

## 基于正则化处理的超分辨率重建

韩玉兵<sup>①</sup> 吴乐南<sup>②</sup> 张冬青<sup>③</sup>

<sup>①</sup>(南京理工大学电子工程与光电技术学院 南京 210094)

<sup>②</sup>(东南大学无线电工程系 南京 210096)

<sup>③</sup>(南京航空航天大学经济与管理科学学院 南京 210016)

**摘要:** 针对超分辨率重建的病态反问题进行研究。该文首先介绍超分辨率重建的数学模型, 分析了最小二乘估计及其病态性。其次给出病态问题的正则化泛函, 并提出一种自适应动态确定正则化系数的方法, 主要研究了迭代算法的收敛性和参数选择等问题。实验结果验证了方法的有效性。

**关键词:** 图像处理; 超分辨率重建; 反问题; 正则化

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)07-1713-04

## Super-resolution Reconstruction Based on Regularization

Han Yu-bing<sup>①</sup> Wu Le-nan<sup>②</sup> Zhang Dong-qing<sup>③</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronic Engineering & Optoelectronic Techniques, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

<sup>②</sup>(Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

<sup>③</sup>(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** In this paper, the ill-posed inverse problem of super-resolution reconstruction is concerned. Firstly, the mathematical model of super-resolution reconstruction is given, and the ill-posed property of the least square estimation is analyzed. Then, the regularization of ill-posed problem is processed by modifying the original energy functional, and an adaptive dynamic method is proposed for the choice of the regularization coefficient. Finally, the convergence of the iteration formula and the choice of parameter are thoroughly studied. Experimental results demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** Image processing; Super-resolution reconstruction; Inverse problem; Regularization

### 1 引言

超分辨率重建是图像处理、视频处理和计算机视觉领域的常见问题, 属于病态反问题的范畴, 需要进行正则化处理<sup>[1]</sup>。一般而言, 病态问题的正则化处理需要解决两个重要问题, 首先是正则化泛函中正则项的确定, 选择的正则项应该能够衡量信号的某种奇异性, 同时能够在信号重建的同时更好地保持信号的细节<sup>[2, 3]</sup>; 其次为正则化系数的确定, 目前常用的方法主要有以下几类: (1) 经验选取方法<sup>[4, 5]</sup>, 具体为根据观测数据来估计噪声水平  $\varepsilon^2$  和凭经验选取一个正则化能量上界  $E^2$ , 从而确定正则化系数  $\alpha = (\varepsilon/E)^2$ , 这种方法的缺点是太过主观, 需要噪声和正则项的先验知识。(2) 广义交叉验证方法 GCV<sup>[6, 7]</sup>(Generalize Cross Validation), 其本质就是将观测数据随机分为一些估计集和验证集, 采用其中估计集进行模型估计, 而用验证集进行数据验证, 经过大量的交叉实验, 最后选择预测误差最小的正则化系数作为最优系数。它的特点是直接数据驱动, 无需先验知识, 但是

由于其计算量太大而且需要计算大型矩阵的特征值, 一般不太实用。(3) L-Curve 方法<sup>[8, 9]</sup>, 它是通过选取不同的正则化系数, 绘制一个类似字母“L”的数据拟合项和正则项的能量变化曲线, 然后选取曲线最大曲率(或拐点)处的系数作为最优正则化系数, L-Curve 方法的优点是直观稳健, 但是也存在计算量太大的缺点。本文主要针对第 2 个问题进行讨论, 提出一种动态自适应确定正则化系数的方法, 从而避免了上述方法的人为凭经验选取或事先通过大量计算得到的缺点。

### 2 超分辨率重建模型

设  $\mathbf{X} \in R^L$  为描述某一连续场景的理想离散信号,  $\mathbf{Y} \in R^M$  为观测到的降质信号,  $L > M$  分别为原来信号与观测信号的维数, 则一般信号的降质模型为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{E} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{E}$  为降质模型的随机噪声部分, 假设为期望为 0、标准差为  $\sigma$  的高斯白噪声,  $\mathbf{A}$  为降质模型的确定性部分, 一般假设为一个线性算子, 代表信号获取过程中的各种变换、模糊及降采样等。所谓信号的超分辨率重建, 就是采用一切技术手段由观测到的降质信号  $\mathbf{Y}$  尽可能地复原重建出原来的高

分辨率信号  $\mathbf{X}$ 。

### 3 最小二乘及其病态性

信号超分辨率重建属于典型的反问题范畴,反问题所共有的一个重要属性是病态性,所谓病态或不适应(ill-posed),即方程的解不能完全满足“存在、唯一和连续依赖于观测数据”3个条件<sup>[1]</sup>。这里,解不连续依赖于观测数据的含义是,观测数据的微小变动可能导致解的很大变动。由于观测数据会受噪声污染,因此方程的解可能偏离真解相当远。下面简要介绍上述超分辨率重建问题的最小二乘估计及其病态性。

针对降质模型  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{E}$ , 直接进行最小二乘估计,或在假设  $\mathbf{E}$  为高斯白噪声条件下的极大似然(ML)估计,可得

$$\hat{\mathbf{X}} = \arg \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2 \quad (2)$$

其 Euler-Lagrange 方程为

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \quad (3)$$

显然,  $\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) < L$ , 上述方程的解不唯一,即是病态的。为了得到符合实际意义的解,就必须寻求某种近似方法对原问题进行修改,使修改后的问题变成良态,同时修改后问题的解又必须非常靠近原问题的真解。显然这是两个相互矛盾的要求,需要进行折中,实现这种目标的技术称为正则化。

### 4 病态反问题的正则化处理

#### 4.1 正则化泛函

修改原问题式(2)的解,构成如下正则化泛函的极小化问题

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} &= \arg \min_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) \\ J(\mathbf{X}) &= \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2 + \alpha(\mathbf{X}) \int_{\Omega} \phi(|\nabla \mathbf{X}|) d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $d\mathbf{X}$  和  $\Omega$  分别为信号自变量的微分和定义域;  $d(\mathbf{X}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2$  表示数据拟合项,衡量数据拟合程度;  $r(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla \mathbf{X}|) d\mathbf{X}$  为正则项,衡量信号的某种奇异性;  $\alpha(\mathbf{X})$  为正则化变量或动态正则化系数,起平衡正则项和数据项的作用,当它变大时,重建解趋于光滑,反之则数据拟合误差变小。 $\phi(s)$  为单调非降函数,通过选择合适的  $\phi(s)$ ,可以得到各向同性或各向异性的演化特性,详见文献[2, 3]。由此可见,超分辨率重建问题的本质就是寻找解  $\mathbf{X}$ ,在充分拟合观测数据的前提下,使某种奇异性度量最小。下面先讨论正则化变量  $\alpha(\mathbf{X})$  的特征及其选择,然后再讨论问题解的迭代形式和收敛性等问题。

#### 4.2 正则化变量 $\alpha(\mathbf{X})$ 的特征及其选择

由式(4)可以看出,随着迭代的进行,数据项  $d(\mathbf{X})$  的作用是逐步拟合观测误差数据,使得  $\mathbf{X}$  呈高频化趋势;而正则项  $r(\mathbf{X})$  则可看作是一个尺度空间的正向演化过程,具有去除噪声、逐步模糊小尺度上细微结构的作用,使得  $\mathbf{X}$  呈现低频化趋势。因此正则化系数必须能够根据拟合误差能量和正

则能量的变化来动态调节,以自适应地均衡重建信号的高频和低频特征,使其在保持一定正则性条件下充分拟合观测数据,所以它的选取必须满足如下条件:

(1)  $\alpha(\mathbf{X})$  必须为一个光滑函数,以便于下述求导运算。

(2)  $\alpha(\mathbf{X})$  必须关于数据项  $d(\mathbf{X})$  和正则项  $r(\mathbf{X})$  单调上升。因为当数据项  $d(\mathbf{X})$  变大时,拟合误差增大,此时信号的高频噪声太多,应该加大  $\alpha(\mathbf{X})$  以增强正则项的演化作用,反之则减小  $\alpha(\mathbf{X})$ 。而当  $r(\mathbf{X})$  变小时,即表示信号的正则性增强(或奇异性减弱),信号高频信息丢失严重,为使重建信号不偏离观测数据太远,应该减小  $\alpha(\mathbf{X})$  以适当减弱正则项的演化平滑作用,反之则增大  $\alpha(\mathbf{X})$ 。此外  $\alpha(\mathbf{X})$  还必须满足两个极端情况  $\lim_{d(\mathbf{X}) \rightarrow 0} \alpha(\mathbf{X}) = 0$ ,  $\lim_{d(\mathbf{X}) \rightarrow +\infty} \alpha(\mathbf{X}) = +\infty$ ,即当数据项的误差能量为零时,则取消正则项,完全由数据项进行重建。反之当数据项的误差能量为无穷大时,此时观测数据没有任何意义,应该完全由先验知识构成的正则项进行重建。

(3)  $\alpha(\mathbf{X})$  的选择必须使正则化泛函  $J(\mathbf{X})$  为凸泛函。因为只有具备了凸性条件,上述泛函的局部极小值才是全局极小值,可以由任意初始值通过简单的梯度下降法进行求解。

根据以上  $\alpha(\mathbf{X})$  的特点,这里借鉴 Kang<sup>[10]</sup>等人的工作,选取  $\alpha(\mathbf{X}) = \tau J(\mathbf{X})$ ,其中  $\tau$  为调节参数,又因为  $J(\mathbf{X}) = d(\mathbf{X}) + \alpha(\mathbf{X})r(\mathbf{X})$ ,所以有

$$\alpha(\mathbf{X}) = \frac{d(\mathbf{X})}{(1/\tau) - r(\mathbf{X})} \quad (5)$$

显然此式满足上述  $\alpha(\mathbf{X})$  的条件(1),条件(2),至于条件(3),由文献[10]可知,当  $\frac{\partial \alpha(\mathbf{X})}{\partial J} = \tau < \frac{1}{r(\mathbf{X})}$  时,正则化泛函  $J(\mathbf{X})$  为凸。

#### 4.3 迭代形式

现在求解正则化泛函  $J(\mathbf{X}) = d(\mathbf{X}) + \alpha(\mathbf{X})r(\mathbf{X})$  的极小化问题,由于  $J(\mathbf{X})$  为凸,所以存在唯一极小值,且满足  $\nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) = 0$ ,即如下的 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X} - \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{X}) \text{div} \left( \frac{\phi'(|\nabla \mathbf{X}|)}{|\nabla \mathbf{X}|} \nabla \mathbf{X} \right) + \frac{1}{2} r(\mathbf{X}) \nabla_{\mathbf{X}} \alpha(\mathbf{X}) \\ = \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\nabla_{\mathbf{X}} \alpha(\mathbf{X}) = \frac{d\alpha(\mathbf{X})}{dJ} \nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X})$ ,只要  $\frac{d\alpha(\mathbf{X})}{dJ} = \tau$  有界,则当  $\nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) = 0$  时,  $\nabla_{\mathbf{X}} \alpha(\mathbf{X}) = 0$ 。所以式(6)变为

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X} - \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{X}) \text{div} \left( \frac{\phi'(|\nabla \mathbf{X}|)}{|\nabla \mathbf{X}|} \nabla \mathbf{X} \right) = \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \quad (7)$$

这是一个高度复杂的非线性方程,故采用迭代算法

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{Y} - \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} - \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{X}_k) \mathbf{L} \right) \mathbf{X}_k \right] \quad (8)$$

其中  $\mathbf{L}$  为散度项  $\text{div} \left( \frac{\phi'(|\nabla \mathbf{X}|)}{|\nabla \mathbf{X}|} \nabla \mathbf{X} \right)$  的某种离散格式所对应的线性矩阵,具体离散格式参见文献[2]。值得注意的是,

此处迭代松弛因子取为 1, 是因为正则化变量  $\alpha(\mathbf{X})$  中含有因子  $\tau$ , 由此可定义算法的收敛性和收敛速度, 详见 4.4 节。

#### 4.4 收敛性分析

针对式(8), 取第  $k+1$  和第  $k$  步相减, 得

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}) + \frac{1}{2} \mathbf{L} (\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_{k-1})) \quad (9)$$

其中非线性项  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \alpha(\mathbf{X})\mathbf{X}$ , 取一阶线性近似得

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = \left( \mathbf{I} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \frac{1}{2} J_{\mathbf{F}}(\mathbf{X}_k) \mathbf{L}) \right) (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}) \quad (10)$$

其中  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{X})$  为  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  的 Jacobian 矩阵, 第  $(m, n)$  个元素为

$$\frac{\partial \mathbf{F}_m(\mathbf{X})}{\partial x_n} = x_m \frac{\partial \alpha(\mathbf{X})}{\partial x_m} + \alpha(\mathbf{X}) \frac{\partial x_m}{\partial x_n}; \quad \mathbf{F}_m(\mathbf{X}) \text{ 为向量 } \mathbf{F}(\mathbf{X}) \text{ 的第 } m \text{ 个元素, } x_n \text{ 为向量 } \mathbf{X} \text{ 的第 } n \text{ 个元素。}$$

因为当  $\nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) = 0$  时,  $\nabla_{\mathbf{X}} \alpha(\mathbf{X}) = 0$ , 所以  $\frac{\partial \mathbf{F}_m(\mathbf{X})}{\partial x_n} = \alpha(\mathbf{X}) \frac{\partial x_m}{\partial x_n} =$

$$\begin{cases} \alpha(\mathbf{X}), & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \text{ 即 } J_{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) = \alpha(\mathbf{X})\mathbf{I}, \text{ 则式(10)变为}$$

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = \left( \mathbf{I} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{X}_k) \mathbf{L}) \right) (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}) \quad (11)$$

显然上述迭代收敛的充要条件为

$$\rho \left( \mathbf{I} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{X}) \mathbf{L}) \right) < 1 \quad (12)$$

其中  $\rho(\cdot)$  为矩阵的谱半径。一般而言, 矩阵  $(-\mathbf{L})$  是对角元为正的对角占优矩阵<sup>[2]</sup>, 根据特征值分布的圆盘定理<sup>[11]</sup>知其特征值分布满足  $0 \leq \lambda \leq 2 \max(-L_{ii})$ , 其中  $L_{ii}$  为矩阵  $\mathbf{L}$  的第  $i$  个对角元。又因为  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  非负定, 所以式(12)变为

$$\rho \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} - \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{X}) \mathbf{L} \right) < 2. \text{ 再由不等式 } \rho \left( \mathbf{A}^T \mathbf{A} - \frac{1}{2} \alpha(\mathbf{X}) \mathbf{L} \right) \leq \rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) + \alpha(\mathbf{X}) \max_i(-L_{ii}), \text{ 所以只要 } \alpha(\mathbf{X}) < \frac{2 - \rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}{\max_i(-L_{ii})},$$

即可保证式(8)迭代收敛。关于  $\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$  可以将其规整为 1, 最终可得迭代收敛的充分条件为

$$\alpha(\mathbf{X}) < \frac{1}{\max_i(-L_{ii})} \quad (13)$$

#### 4.5 参数 $\tau$ 的确定

现在根据 4.4 节迭代收敛的充分条件, 来讨论  $\alpha(\mathbf{X})$  中调节参数  $\tau$  的确定。因为

$$\alpha(\mathbf{X}) = \frac{d(\mathbf{X})}{(1/\tau) - r(\mathbf{X})} < \frac{1}{\max_i(-L_{ii})} \quad (14)$$

所以  $\frac{1}{\tau} > r(\mathbf{X}) + d(\mathbf{X}) \max_i(-L_{ii})$ 。对于一般信号来说, 不妨假设信号能量远远大于噪声能量和反映信号奇异性的高频能量, 故可作如下合理近似

$$r(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla \mathbf{X}|) d\mathbf{X} \leq \|\mathbf{X}\|^2 \approx \|\mathbf{Y}\|^2 \quad (15)$$

$$d(\mathbf{X}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2 = \|\mathbf{E}\|^2 \leq \|\mathbf{Y}\|^2 \quad (16)$$

则有  $\frac{1}{\tau} > (1 + \max_i(-L_{ii})) \|\mathbf{Y}\|^2$ 。所以调节参数可取

$$\tau = \frac{1}{(1 + \max_i(-L_{ii})) \|\mathbf{Y}\|^2} \quad (17)$$

此时显然满足迭代收敛条件, 而且由于

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{X})}{\partial J} = \tau = \frac{1}{(1 + \max_i(-L_{ii})) \|\mathbf{Y}\|^2} \leq \frac{1}{\|\mathbf{Y}\|^2} < \frac{1}{r(\mathbf{X})} \quad (18)$$

所以  $J(\mathbf{X})$  为凸泛函, 从而保证迭代由任意初始值开始均能得到最优解。

## 5 实验研究

本节主要针对二维图像信号, 进行图像超分辨率重建问题中的动态确定正则化系数的实验研究。采用标准 Elaine 图像, 大小为  $512 \times 512$ , 取方差为 1 的  $5 \times 5$  高斯模糊核。降采样因子为 2。噪声为均值 0, 标准差  $\sigma = 1.275$  的加性高斯白噪声。正则项  $r(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla \mathbf{X}|) d\mathbf{X}$  取简单各向同性

的 Tikhonov 正则化<sup>[1]</sup>, 即  $\phi(s) = s^2$ , 此时  $\mathbf{L} = 2\mathbf{A}$  为 2 倍 Laplacian 算子, 则  $\max(-L_{ii}) = 8$ , 所以可取  $\alpha(\mathbf{X}) = \frac{d(\mathbf{X})}{(1/\tau) - r(\mathbf{X})}$  中的  $\tau = \frac{1}{9\|\mathbf{Y}\|^2}$ 。重建评价指标采用常见的峰

值信噪比<sup>[5]</sup>  $\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{255^2 L_1 L_2}{\|\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\|^2}$ , 其中  $\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}$  分别为真实图像和重建图像,  $L_1, L_2$  为图像大小。迭代停止条件为  $\frac{\|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\|^2}{\|\mathbf{X}_k\|^2} \leq 10^{-8}$ , 其中  $k$  为迭代次数。

图 1 给出了 3 种不同初始条件下的超分辨率重建迭代情况, 3 种初值分别为降质图像的双三次插值, 全 0 图像和  $\mathbf{A}^T \mathbf{Y}$ , 其中图 1(a) 为正则化变量  $\alpha(\mathbf{X})$  的变化曲线, 图 1(b) 和图 1(c) 分别为数据拟合误差能量  $d(\mathbf{X}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}\|^2$  和正则化能量  $r(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \phi(|\nabla \mathbf{X}|) d\mathbf{X}$  的迭代曲线, 由此可以看出,

上述正则化变量  $\alpha(\mathbf{X})$  及其调节参数  $\tau$  的确定可以保证最优化泛函  $J(\mathbf{X})$  的凸性和迭代算法的收敛性, 由任意初始值均可得到最终稳定解。图 2 为 Elaine 图像的超分辨率重建结果, 仅给出了一种初值条件下的超分辨率重建图, 其余两种类似, 故略去。此外为对比起见, 图 2 中还给出了两种正则化系数恒为常数的 Tikhonov 正则化重建图像, 一种取  $\alpha = 0.015$ , 此时由于正则化系数取值偏大, 过度惩罚了重建信号的高频奇异特征, 导致重建图像过分模糊, 丢失了一些边缘细节。另一种为  $\alpha = 0$ , 此时就是简单的最小二乘重建, 由于超分辨率重建属于严重的病态反问题, 从而导致重建图像的噪声放大。而基于动态自适应确定正则化系数的方法则有效地解决了上述困难, 即由任意初始值开始, 根据重建信号的数据拟合误差能量和正则化能量自适应地调节正则化系数并最终趋于一个稳定的常数。

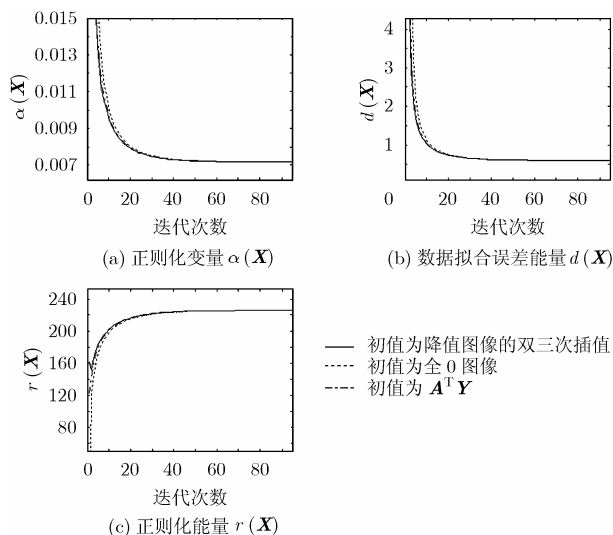


图 1 不同初始条件下的迭代曲线



图 2 Elaine 图像超分辨率重建结果

## 6 结束语

本文介绍了超分辨率重建的最小二乘估计及其病态性。针对正则化系数的选取, 提出一种自适应动态确定正则化系数的方法, 详细讨论了迭代算法的收敛性和参数选择等问题。它的突出特点就是正则化系数不是固定不变的, 而是随着重建过程的进行动态调整, 即根据重建信号的数据拟合误差能量和正则化能量自适应地进行调节并最终趋于一个稳定的常数。实验结果验证了方法的有效性。

## 参考文献

- [1] Tikhonov A N. Regularization of incorrectly posed problems. *Soviet Mathematical Doklady*, 1963, 4: 1624–1627.
- [2] Aubert G and Kornprobst P. *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. New York: Springer, 2001, 59–127.
- [3] Teboul S, Feraud L B, and Aubert G, *et al.* Variational approach for edge-preserving regularization using coupled PDE's. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1998, 7(3): 387–397.
- [4] Katsaggelos A, Biemond J, and Schafer R, *et al.* A regularized iterative image restoration algorithm. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1991, 39(4): 914–929.
- [5] Banham M R and Katsaggelos A K. Digital image restoration. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1997, 14(2): 24–41.
- [6] Golub G H, Heath M, and Wahba G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 1979, 21(2): 215–223.
- [7] Nguyen N, Milanfar P, and Golub G. Efficient generalized cross-validation with applications to parametric image restoration and resolution enhancement. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2001, 10(9): 1299–1308.
- [8] Hanson P C. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problem. [http://www.imm.dtu.dk/documents/ftp/tr99/tr15\\_99.pdf](http://www.imm.dtu.dk/documents/ftp/tr99/tr15_99.pdf), 1998.
- [9] Bose N K, Lertrattanapanich S, and Koo J. Advances in superresolution using L-curve. The IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Sydney, Australia, May 2001, Vol2: 433–436.
- [10] Kang M G and Katsaggelos A K. General choice of the regularization functional in regularized image restoration. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1995, 4(5): 594–602.
- [11] Golub G H and Van Loan C F. 袁亚湘译. 矩阵计算. 北京: 科学出版社, 2001: 357–455.

韩玉兵: 男, 1971 年生, 博士, 讲师, 研究方向为数字视频和图像处理、通信信号处理。

吴乐南: 男, 1952 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为多媒体信息处理、通信信号处理。

张冬青: 女, 1971 年生, 博士生, 研究方向为统计信号处理、时间序列分析。