

Σ - Δ 插值型 A/D 转换器的结构优化设计

唐圣学^{①②} 何怡刚^① 郭杰荣^① 李宏民^①

^①(湖南大学电气与信息工程学院 长沙 410082)

^②(吉首大学物理科学与信息工程学院 吉首 416000)

摘要: 该文提出了一种新的通用高阶稳定的 Σ - Δ 插值型A/D转换器的优化设计算法。该算法采用状态空间下通用的插值型结构,研究了设计原理和设计的详细过程,给出了传输函数变换和稳定条件,实现了零点优化和巴特沃思极点的噪声传递函数。在结构系数的实现中,采用能量增量最小的优化算法,使A/D转换器具有更佳的稳定性能。最后,通过例子验证了该方法的有效性。

关键词: Σ - Δ A/D转换器; 稳定性; 插值型

中图分类号: TN79+2

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)07-1775-04

Structure Optimal Design of Σ - Δ A/D Interpolative Modulator

Tang Sheng-xue^{①②} He Yi-gang^① Guo Jie-rong^① Li Hong-ming^①

^①(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

^②(College of Physics Science and Information Engineering, Jishou University, Jishou 416000, China)

Abstract: In the paper, a new general optimal design method of stable high-order interpolative Σ - Δ A/D modulator is presented. The design principle and process in detail are given by using an interpolative structure in state space and the transfer function conversion, then the noise transfer function is realized by optimized zero and Butterworth poles. The stable condition of modulator is studied and the structure coefficients are gained by minimizing the state energy in order to make the modulator more stable. Finally illustrative examples are demonstrated to show the effectiveness.

Key words: Σ - Δ A/D modulator; Stability; Interpolative structure

1 引言

Σ - Δ A/D转换器是现代高精度混合集成电路模数转换器部分应用最广泛的技术,其主要优点是内在的高度线性和对模拟元件参数的非敏感性,因而利于采用现代大规模、超大规模电路工艺实现混合信号电路的集成。

Σ - Δ A/D转换器设计实现主要是按照给定的性能指标设计其噪声传递函数,而后仿真验证其稳定性。在电路的具体实现结构中,通常采用插值型结构^[1-3]。目前,国内学者在高阶 Σ - Δ A/D转换器研究集中在传递函数上,其稳定性采用仿真试验的方法,对传递函数的实现结构及其优化的研究很少^[4-6];国外学者对其高阶的传递函数、结构和算法都有研究。文献[4]提出一种在调制器内部状态参量小于电源电压的约束条件下,通过仿真调整积分器增益来保证高阶转换器稳定的设计方法,然而忽略了 Σ - Δ A/D转换器的主要性能是由信噪比、带宽性能和信号输入范围决定。文献[5]提出在最大输

入范围下试验调整噪声传递函数的极点,使带外增益小于给定的预设值而稳定,不足是计算量大和带外增益的随机性,没有涉及实现结构。文献[6]提出数字Chebyshev IIR滤波器的设计方法来设计调制器理想噪声传输函数,通过反复调整IIR滤波器的截止频率和仿真进行稳定性验证,其实截止频率和带宽一样是由信号决定的;实现原理是通过比较噪声函数得到前馈结构的系数,没有进行系数优化。文献[1]对插值型各种结构进行了研究,但是没有给出噪声传输函数、信号传输函数与插值型结构系统的关系。文献[7]提出并实现了利用反Chebyshev方法来设计的工具,但是没有进行噪声传输函数和结构系数的优化,采用的是简单的串行结构实现。

本文提出一种通用高阶稳定的插值型 Σ - Δ A/D转换器的设计算法,研究了在给定带宽、输入范围下零点优化和巴特沃思极点设计噪声传输函数的方法和判定其稳定的条件;研究了噪声传输函数、信号传输函数与插值型结构系数的关系和其系数实现的优化方法。在Matlab工作平台和Rchreier工具上建模对 Σ - Δ A/D转换器行为进行了仿真和性能比较,验证了该方法的有效性。

2 Σ - Δ A/D转换器

基本的高阶单量化器(一位或多位) Σ - Δ A/D 转换器的

2005-12-26 收到, 2006-07-03 改回

高校博士点基金(20020532016), 国家自然科学基金(50277010), 湖南省科技计划项目(03JJY1010, 03GKY3115, 04FJ2003, 05GK2005), 湖南省教育厅资助项目(05C141), 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-04-0767)和湖南大学撇英计划资助课题

模型如图1所示, 整个转换器是一个非线性系统, 由一个滤波器 $H(z)$, 一个量化器 Q 和一个数模转换反馈回路 DAC 构成。

假设量化器 Q 为一个带噪声 E 的加法器, 量化器 Q 和回路 DAC 增益都为1, 则 Σ - Δ A/D转换器简化线性模型如图2所示。

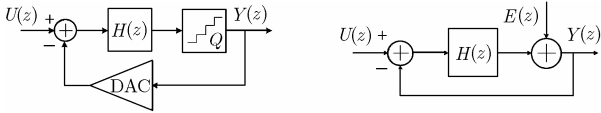


图1 高阶A/D转换器

图2 A/D转换器简化线性模型

由图2知: 该系统是一个两输入单输出的线性系统, 一个输入为外部输入信号 U , 另一个输入为量化器噪声输入 E , 输出则是量化器值 Y , 根据线性系统叠加原理, 系统 z 域输出表示为

$$Y(z) = \text{STF}(z)X(z) + \text{NTF}(z)E(z) \quad (1)$$

$$\text{STF} = \frac{H(z)}{1 + H(z)}, \quad \text{NTF} = \frac{1}{1 + H(z)} \quad (2)$$

其中 $\text{NTF}(z)$ 为信号传输函数, $\text{STF}(z)$ 为噪声传输函数。

3 插值型 Σ - Δ A/D转换器

图3所示为通用一位 N 阶的插值型 Σ - Δ A/D转换器结构模型^[1,3](为了简便省略了状态的前馈通路), 这种模型可选择的参数多, 是一种比传递函数更加灵活的设计方法, 所有的插值型 Σ - Δ A/D转换器都可以用这种模型来实现。

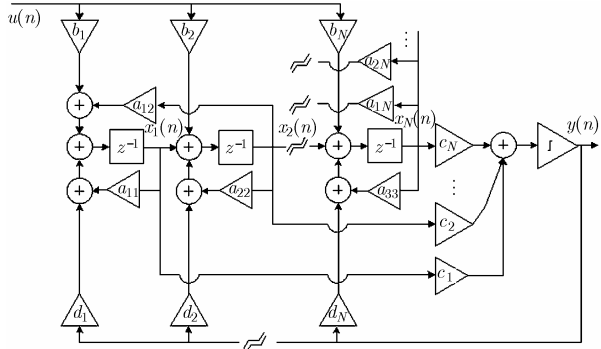


图3 插值型 Σ - Δ A/D转换器结构模型

由图3可以看出, A/D转换器由 N 个单位延迟和一个量化器组成, X 是转换器系统 N 维状态变量, A, B, C, D 是转换器的结构参数。A/D转换器矩阵形式的状态方程表示为

$$\left. \begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) + Dy(n) \\ y(n) &= \text{sgn}[Cx(n)] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ 0 & 1 & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{NN} \end{bmatrix}, \quad B = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_N]^T$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_N], \quad D = [d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_N]^T.$$

其中上标 T 表示矩阵的转置, 符号函数 $\text{sgn}()$ 表示一位量化器 Q , 增益为1, 因此, 量化器的线性模型为

$$y(n) = Cx(n) + e(n) \quad (4)$$

$e(n)$ 为量化器的噪声输入。由式(3), 式(4)经过 z 变换, 得到A/D转换器的 z 域表示, 由此可得其噪声传递函数^[8]为

$$\text{NTF}(z) = \frac{\det[zI - A]}{\det[zI - (A + DC)]} \quad (5)$$

信号传递函数为

$$\text{STF}(z) = C[zI - (A + DC)]^{-1}B \quad (6)$$

由式(5), 式(6)可以看出, 信号传递函数 $\text{STF}(z)$ 和噪声传递函数 $\text{NTF}(z)$ 有相同的极点, 并且都等于矩阵 $A + DC$ 的特征值, 它们是式(2)的另一种表达形式。

4 设计算法

Σ - Δ A/D转换器主要性能由噪声传递函数决定, 其一般形式为

$$\text{NTF}(z) = N(z)/D(z) \quad (7)$$

设计噪声传递函数, 首先要根据性能要求和过采样率估计插值型 Σ - Δ A/D转换器的阶数 N ; 其次, 对其分子 $N(z)$ 零点和分母 $D(z)$ 极点分开设计, 然后由得到的零极点组合成噪声传递函数 $\text{NTF}(z)$, 并验证是否符合稳定条件; 在插值型结构的系数实现中, 根据系统能量增量最小原理, 计算其系数。

4.1 零点优化设计

一般高阶噪声传递函数 N 个零点都集中在 $z = 1$ 处, 即直流频率处, 从而使低频信号基带处的量化噪声得到衰减, 但是文献[9]指出: 如果噪声传递函数的零点均匀地分布在信号基带中, 而不是都集中在直流频率处, 会对量化噪声有更好的衰减效果。为了使信号内的噪声功率最小, 可采用零点优化的方法来得到噪声传递函数的零点分布, 也就是得到分子 $N(z)$ 零点。

假设量化噪声在基带 $[0, \omega_B]$ 中的功率谱密度为 $1/3$, 则基带中量化噪声的功率为

$$N_0^2 = \frac{1}{3\pi} \int_0^{\omega_B} |\text{NTF}(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (8)$$

再假设噪声传递函数的极点已确定, 即为常数; 并且对于信号而言, 噪声传递函数是一个低通滤波器函数, 因而有 $(\omega_B \ll 1)$, 因此, 在信号频带内可以近似为

$$|\text{NTF}(e^{j\omega})|^2 \approx k \prod_{i=1}^n (\omega - \omega_i)^2 \quad (9)$$

其中 k 为常数, 依赖于已确定极点的分布, N 是转换器的阶数, 而 ω_i 则是噪声传递函数的第 i 个零点。于是噪声传递函数零点优化的问题就是使式(10)取最小的问题, 即

$$\min I = \begin{cases} \int_0^1 \omega^2 \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (\omega - \omega_i)^2 d\omega, & n \text{ 为奇数} \\ \int_0^{1/2} \prod_{i=1}^{n/2} (\omega - \omega_i)^2 d\omega, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (10)$$

在 $\partial I / \partial \omega_i = 0$ 条件下求式(10), 得到信号带内量化噪声最小情况下的零点分布位置, 所得结果为相对于带宽 ω_B 的归一化常数。表1给出了1-6阶的零点位置和相对于零点集中在 $z = 1$ 处时信号带内可以提高的信噪比。

表1 优化噪声零点位置

阶数 n	零点位置(归一化 ω_B)	优化后可提高的SNR(dB)
1	0	0
2	± 0.5774	3.5
3	$0, \pm 0.7746$	8
4	$\pm 0.3400, \pm 0.8611$	13
5	$0, \pm 0.5385, \pm 0.9062$	18
6	$\pm 0.2386, \pm 0.6612, \pm 0.9324$	23

4.2 极点巴特沃思设计

选择噪声传递函数的极点可以限制噪声传递函数的带外增益, 从而提高 Σ - Δ A/D 转换器的稳定性。另外, 还可以得到比较平滑的高频噪声传递函数, 有利于稳定转换器的信噪比。巴特沃思高通滤波器具有高通平滑滤波特性, 有成熟的理论和表格可查, 因而噪声传递函数的极点 $D(z)$ 采用设计高通巴特沃思高通滤波器^[10]的方法可以很方便得到。

假设归一化的模拟低通巴特沃思滤波器为

$$H_{LP}(s) = 1/D(s) \quad (11)$$

则经过下列的双线性变换得到高通的数字滤波器:

$$s = [(1 + z^{-1})/(1 - z^{-1})] \cdot \tan(\omega_c/2) \quad (12)$$

ω_c 为通带的3dB处的截止频率。由此得到的分母作为噪声传递函数式(7)的分母 $D(z)$ 。

4.3 稳定分析

文献[7]指出: 噪声带外增益(NPG)越大, 带内衰减也越大, 这样有利于带内噪声的压缩, 提高转换器的信噪比; 但是, 带外增益越大, 也就意味着转换器越不容易稳定, 输入信号的幅度范围就越窄。反之, 带外增益越小, 带内衰减就越小, 不利于带内噪声的压缩, 转换器的信噪比相对较低; 但是, 这时转换器容易稳定, 输入信号的范围比较大。因此, 噪声传递函数的带外增益决定了输入信号幅度和转换器输出信噪比之间是一对矛盾关系。所以, 在设计好噪声传递函数后, 分析验证其稳定性和信噪比是必要的。噪声带外增益NPG定义为

$$NPG = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\text{NTF}(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (13)$$

为了保证转换器稳定, 噪声带外增益NPG满足的条件为

$$NPG < NPG_{\max} \quad (14)$$

其中最大带外增益为 $NPG_{\max} = L - 3P_{\text{in,max}}$, 式中常数 L 对于阶数 $N = 3, 4$ 和 $N > 4$ 分别为 2.55, 2.4 和 2.35, $P_{\text{in,max}} = X_{\text{in,max}}^2/2$ 为最大信号功率, $X_{\text{in,max}}$ 为稳定的直流信号输入幅度, 满足最大带外增益保证了在输入信号不超过最大值时转换器的稳定。

4.4 插值型结构系数的优化实现

得到噪声传递函数后, 比较式(5), 式(7)可知, 还不能完全确定插值型矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 的系数, 只知道它们的特征值, 因而只能确定矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 系数的满足的条件。输入矩阵 \mathbf{B} 只与输入信号传递函数有关, 在已知矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 的条件下, 则可以由式(2)得到。为了优化系数矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 和减少转换器内部系统的能量, 定义A/D转换器系统状态空间的能量为

$$EN = \sum_{i=1}^N x_i^2 = x^T x \quad (15)$$

假设信号输入和量化噪声输入都为零, 那么对于任意初值 $x(0)$, 系统在时刻 $n+1$ 的能量比 n 时刻增量最小, 根据线性系统理论, 这时系统有很好的鲁棒性, 其中 $x, x(0)$ 分别表示转换器系统的状态向量和初始值。由式(15)得

$$\begin{aligned} EN(n+1) &= x^T(n+1)x(n+1) \\ &= x^T(n)(\mathbf{A} + \mathbf{DC})^T(\mathbf{A} + \mathbf{DC})x(n) \\ &= x^T(n)\|\mathbf{A} + \mathbf{DC}\|_2 x(n) \end{aligned} \quad (16)$$

所以, 要求能量增量最小, 即要求矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{DC}$ 的范数 $\|\mathbf{A} + \mathbf{DC}\|_2$ 最小。因而, 系数矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 可以由下列最优化问题确定:

$$\min \|\mathbf{A} + \mathbf{DC}\|_2 \quad \text{s.t.} \begin{cases} \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = N(z) \\ \det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{DC})] = D(z) \end{cases} \quad (17)$$

5 设计实例

在采样频率为 $f_s = 3.072\text{MHz}$, 信号带宽为 $\text{BW} = (0 \sim 20)\text{kHz}$, 信号幅度 $X_{\text{in,max}} = 0.9\text{V}$ 要求下, 设计一个如图3所示的三阶插值型 Σ - Δ A/D转换器。由文献[10]可得归一化的三阶模拟低通巴特沃思滤波器的极点为: $-1, -0.5 \pm j 0.8660$ 。 ω_c 为通带的3dB处的截止频率, 那么有 $\omega_c = 2 \times 2\pi f_B$, 代入式(12), 得到模拟低通巴特沃思滤波器变换为高通数字滤波器的双线性变换式, 并代入式(11), 得到三阶高通数字巴特沃思噪声滤波器的极点, 值为: $0.8515 \pm j 0.1953, 0.7711$, 而此时3个零点全部集中在 $z = 1$ 处, 保持该极点不变, 再按照4.1节方法进行带内噪声的零点优化, 优化后零点值为: $1, 0.9995 \pm j 0.0317$, 于是得到了零极点型的噪声传递函数, 并展开成多项式如下:

$$\text{NTF}(z) = \frac{z^3 - 2.999z^2 + 2.999z - 1}{z^3 - 2.487z^2 + 2.098z - 0.5972} \quad (18)$$

根据4.3节有 $NPG_{\max} = 1.35$, 此时带外增益为 $NPG = 1.2265 < NPG_{\max}$, 满足式(14), 有较好稳定性和一定裕度。在以上的设计要求下, 由文献[7]方法得到的噪声传递函数多项式为

$$\text{NTF}(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z^3 - 2.374z^2 + 1.929z - 0.5322} \quad (19)$$

带外增益为 $NPG = 1.2860 > 1.2265$, 因而稳定性比本文的差。在Matlab工作平台和Schreier工具箱下建模^[9,11], 对以上两种三阶 Σ - Δ A/D调制器进行行为级仿真, 采样点数为 8192, 其输出信号功率谱如图4所示, 由图4可知在信号带宽

为 $BW = (0 \sim 0.01f_s)$, 噪声衰减可达90dB, 与参考文献的差不多, 但是本文方法得到的信噪比SNR比参考文献[7]得到的多6dB, 相当于位数增加1bit. 图5为信号输入幅度与信号比SNR的关系, 由图可见三阶插值型 $\Sigma\text{-}\Delta$ A/D转换器最大信号比SNR可达90dB, 达到此后再增大信号输入幅度则转换器进入不稳定状态; 并且, 图3说明本文方法比文献[7]方法在稳定性能, SNR上都要好。

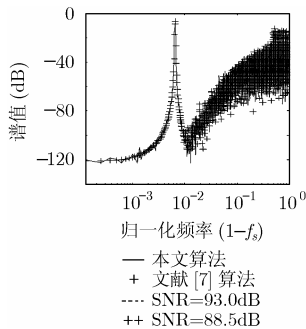


图4 信号功率谱

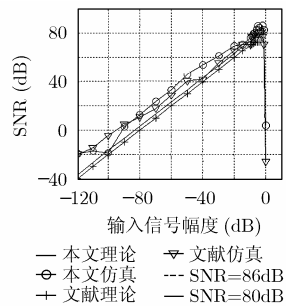


图5 信号输入幅度与信号比关系

为了确定系数矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{C} 和 \mathbf{D} , 将式(18)代入到式(17)求最优化问题, 得到矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.2749 & -1.2671 & 0.2724 \\ 1 & 0.3017 & 0.0429 \\ 0 & 1 & 0.4224 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{C} = [-1.0904 \ 1.0718 \ -0.2798]$, $\mathbf{D} = [1.1434 \ 0.6101 \ -0.2896]^T$, 此时 $\|\mathbf{A} + \mathbf{DC}\|_2 = 1.3629$. 由式(2), 式(5), 式(6)代入上述值, 比较两边系数可得矩阵 $\mathbf{B} = [-1.1206 \ -0.6203 \ 0.1592]^T$. 图6为信号传递函数采用串联结构实现后的仿真图^[8], 这是一种最少系数的插值型结构, 图7为文中插值型结构优化后状态参数的仿真图. 在输入信号幅度超过稳定值后, 系统进入不稳定状态, 如果超过稳定值的时间比较短, 幅度也比较小, 那么在信号恢复正常后, 两种实现方法都能恢复正常. 从图6, 图7中可以看出, 在干扰消失后, 结构参数优化系统具有更快的恢复性能, 因而具有更强的抗干扰性能. 另外, 优化后状态变量的值比不优化小得多, 这有利于采用当今开关电容或者开关电流技术中低电压、低功耗电路来实现^[11,12].

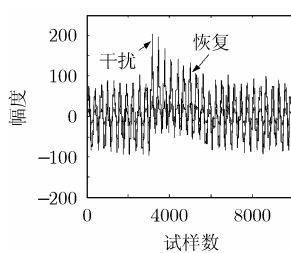


图6 优化前干扰恢复

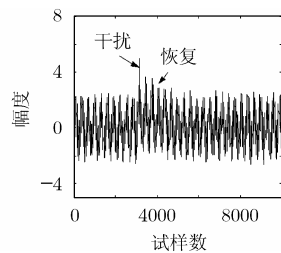


图7 优化后干扰恢复

6 结束语

本文提出了一种新的通用高阶稳定的 $\Sigma\text{-}\Delta$ 插值型高精

度A/D转换器的优化设计方法, 给出了设计原理和设计过程. 在噪声传递函数上, 采用零点优化和巴特沃思极点设计的技术. 在状态空间下确定插值型结构系数矩阵时, 采用使转换器系统能量增益最小的优化算法, 使其具有更佳的性能和实现工艺. 通过仿真实例验证了该方法的有效性。

参考文献

- [1] Steiner P and Yang W. A framework for analysis of high-order sigma-delta modulators. *IEEE Trans. on Circuits and Systems II*, 1997, 44(1): 1-10.
- [2] Schreier R. The sigma-delta toolbox for matlab. 2005, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange>
- [3] Chao K C, Lee S W, and Sodini C G. A higher order topology for interpolative modulators for oversampling A/D converters. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1990, 37(3): 309-318.
- [4] 蔡跃明等. 1比特高阶调制器的研究. *东南大学学报*, 1997, 27(2): 125-128.
- [5] 李宏星, 冯晖, 林争辉. $\Sigma\text{-}\Delta$ 调制器传递函数设计方法. *微电子学与计算机*, 2004, 21(6): 147-153.
- [6] 黄峰等. 一种稳定的高阶 $\Sigma\text{-}\Delta$ 模/数转换器. *微电子学*, 2002, 3(2): 93-96.
- [7] Kuo T H, Chen K D, and Chen J R. Automatic coefficients design for high-order sigma-delta modulators. *IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1999, 46(1): 6-15.
- [8] R. 杰奎沃特著, 刘兴良译. 现代数字控制系统. 北京: 科学出版社, 1985, 第3章.
- [9] Schreier R. An empirical study of high-order single-bit delta-sigma modulators. *IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1993, 40(2): 461-466.
- [10] 程佩青. 数字信号处理教程. 北京: 清华大学出版社(第二版)2001, 266-306.
- [11] Malcovati P, et al. Behavioral modeling of switched-capacitor sigma-delta modulators. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, 50(3): 352-364.
- [12] Safi-Harb M and Roberts G W. Low power delta-sigma modulator for ADSL applications in a low-voltage CMOS technology. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2005, 52(10): 2075-2089.

唐圣学: 男, 1976年生, 讲师, 研究方向为大规模混合信号电路设计与测试.

何怡刚: 男, 1969年生, 教授, 研究方向为模拟集成电路设计、小波分析与信号处理、测试与故障诊断等.

郭杰荣: 男, 1973年生, 副教授, 研究方向为专用集成电路设计及测试.

李宏民: 男, 1974 年生, 讲师, 研究方向为信号与信息处理.