过删余和扩展相结合构造了速率分别为 8/10, 8/11, ..., 8/19 的一系列速率兼容LDPC码。Dholakia等<sup>[9]</sup>通过增加码符号的删余比例与减少奇偶校验方

程个数相结合的方式, 从阵列LDPC母码获得速率兼容的LDPC码, 适用于DSL系统。但上述方法都集中于速率兼容LDPC码的构造, 缺少理论分析, 从而不能保证构造的删余LDPC码最优。

Ha和McLaughlin<sup>[10-12]</sup>在理论上研究了删余LDPC码的收敛性, 指出译码迭代过程中附加删余比例仅仅依赖于母码的度数分布对以及删余分布。当删余分布设计合适时, 随着译码迭代次数增加, 附加删余比例收敛到零。优化删余分布时采用的性能标准是一个称为“门限值(threshold)”<sup>[13]</sup>的信道参数, 当信道信噪比低于此门限值时, 消息传递译码算法下比特错误率总不能收敛到零; 反之, 当信道信噪比高于此门限值时, 随着迭代次数增多, 比特错误率则趋于零。

本文基于高斯近似思想, 从删余 LDPC 码包括被删除的变量节点和未被删除的变量节点出发, 分析删余 LDPC 码在高斯白噪声信道(AWGN)下的消息传递译码算法, 并推导出消息均值更新的迭代公式, 称为稳态方程。基于稳态方程, 提出一种新的优化方法, 设计最优的删余分布。根据此优化方法为一个速率为 1/2 的 LDPC 码设计删余分布, 并研究了此删余分布下消息的迭代变化。仿真结果表明, 根据本文所提出的优化方法设计的删余 LDPC 码比文献[12]中设计的删余 LDPC 码消息均值增长更快, 表明消息传递译码算法具有

更快的收敛速度。

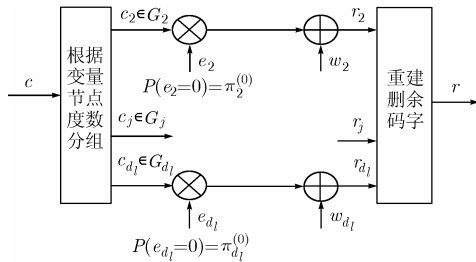


图 1 删余方案框图

## 2 删余 LDPC 码

删余方案框图如图 1 所示。首先，根据二分图中变量节点的度数把这些节点分组，将所有度数为  $j$  的变量节点分为一组，各组分别记为  $G_j$ ， $2 \leq j \leq d_i$ 。 $c_j$  为  $G_j$  中一个编码后的符号，即一个变量节点。然后，随机地删除  $G_j$  中的一些符号，删除的符号数占  $G_j$  中符号总数的比例为  $\pi_j^{(0)}$ 。用  $p^{(0)}$  表示总的删余比例，可以导出

$$p^{(0)} = \frac{\sum_{j=2}^{d_i} \pi_j^{(0)} n_j}{n} = \frac{\sum_{j=2}^{d_i} \pi_j^{(0)} \lambda_j / j}{\sum_{j=2}^{d_i} \lambda_j / j} = \sum_{j=2}^{d_i} \lambda_j' \pi_j^{(0)} \quad (1)$$

其中  $n_j = |G_j|$ ,  $n = \sum_{j=2}^{d_i} |G_j|$ 。记  $\pi^{(0)}(x) = \pi_2^{(0)}x + \pi_3^{(0)}x^2 + \dots$

$+ \pi_{d_i}^{(0)}x^{d_i-1}$ ,  $0 \leq \pi_j^{(0)} \leq 1$ ，则可以用三元组  $(\lambda(x), \rho(x), \pi^{(0)}(x))$  表示删余 LDPC 码码集。此删余 LDPC 码码集的设计码率为

$$r(\lambda, \rho, \pi^{(0)}) = r(\lambda, \rho) / (1 - p^{(0)}) \quad (2)$$

因为奇偶校验矩阵可能存在线性相关的行，所以式(1)中的码率是删余 LDPC 码的设计速率而非实际码率。但是，当码字长度较长 ( $n \rightarrow \infty$ )，码集中码的实际速率以很高的概率接近实际速率，所以可以假设设计速率等于实际速率。当母码固定后，信息位和校验位的长度固定，删余 LDPC 码则是通过从母码编码后的码字中删除一定的比特得到，从而发送速率得到提高。无论删掉的是信息位还是校验位，从编码前信息比特数和编码且删除后码字包含的比特数看来，删余 LDPC 码的码率都可以用式(1)表示。我们的目标是在一个给定的删余比例  $p^{(0)}$  下，为所有的  $j$  设计  $\pi_j^{(0)}$  以使 SNR 门限值最小化。因为删余码的码率大于母码的码率，所以删余码的 SNR 门限值将更高。从而，一个等价的问题是固定删余码的目标 SNR 门限值，然后针对此门限值设计删余分布  $\pi_j^{(0)}$  以使删余比例  $p^{(0)}$  最大化。在接收端，根据发送端的删余分布重新构建完整的接收码字  $r$ ，其中  $r_j$  为相应于发送符号  $c_j$  的接收信号。最后，把  $r$  送入消息传递译码器中进行迭代译码。

## 3 基于高斯近似的删余 LDPC 码分析

在消息传递译码过程中，第  $k$  次迭代时校验节点发出的对数似然比消息  $u^{(k)}$ ， $k \in N$  可以用均值为  $m_u^{(k)}$ 、方差为

$\text{Var}(u^{(k)})$  的高斯随机变量逼近。迭代过程中保持不变的对称条件  $f(x) = e^x f(-x)$  使得均值和方差之间具有下列关系： $\text{Var}(u^{(k)}) = 2m_u^{(k)}$ 。因此，仅通过跟踪整个迭代过程中消息均值的变化，就可以观察校验节点消息的概率密度函数  $f^{(k)}(u) = N(m_u^{(k)}, 2m_u^{(k)})$  的演化，其中  $N(\mu, \sigma^2)$  为均值为  $\mu$ 、方差为  $\sigma^2$  的正态分布概率密度函数。文献[12]从变量节点消息等于零的概率随译码迭代次数逐渐趋于零这一角度出发，分析了消息均值的变化。对于删余 LDPC 码，在译码初始化时，被删除的变量节点的对数似然比(LLR)消息会被置为零，即相应的发送比特为 1 或 0 的概率相同，故不能判决发送的比特。变量节点的消息等于零的概率逐渐趋于零也就意味着所有的发送比特都可以判别出来。下面从另外一个角度分析删余 LDPC 码并推导出译码过程中消息均值迭代公式，这儿把删余 LDPC 码中变量节点分成两种：未被删除的和被删除的。

### 3.1 删余 LDPC 码分析

文献[12]把变量节点及校验节点消息分成两个部分，即连续的部分和离散的部分。其中，连续部分指的是不为零的变量(校验)节点消息所占的部分，离散部分指的是为零的变量(校验)节点消息所占的部分。从而，消息密度包含零处的冲激函数，导致整个消息密度不能很好地近似为高斯分布。然而，变量节点的输出消息仍为高斯形状的，因为在变量节点处，许多独立同分布的输入消息进行叠加操作。而且，随着迭代次数的增加，变量节点消息为零的概率逐渐趋于零，从而离散部分所占的比例很小，这样整个消息密度可以近似为高斯。在下述分析中，我们把删余 LDPC 码中变量节点分成两种(未被删除的和被删除的)并且把消息概率密度近似为高斯分布。对于初始被删除、度数为  $i$  的变量节点，其在第  $k$  次迭代过程中消息的均值为

$$\tilde{m}_{v,i}^{(k)} = (i-1)m_u^{(k-1)} \quad (3)$$

对于初始未被删除、度数为  $i$  的变量节点，其在第  $k$  次迭代过程中的消息均值为

$$m_{v,i}^{(k)} = (i-1)m_u^{(k-1)} + m_{u0} \quad (4)$$

其中  $m_{u0}$  是初始信道对数似然比消息均值。这样，第  $k$  次迭代过程中变量节点发出消息  $v^{(k)}$  的平均概率密度逼近为

$$f_v^{(k)} = \sum_{i=2}^{d_i} \left[ \lambda_i^\pi N(\tilde{m}_{v,i}^{(k)}, 2\tilde{m}_{v,i}^{(k)}) + \lambda_i^{(1-\pi)} N(m_{v,i}^{(k)}, 2m_{v,i}^{(k)}) \right] \quad (5)$$

其中  $\lambda_i^\pi = \lambda_i \pi_i^{(0)}$ ， $\lambda_i^{(1-\pi)} = \lambda_i (1 - \pi_i^{(0)})$ 。从而

$$\begin{aligned} & E \left[ \tanh \frac{v^{(k)}}{2} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tanh \frac{v^{(k)}}{2} f_v^{(k)} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tanh \frac{v^{(k)}}{2} \sum_{i=2}^{d_i} \left[ \lambda_i^\pi N(\tilde{m}_{v,i}^{(k)}, 2\tilde{m}_{v,i}^{(k)}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i^{(1-\pi)} N(m_{v,i}^{(k)}, 2m_{v,i}^{(k)}) \right] dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=2}^{d_c} \lambda_i^\pi \left(1 - \phi\left(\tilde{m}_{v,i}^{(k)}\right)\right) + \sum_{i=2}^{d_c} \lambda_i^{1-\pi} \left(1 - \phi\left(m_{v,i}^{(k)}\right)\right) \\
&= 1 - \sum_{i=2}^{d_c} \left[ \lambda_i^\pi \phi\left(\tilde{m}_{v,i}^{(k)}\right) + \lambda_i^{1-\pi} \phi\left(m_{v,i}^{(k)}\right) \right] \quad (6)
\end{aligned}$$

其中

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} \int_R \tanh \frac{u}{2} e^{-\frac{(u-x)^2}{4x}} du, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

由高斯近似分析<sup>[14]</sup>知, 对于一个度数为  $d_c$  的校验节点, 有

$$E \left[ \tanh \frac{u^{(k)}}{2} \right] = E \left[ \tanh \frac{v^{(k)}}{2} \right]^{d_c-1} = 1 - \phi\left(m_u^{(k)}\right)$$

因此, 度数为  $s$  的校验节点在第  $k$  次迭代时发出消息的均值为

$$m_{u,s}^{(k)} = \phi^{-1} \left( 1 - \left[ 1 - \sum_{i=2}^{d_c} \left[ \lambda_i^\pi \phi\left(\tilde{m}_{v,i}^{(k)}\right) + \lambda_i^{1-\pi} \phi\left(m_{v,i}^{(k)}\right) \right] \right]^{s-1} \right) \quad (7)$$

从而, 第  $k$  次迭代时校验节点发出消息的加权均值为

$$\begin{aligned}
m_u^{(k)} &= \sum_{s=2}^{d_c} \rho_s m_{u,s}^{(k)} = \sum_{s=2}^{d_c} \rho_s \phi^{-1} \left( 1 - \left[ 1 - \left[ \sum_{i=2}^{d_c} \lambda_i^\pi \phi\left(\tilde{m}_{v,i}^{(k)}\right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \lambda_i^{1-\pi} \phi\left(m_{v,i}^{(k)}\right) \right] \right]^{s-1} \right) \quad (8)
\end{aligned}$$

把式(3)和式(4)代入式(8), 得到<sup>[12]</sup>

$$\begin{aligned}
m_u^{(k)} &= \sum_{s=2}^{d_c} \rho_s \phi^{-1} \left( 1 - \left[ 1 - \sum_{j=2}^{d_c} \left[ \lambda_j^\pi \phi\left((j-1)m_u^{(k-1)}\right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \lambda_j^{1-\pi} \phi\left((j-1)m_u^{(k-1)} + m_{u0}\right) \right] \right]^{s-1} \right) \quad (9)
\end{aligned}$$

这就是删余 LDPC 码的校验节点均值更新递归公式, 称之为稳态方程。

### 3.2 删余分布的优化

对于无差错译码, 消息均值随着迭代次数单调增加到无穷大, 即对于任何  $k \geq 0$  有  $m_u^{(k)} < m_u^{(k+1)}$ , 并且当  $k \rightarrow \infty$  时,  $m_u^{(k)} \rightarrow \infty$ 。这里, 对给定的  $m_{u0}$ , 求满足条件  $m_u^{(k)} < m_u^{(k+1)}$  并且使  $p^{(0)}$  最大的一组  $\{\pi_j^{(0)}\}$ 。这等价于对给定的总删余比例  $p^{(0)}$ , 选择  $\{\pi_j^{(0)}\}$  以使  $m_{u0}$  最小。在文献[12]中, 作者通过变换把不等式  $m_u^{(k)} < m_u^{(k+1)}$  表示为

$$\begin{aligned}
r &> \sum_{j=2}^{d_c} \left( \lambda_j^\pi h_j(0, r) + \lambda_j^{1-\pi} h_j(m_{u0}, r) \right) \\
&= h(0, \lambda^\pi(x), r) + h(m_{u0}, \lambda^{1-\pi}(x), r) \quad (10)
\end{aligned}$$

其中  $h_j(s, r) = \phi \left[ s + (j-1) \sum_{i=2}^{d_c} \rho_i \phi^{-1}(1 - (1-r)^{i-1}) \right]$ ,  $h(s, \lambda^q(x), r)$ ,

$r) = \sum_{j=2}^{d_c} \lambda_j^q h_j(s, r)$ ,  $q$  为  $\pi$  或  $1-\pi$ 。然后, 根据式(10)提出

一种删余分布设计方法。这里, 本文直接从稳态方程式(9)中的消息均值出发, 提出一种新的优化方法。因为设计的目标是在达到最优分布下, 消息均值能够随着迭代次数单调增加到无穷大。此外, 对于实际的译码, 如果消息均值增加较

快, 则经过更少的迭代次数, 即可做出正确的判决。优化算法如下:

首先, 约束条件  $m_u^{(k)} < m_u^{(k+1)}$  表示为

$$\begin{aligned}
m_u &< \sum_{s=2}^{d_c} \rho_s \cdot \phi^{-1} \left( 1 - \left[ 1 - \sum_{j=2}^{d_c} \left[ \lambda_j^\pi \phi\left((j-1)m_u\right) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \lambda_j^{1-\pi} \phi\left((j-1)m_u + m_{u0}\right) \right] \right]^{s-1} \right) \quad (11)
\end{aligned}$$

其次, 根据信道的噪声计算出  $m_{u0}$ , 再依次增大  $m_{u0}$  形成一组  $\{m_{u,i}\}$ 。根据每个特定的  $m_u$ , 解出方程

$$m_u = \sum_{s=2}^{d_c} \rho_s \cdot \phi^{-1}(1 - x^{s-1}) \quad (12)$$

中的  $x$ , 由  $f(x) = \sum_{s=2}^{d_c} \rho_s \cdot \phi^{-1}(1 - x^{s-1})$  的单调性可知, 约束条件(11)可等价于

条件(11)可等价于

$$x < 1 - \sum_{j=2}^{d_c} \left[ \lambda_j^\pi \phi\left((j-1)m_u\right) + \lambda_j^{1-\pi} \phi\left((j-1)m_u + m_{u0}\right) \right] \quad (13)$$

即有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{d_c} \left[ \lambda_j \pi_j^{(0)} \left\{ \phi\left((j-1)m_u\right) - \phi\left((j-1)m_u + m_{u0}\right) \right\} \right] \\
&< 1 - x - \sum_{j=2}^{d_c} \lambda_j \phi\left((j-1)m_u + m_{u0}\right) \quad (14)
\end{aligned}$$

可以看到此不等式包含  $\pi_j^{(0)}$  的线性组合。因此, 对于一个固定的度数分布对, 分别代入  $\{m_{u,i}\}$  中的各个值, 形成优化问题的约束方程组。

最后, 以  $p^{(0)} = \sum_{j=2}^{d_c} \lambda_j \pi_j^{(0)}$  为优化目标, 通过线性规划设计最优的删余分布  $\{\pi_j^{(0)}\}$ , 使得  $p^{(0)}$  最大。

## 4 删余分布设计

删余 LDPC 码的码率大于母码的码率, 因此其信噪比门限更高。在给定母码的度数分布对  $\lambda(x)$  和  $\rho(x)$  后, 固定删余 LDPC 码的目标信噪比门限  $E_b/N_0$ , 然后对于此门限值采用上节提出的算法优化(最大化)删余比例  $p^{(0)}$  以及删余分布  $\{\pi_j^{(0)}\}$ 。

根据上述优化方法为一个速率为 1/2 的 LDPC 码设计删余比例, 为了比较, 此 LDPC 母码的度数分布取自文献[12]:

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= 0.23403x + 0.21242x^2 + 0.14690x^5 + 0.10284x^6 \\
&\quad + 0.30381x^{19}
\end{aligned}$$

$$\rho(x) = 0.71875x^7 + 0.28125x^8$$

在不同目标信噪比下, 优化后的删余比例见表 1。

从表 1 可以看出, 随着目标信噪比的依次增大, 即噪声方差的依次减小, 可获得的最大删余比例越来越大, 这 and 理论预期的一样。另外, 通过上述设计方法获得的  $\pi_j^{(0)}$  (除了  $\pi_7^{(0)}$ ) 随着删余比例增大而单调递增, 这表明可以速率兼容的方式获得删余 LDPC 码。虽然  $\pi_7^{(0)}$  没有随着速率增加而增加, 但是  $\pi_7^{(0)}$  是如此之小以致在整个码率范围内可以被忽略。

表 1 不同目标信噪比条件下优化的删余分布  $\pi_j^{(0)}$  及总删余比例  $p^{(0)}$

$\sigma$	0.96612	0.91177	0.88555	0.84154	0.79457
$\pi_2^{(0)}$	0.00000	0.06452	0.11333	0.18838	0.25278
$\pi_3^{(0)}$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00520	0.03670
$\pi_6^{(0)}$	0.00000	0.07442	0.16638	0.29749	0.40082
$\pi_7^{(0)}$	0.00000	0.03333	0.00000	0.00000	0.00000
$\pi_{20}^{(0)}$	0.00000	0.16734	0.19078	0.20510	0.22158
$p^{(0)}$	0.00000	0.05122	0.08354	0.13547	0.18728

为了验证所提出设计准则的正确性,以噪声方差  $\sigma = 0.91177, 0.84154$  为例,观察在文献[12]中得出的打孔分布  $\{\pi_j^{(0)}\}$  和表 1 中得出的打孔分布  $\{\pi_j^{(0)}\}$  下消息均值  $\{m_u^{(k)}, k = 1, 2, \dots\}$  的变化过程,分别如图 2 和图 3 所示,其中横坐标表示迭代次数  $k$ ,纵坐标表示消息均值  $m_u^{(k)}$ 。从图 2 和图 3 可知,在噪声方差  $\sigma = 0.91177$  和  $\sigma = 0.84154$  下,用本文提出的方法得到的删余 LDPC 码比文献[12]中得到的删余 LDPC 码消息均值增长更快,表明消息传递译码收敛得更快。

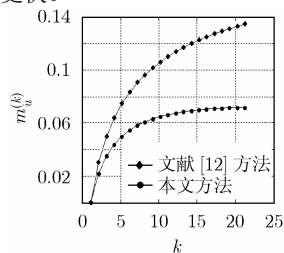


图 2 删余 LDPC 码的消息均值变化 ( $\sigma = 0.84154$ )

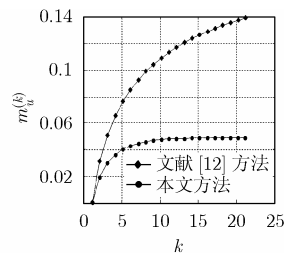


图 3 删余 LDPC 码的消息均值变化 ( $\sigma = 0.91177$ )

图 4 为删余 LDPC 码在 AWGN 信道上的性能曲线,横坐标为信噪比 ( $E_b/N_0$ ),纵坐标为误码率 (BER),从左到右删余分布  $p^{(0)}$  依次为 0.00000, 0.05122, 0.08354, 0.13547, 0.18728,  $\rightarrow$  为本文设计的打孔分布下的性能,  $\circ$  为文献[12]中设计的打孔分布下的性能。其中,码长  $N = 39999$ , 校验方程个数  $M = 20000$ , 随机构造的不规则奇偶校验矩阵  $H$  中不包含长度为 4 的环且其符合上述的度数分布对  $\lambda(x)$  和  $\rho(x)$ 。从图 4 可以看到,删余码的性能与理论预测一致。图 5 为不同信噪比下 LDPC 码的平均迭代次数。译码过程中,最大迭代次数设为 50。图 5 表明,本文所设计的打孔分布下,译码所需的译码次数较低。

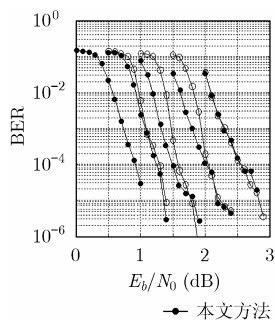


图 4 删余 LDPC 码的性能曲线

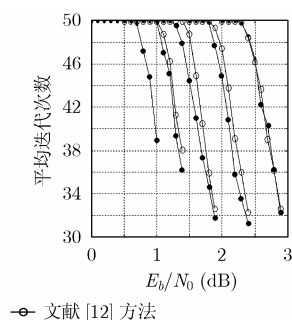


图 5 删余 LDPC 码译码时的平均迭代次数

## 5 结束语

本文针对 AWGN 信道研究了 LDPC 码的删余分布问题。基于高斯近似思想,分析了删余 LDPC 码在高斯白噪声信道下的消息传递译码算法,并推导出消息均值  $m_u^{(k)}$  更新的迭代公式。此迭代公式使得我们可以观察删余分布如何影响删余 LDPC 码的性能,进而指导构造实用的最优删余 LDPC 码。

根据消息均值迭代公式,本文提出一种获得最优删余分布的设计准则,此设计准则为一个简单的线性规划问题。为了验证所提出的设计准则,对一个速率为 1/2 的 LDPC 母码设计了不同目标信噪比门限下的删余比例,并且观察了  $\sigma = 0.91177$  和  $\sigma = 0.84154$  下删余 LDPC 码的消息均值随着迭代次数的变化情况。仿真结果表明,根据此优化方法设计的删余 LDPC 码在消息传递译码算法下,消息均值增长较快。对于随机构造的码长为 39999 的 LDPC 码,其删余码的性能与理论预测一致,消息传递译码算法具有更快的收敛速度。

## 参考文献

- [1] Lin S and Yu P S. A hybrid ARQ scheme with parity retransmission for error control of satellite channels. *IEEE Trans. on Comm.*, 1982, 30(7): 1701–1709.
- [2] Hagenauer J. Rate-compatible punctured convolutional codes (RCPC codes) and their applications. *IEEE Trans. on Comm.*, 1988, 36(4): 389–400.
- [3] Barbulescu A S and Pietrobon S S. Rate compatible turbo codes. *Electronics Letters*, 1995, 31(7): 535–536.
- [4] Rowitch D N and Milstein L B. Rate compatible punctured turbo (RCPT) codes in a hybrid FER/ARQ system. *IEEE GLOBECOM*, Rio de Janeiro, BR, 1999: 2341–2345.
- [5] Gallager R G. Low-density parity-check codes. *IRE Trans. On Info. Theory*, 1962, 8(1): 21–28.
- [6] Chung S Y, Forney G D, and Richardson T J, et al. On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit. *IEEE Comm. Letters*, 2001, 5(2): 58–60.
- [7] Li J and Narayanan K. Rate-compatible low density parity check codes for capacity-approaching ARQ scheme in packet data communications. *IEEE CIIT*, US Virgin Islands, 2002: 201–206.
- [8] Yazdani M and Banihashemi A. On construction of rate-compatible low-density parity-check codes. *IEEE Comm. Letters*, 2004, 8(3): 159–161.
- [9] Dholakia A and Olcer S. Rate-compatible low-density parity-check codes for digital subscriber lines. *IEEE ICC*, Paris, France, 2004: 415–419.
- [10] Ha J and McLaughlin S W. Optimal puncturing of

- low-density parity-check codes. IEEE ICC, Alaska, USA, 2003: 3110–3114.
- [11] Ha J and McLaughlin S W. Optimal puncturing distributions for rate-compatible low-density parity-check codes. IEEE ISIT, Yokohama, Japan, 2003: 233.
- [12] Ha J, Kim J, and McLaughlin S W. Rate-compatible of Low-density parity-check codes. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2004, 50(11): 2824–2836.
- [13] Richardson T J and Urbanke R. The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2001, 47(2): 599–618.
- [14] Chung S Y, Richardson T J, and Urbanke R L. Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation. *IEEE Trans. on Info. Theory*, 2001, 47(2): 657–670.
- 王继康: 男, 1979 年生, 博士, 研究方向为信道编码、多载波调制技术.
- 周荷琴: 女, 1946 年生, 教授, 研究方向为多载波通信系统、医学成像与图像处理、智能交通.