

MIMO 信道的空间相关特性及信道容量分析

高 凯 张尔扬

(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘 要: 该文针对非频率选择性 MIMO 衰落信道, 建立接收阵列的三维(3D)信道模型, 推导出关于空间距离矢量的空间相关函数表达式, 并且仿真分析了空间距离矢量对电压相关系数的影响, 分析了电压相关系数对信道容量的影响, 仿真结果说明电压相关系数与信道容量呈反比关系。

关键词: MIMO 信道; 空间相关特性; 信道容量

中图分类号: TN92

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)07-1542-04

Space Correlation of MIMO Fading Channel and Its Channel Capacity Analysis

Gao Kai Zhang Er-yang

(National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Aiming at mobile frequency nonselective fading MIMO channels, this paper proposes the 3D statistical channels model and a new space function for receive antennas. The effects of space distance parameters on the correlation and capacity are given by computer simulation. The result of simulation shows the channel capacity in inverse proportion to the correlation.

Key words: MIMO channel; Space correlation; Channel capacity

1 引言

近年来, MIMO 系统得到了广泛的注意, MIMO 系统能够抑制干扰、抗多径衰落, 从而提高系统的覆盖范围以及通信质量; 文献[1]说明通信的发射端与接收端同时采用多天线的 MIMO 信道, 相对于 SISO 信道能够提供更大的信道容量。

MIMO 信道中阵元的波达方向具有非全向性以及非均匀性, 因此信道传输函数的相关特性、无线信道的性能与相应的空间距离矢量具有密切的关系。文献[2-4]分析了 MIMO 信道空间的相关性, 但是只针对二维(2D)信道模型, 未考虑俯仰角对空间相关性的影响。文献[5, 6]针对不同的阵列建立三维(3D)信道模型, 考虑了俯仰角的扩展, 但是文中假设水平方位角(AA)与俯仰角(EA)的扩展在扩展范围内皆为均匀分布, 与实际不符。

本文在以上文献的基础上, 考虑俯仰角的非均匀扩展, 针对非频率选择性 MIMO 信道, 分别以 von Mises 概率密度函数与截尾高斯分布来描述电波到达方向的水平方位角与俯仰角度的概率分布, 以二元阵为例, 建立 MIMO 信道接收阵列的 3D 模型, 推导出关于空间距离矢量 Δr 的空间相关函数的表达式, 分析了 Δr 对电压相关系数的影响, 并且分析了电压相关系数对信道容量的影响。

2 信道模型

MIMO 信道中阵元接收电波的波达方向具有非全向性

以及非均匀性, 处于不同位置的阵元具有不同空间相关性。为分析阵元之间的空间相关特性, 以及无线信道的性能, 本文首先针对非频率选择性 MIMO 信道的接收阵列建立三维模型。考虑一个具有 n_R 个接收天线阵元的窄带单用户通信系统, 非频率选择性 MIMO 衰落信道的接收天线接收到的信号可以表示为:

$$r(t) = h(t)s(t) + n(t) \quad (1)$$

其中 $r(t) = [r_1(t) \cdots r_{n_R}(t)]^T$, 为接收矢量; $n(t) = [n_1(t) \cdots n_{n_R}(t)]^T$, $n_i(t)$ 为第 i 个接收天线上的加性高斯白噪声(AWGN), 均值为 0, 单边功率谱密度为 N_0 ; $h(t)$ 为 $n_R \times 1$ 等效低通复传输矩阵, $h_i(t)$ 为第 i 个接收端天线与发射天线之间的等效低通输出延迟扩展函数。

图 1 显示了接收端为二元阵时, 接收电波散射分量的示意图。二元阵为多元、任意配置的天线阵的最基本结构, 因此本文的分析结果可以推广到任意多元天线阵的 MIMO 系统。

如图 1 所示, 在空间 r_1 , r_2 处分别有两个天线阵元。

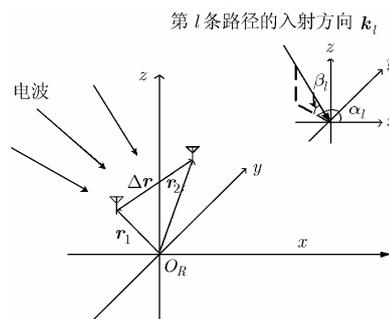


图 1 天线接收电波模型

入射波在三维空间以平面波的形式传播到天线阵。不同的路径都会引入一定的增益与相位, 假设同一路径引入的增益与相位是相互独立的, 不同的路径引起的增益(相位)之间也是相互独立的, 并且在平面波传播条件下, 进一步假设不同的接收天线在同一路径 l 上引入的增益、相位相同, 令 g_l , ϕ_l 表示经由路径 l 引入的增益、相位。

考虑从发射端天线发射单位功率电波, 第 i 个天线接收到的功率为 Ω_i , $\Omega_i = E[|h_i(t)|^2] \leq 1$ 。则信道的等效低通输出延迟扩展函数可表示为:

$$h_i(\mathbf{r}_i) = \sqrt{\frac{1}{L}} \sum_{l=1}^L G_i(\alpha_l, \beta_l) g_l \exp[j\phi_l - j2\pi \mathbf{r}_i \mathbf{k}_l] \quad (2)$$

其中 $G_i(\alpha_l, \beta_l)$ 为天线 i 方向图, \mathbf{k}_l 为第 l 条路径的波数矢量, $\mathbf{k}_l = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos(\beta_l) \cos(\alpha_l), \cos(\beta_l) \sin(\alpha_l), \sin(\beta_l))$, α_l , β_l 分别为第 l 条路径的方位角与俯仰角, λ 为波长。

3 空间相关函数分析

广义平稳非相关散射(WSSUS)条件下, 无线衰落信道的二阶统计特性可以刻画信道的基本特性, 为了分析多径衰落信道上 MIMO 系统的性能, 必须研究 MIMO 信道的空间相关特性。在 WSSUS 条件下, 对于 MIMO 信道而言, 由于信号到达角度的非全向性以及非均匀分布, 信道传输函数的相关特性与相应的空间距离矢量具有密切的关系。

两个接收天线接收到信号的相关函数定义为:

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2}} E[h_1(\mathbf{r}_1) h_2^H(\mathbf{r}_2)] \quad (3)$$

将式(2)代入式(3), 并整理可得:

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{L \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}} \sum_{l=1}^L G_1(\alpha_l, \beta_l) G_2(\alpha_l, \beta_l) E(g_l^2) \cdot \exp[-j2\pi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbf{k}_l] \quad (4)$$

$\{g_l\}_{l=1}^{\infty}$ 是正的独立同分布的随机变量, 不失一般性假设:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L E(g_l^2) = 1 \quad (5)$$

对于窄带信道建模, 亦即对于非频率选择性信道建模, 一般忽略传播路径距离的不同导致的衰减的不同。 $E(g_l^2)/L$ 表示第 l 条路径上的电波功率, 而每一路径都对应一个特定角度 (α_l, β_l) , 故在假设每一散射体导致的衰减相互独立且服从同一分布的情况下, 当 $L \rightarrow \infty$ 大时, $E(g_l^2)/L$ 可以表示为 $f(\beta)f(\alpha)d\beta d\alpha$, 其中 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 分别为电波到达方向的水平方位角(AA)与俯仰角(EA)的概率密度函数。式(4)可以表示为:

$$R(\Delta \mathbf{r}) = R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2}} \iint G_1(\alpha, \beta) G_2(\alpha, \beta) \cdot \exp[-j2\pi \Delta \mathbf{r} \mathbf{k}_{\alpha, \beta}] f(\beta) f(\alpha) d\beta d\alpha \quad (6)$$

其中 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = r(\cos(\beta_r) \cos(\alpha_r), \cos(\beta_r) \sin(\alpha_r), \sin(\beta_r))$, α_r , β_r 分别为矢量 $\Delta \mathbf{r}$ 的水平方位角与俯仰角。

用来描述 MIMO 信道中到达信号水平方位角(AA)的分布函数有多种: 均匀分布, 高斯分布, $\cos^n(\alpha)$ 分布, 拉普拉斯分布等。本文采用 von Mises 概率密度函数来描述收发端水平散射角度的分布^[4,7]:

$$f_\alpha(\alpha) = \frac{\exp(\kappa \cos(\alpha - \mu))}{2\pi I_0(\kappa)}, \quad \alpha \in [-\pi, \pi] \quad (7)$$

其中 $I_0(\cdot)$ 为零阶修正的贝塞尔函数; $\mu \in [-\pi, \pi]$, 为散射体分布的平均角度; κ 表示散射体在角度 μ 附近扩展的因子。

von Mises 分布具有很强的灵活性, κ 为 0 时, 可以表示为全向均匀分布; κ 较大时, 与高斯分布非常接近; κ 较小时, 与 $\cos^n(\alpha)$ 分布非常接近。

对于到达信号俯仰角(EA)的分布, 有多种分布模型来描述: Aulin 模型, Parsons 模型等。本文采用截尾高斯分布来描述接收端 EA 的分布^[8]:

$$f(\beta) = A_E \exp[-(\beta - \beta_0)^2 / (2\sigma_\beta^2)], \quad \beta \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (8)$$

其中 β_0 为 EA 扩展均值, σ_β^2 为 EA 扩展方差参数, A_E 为使 $f(\beta)$ 在 β 分布区间积分为 1 的所取参数。

假设接收天线为各向同性, 即 $G_1(\alpha, \beta) = G_2(\alpha, \beta) = 1$, 假设 $\Omega_1 = \Omega_2 = 1$, 将式(7), 式(8)代入式(6), 再利用积分公式 $\int_{-\pi}^{\pi} \exp(x \cos z + y \sin z) dz = 2\pi I_0(\sqrt{x^2 + y^2})$, 化简可得:

$$R(\Delta \mathbf{r}) = \frac{1}{I_0(\kappa)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda} r \sin(\beta_r) \sin(\beta)\right] A_E \cdot \exp\left[-(\beta - \beta_0)^2 / (2\sigma_\beta^2)\right] I_0\left\{\left[\kappa^2 - r^2(2\pi/\lambda)^2\right] \cdot \cos^2(\beta_r) \cos^2(\beta) - j2\kappa r(2\pi/\lambda) \cos(\beta_r) \cos(\beta) \cdot \cos(\mu - \alpha_r)\right\}^{1/2} d\beta \quad (9)$$

一般难以解析地求出式(9)的精确结果, 通常可以采用数值微分的方法求出, 也可以采用级数展开的方法求解。

利用文献[9]中公式 $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)}$, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$,

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, 式(9)整理后可得:

$$R(\Delta \mathbf{r}) = \frac{A_E}{I_0(\kappa)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=0, \\ k+m \text{ 为偶}}}^{2n} \sum_{i=0}^p \sum_{q=0}^{p-i} \sum_{l=0}^m \sum_{t=0}^{2i+q} \binom{2n}{k} \binom{p}{i} \binom{p-i}{q} \cdot \binom{m}{l} \binom{2i+q}{t} \frac{(-1)^{n+l} A^m \beta_0^k B^i C^q \kappa^{2(p-i-q)}}{m! n! p! \Gamma(p+1) 2^{m+n+2p+2i+q-1} \sigma_\beta^{2n}} F \quad (10a)$$

$$F = \begin{cases} \frac{\Gamma(-j(m-2l+2i+q-2t)\pi/2, 2n-k+1)}{(-j)^{2n-k+1} (m-2l+2i+q-2t)^{2n-k+1}}, & m-2l+2i+q-2t \neq 0 \\ (\pi/2)^{2n-k+1} / (2n-k+1), & m-2l+2i+q-2t = 0 \end{cases} \quad (10b)$$

其中 $A = -j(2\pi/\lambda)r \sin \beta_r$, $B = -r^2(2\pi/\lambda)^2 \cos^2(\beta_r)$, $C = -j2\kappa r(2\pi/\lambda) \cos(\beta_r) \cos(\mu - \alpha_r)$, $\Gamma(a, m)$ 为不完全 Γ

函数。

式(9), 式(10)综合考虑电波到达方向的三维非均匀扩展, 空时相关函数直接与距离矢量联系, 并且可以推广到任意的多元接收阵列中。

4 仿真分析

4.1 相关特性分析

工程上, 如果忽略相位的影响, 常用 $|R(\Delta\mathbf{r})|$ 描述两天线的电压相关系数。图 2, 图 3 显示了 $\Delta\mathbf{r}$ 变化时, 电压相关系数 $|R(\Delta\mathbf{r})|$ 的变化。仿真中, 来波的水平扩展角度均值 μ 取为 0, 水平角度扩展因子 κ 取为 50; 来波的俯仰扩展角度均值 β_0 取为 0, EA 扩展参数 σ_β 取为 10° 。

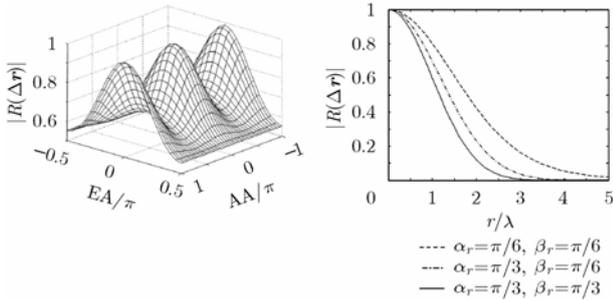


图 2 空间距离矢量方位角对相关性的影响

图 3 空间距离变化对相关性的影响

图 2 中, 间距 r 取为 λ , 显示了 $\Delta\mathbf{r}$ 的水平扩展角 α_r 在 $[-\pi, \pi]$ 之间变化, 以及俯仰扩展角 β_r 在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 之间变化时, 电压相关系数 $|R(\Delta\mathbf{r})|$ 的变化。由图可以看出随着 $\Delta\mathbf{r}$ 方向的变化, 电压相关系数也随之变化。当 $\Delta\mathbf{r}$ 的方向与来波的角度扩展均值一致时, 即 $[\alpha_r, \beta_r]$ 取为 $[0, 0]$ 时, 电压相关系数最大; 随着 $\Delta\mathbf{r}$ 偏离来波的角度扩展均值, 电压相关系数逐渐的变小。

图 3 显示了 $[\alpha_r, \beta_r]$ 分别取为 $[\pi/6, \pi/6]$, $[\pi/3, \pi/6]$, $[\pi/3, \pi/3]$ 时, 电压相关系数 $|R(\Delta\mathbf{r})|$ 随着间距 r 的变化。由图可知随着 r 的变大, 电压相关系数逐渐的变小; 同时可以看出, 随着 $\Delta\mathbf{r}$ 偏离来波的角度扩展均值越大, 电压相关系数下降得越快。

4.2 信道容量分析

信道传输容量的传输概率可以表示为^[1,10]

$$P(C_{\text{out}}) = P(C < C_{\text{out}}) \quad (11a)$$

其中统计容量 C 可以表示为

$$C = E(C_t) = E \left[\log_2 \det \left(I_{n_r} + \frac{P_T}{n_T P_n} \mathbf{H} \mathbf{H}^* \right) \right] \quad (11b)$$

其中 \mathbf{H} 为归一化的信道传输矩阵, 信道传输矩阵归一化后, \mathbf{H} 的所有分量都具有单位的平均衰落功率, 亦即收发功率相同。 P_T 为发射端的总功率, 假设各发射天线上的功率相等, P_n 为接收端白噪声的功率, n_T 为发射天线数目。 P_T / P_n 即为信噪比(SNR)。

为分析接收端空间相关性对信道容量的影响, 不失一般性文中取 n_T 为 1, n_R 为 2。

图 4 显示了信道的归一化传输容量在不同间距 r 时累积

概率分布(CDF)曲线。仿真中, $[\alpha_r, \beta_r]$ 取为 $[\pi/3, \pi/6]$; SNR 取为 10dB; 仿真数为 10^5 个数据, 其它参数同上。图中信道容量采用同样 SNR 条件下无衰落 SISO 信道容量 C_0 进行归一化。由图可以看出随着间距 r 的变大 CDF 曲线变得更为陡峭, 信道统计容量变得更大。

图 5 显示了信道的归一化传输容量在不同角度时的 CDF 曲线。仿真中, 间距 r 取为 λ , $[\alpha_r, \beta_r]$ 分别取为 $[\pi/6, \pi/6]$, $[\pi/3, \pi/6]$, $[\pi/3, \pi/3]$; SNR 取为 5dB; 其它参数同上。同样采用同 SNR 条件下无衰落 SISO 信道容量 C_0 进行归一化。由图可以看出随着 $\Delta\mathbf{r}$ 偏离来波的角度扩展均值越大, CDF 曲线变得越陡峭, 信道统计容量越大。原因在于, 随着间距 r 变大或 $\Delta\mathbf{r}$ 偏离来波的角度扩展均值越大, 电压相关系数变小。故可以得出天线之间的相关性越强则信道的容量越小, 传输容量的 CDF 曲线变化越缓, 越小于独立不相关高斯信道的容量。

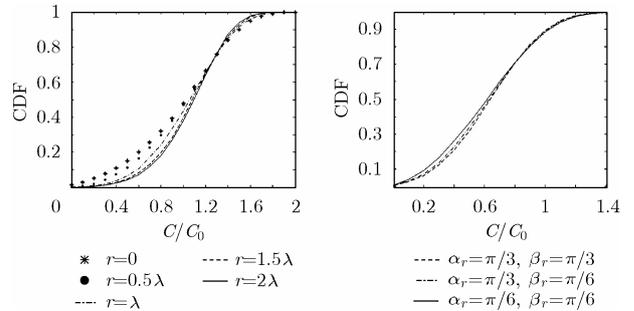


图 4 空间距离对容量的影响

图 5 空间角度对容量的影响

5 结束语

本文针对非频率选择性 MIMO 信道, 建立接收阵列的 3D 信道模型, 以 von Mises 概率密度函数来描述水平角度的概率分布, 以截尾高斯分布来描述电波到达方向的俯仰角度的概率分布, 推导出关于空间距离矢量 $\Delta\mathbf{r}$ 的空间相关函数表达式, 并且分析了 $\Delta\mathbf{r}$ 对电压相关系数以及信道容量的影响。得出了一些结论: $\Delta\mathbf{r}$ 越偏离来波的平均到达方向, 间距 r 越大, 电压相关系数越小; 同时得出信道的容量反比于电压相关系数, 电压相关系数越大, 容量越小。

参考文献

- [1] Telatar I E. Capacity of multi-antenna Gaussian channels [J]. *European Trans. on Telecommun. Related Technol.*, 1999, 10: 585-595.
- [2] 李忻, 聂在平. MIMO 信道中衰落信号的空域相关性评估[J]. *电子学报*, 2004, 32(12): 1949-1953.
Li Xin and Nie Zai-ping. Evaluating the spatial correlation of fading signals in MIMO channels. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(12): 1949-1953.
- [3] Lee W C Y. Effect on correlation between two mobile base station antennas[J]. *IEEE Trans. on Communications*, 1973, COM-21(11): 1214-1224.
- [4] Abdi A and kaveh M. A space-time correlation model for

- multielement antenna systems in mobile fading channels [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communication*, 2002, 20(3): 550–560.
- [5] Yong S K and Thompson J S. A three-dimensional spatial fading correlation model for uniform rectangular arrays [J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2003, 2: 182–185.
- [6] Yong S K and Thompson J S. Three-dimensional spatial fading correlation models for compact MIMO receivers [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2005, 4(6): 2856–2869.
- [7] Abdi A and Kaveh M. A versatile spatio-temporal correlation function for mobile fading channels with non-isotropic scattering [A]. In: Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing. [C]. 2000: 58–62.
- [8] Taga T. Analysis for mean effective gain of mobile antennas [9] in land mobile radio environments [J]. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 1990, 39(2): 117–131.
- [10] 沈永欢等. 实用数学手册 [M]. 北京: 科学出版社, 2000 年, 第一、七、十七章.
- [11] Foschini G J and Gans M J. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas [J]. *Wireless Personal Communication*, 1998, 6(3): 331–335.
- 高 凯: 男, 1978 年生, 博士生, 研究方向为无线信道仿真、扩展频谱通信.
- 张尔扬: 男, 1941 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为军用无线通信与网络技术、空间通信与组网、军用电子信息系统仿真技术.